集合论与数理逻辑初步

陈淑敏　编

黑龙江科学技术出版社

集合论与数理逻辑初步

Jihelun Yu Shuli Luoji Chubu

陈淑敏 编

黑龙江科学技术出版社

一九八四·哈尔滨

内 容 提 要

本书讲述集合论与数理逻辑的基本知识，供高中学生课外阅读。为了便于读者掌握概念，每节都例有适量例题和练习题。本书文字简练，并尽量通过图解说明问题。

责任编辑：翟明秋

封面设计：岳大地

集合论与数理逻辑初步

陈淑敏 编

黑龙江科学技术出版社出版

（哈尔滨市南岗区分部街28号）

长春新华印刷厂印刷·黑龙江省新华书店发行

开本787×1092毫米 1/32·6印张·字数120千

1984年10月第一版·1984年10月第一次印刷

印数：1—11,560

书号：13217·126 定价：0.68元

目　　录

第一章 集合论初步

§1 集合的概念

集合（简称集）是数学中的基本概念之一。

集合是指由某些事物构成的一个集体，通常用大写字母A，B，C等表示。集合中的任何一个事物称为集合的元素（简称元），通常用小写字母a，b，c等表示。

如果对于任何一个事物都可以指出它是属于集合A或者不属于集合A，那么集合A被认为是确定的。例如，集合A是{国家排球队队员}，那么对于某一位同志a，如果是国家排球队队员，则a属于A，如果这位同志不是国家排球队队员，则a不属于A。在这种情况下，集合A就是一个确定的集合。如果把“排球打得好的同志”构成一个集合，由于“打得好”的标准不明确，因此对于某一位同志来说，可能在某一范围内是排球打得好的同志，在另一范围内就不是排球打得好的同志，因此这样的集合就认为是不确定的。命题“事物a属于集合A”写成：$a\in A$。如果“事物a不属于集合A”，则写成：$a\notin A$。例如，如果A是偶数集，那么$12\in A$，$28\in A$，$15\notin A$，$-14\notin A$。

表示集合的方法有两种，在花括号{　}内加以说明：

1、列举法。列举出集合中的所有元素。

例如，$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$；$B=\{a, p, z\}$。

2．描述法．指出集合中元素的特征．如前面提到过的$A=\{$国家排球队队员$\}$；$B=\{$等腰三角形$\}$；$C=\{x \mid x \in N, x<6\}$，其中$N$表示自然数集，$C$表示是由小于6的自然数构成的集合．

在记述集合内的元素时，相同的元素只记为一个。例如，集合$A=\{$初一（4）班学生的身高$\}$，可能有五个学生身高都是1.55米，那么在列举A中的元素时，1.55米只记为一个。

没有元素的集合称为空集，记为Φ。例如，集合A是方程$x^2+1=0$的实数根的集合，因为方程$x^2+1=0$没有实数根，因此$A=\Phi$。

只有有限多个元素的集合称为有限集，例如，$\{$一月，二月，……，十一月，十二月$\}$.

有无限多个元素的集合称为无限集，例如自然数集。

对于某些数集，用以下的标记表示：

$\mathbf{N}$——自然数集；

$\mathbf{Z}$——整数集；

$\mathbf{Z}_0$——非负整数集；

$\mathbf{Q}$——有理数集；

$\mathbf{R}$——实数集。

例 1　确定下面哪些叙述中谈及的是元素属于（或不属于）集合的关系，并指出每种情况是一个什么样的集合：

a）词，“房子”是名词；

b）数$5\frac{3}{4}$不是自然数；

c）正方形是矩形；

d）一周内有几天？

解 a）名词可以构成一个集合，“房子”属于这个集合。

b）这里涉及到的是自然数集N，“数$5\frac{3}{4}$不是自然数”记为$5\frac{3}{4} \notin N$.

c）{矩形}是个确定的集合，正方形属于这个集合。

d）没有谈到一个确定的集合。

练　习　一

1. M是舞台上乐队声音优美的乐器的集合，下面各物是否属于这个集合：

a）六弦琴；b）三弦琴；c）鼓；d）六弦琴的弦。

2. N是自然数集，K是偶数集，M是被3整除的自然数的集合。利用符号$\in$或$\notin$，写出数4，12，79，$\frac{5}{6}$，33与上述各集合的关系。

3. F是圆周上的点的集合。指出图1中哪些点在圆周上，哪些点不在圆周上。并说明下列命题哪些为真：

a）$O \in F$；　b）$A \notin F$；

c）$B \in F$；　d）$C \notin F$.

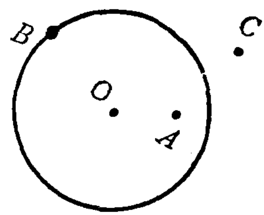

图 1

4. 集合$Y=\{\{a, b\}, \{k,$

c，$h\}$，$\{o$，m，$n\}\}$。

下列各式是否正确？

a）$\{k, c, h\} \in Y$；　　b）$a \in Y$；

c）$\{o, n\} \in Y$；　　d）$\{a, b\} \in Y$。

5．用列举法表示下列各集合：

a）一位数的集合；

b）24的因数的集合；

c）能被10整除的两位数的集合。

6．已知集合：$A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$，$B=\{12, 11, 10, 9, 8, 7\}$，$C=\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$．叙述上面每个集合里元素的特征．

7．读出下列每一个集合，并列出其中的元素：

$A=\{x \mid x \in \mathbf{N},\ x<3\}$；

$B=\{x \mid x \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant x \leqslant 3\}$；

$C=\{x \mid x \in \mathbf{Z}_0,\ x<3\frac{1}{2}\}$；

$D=\{x \mid x \in \mathbf{Z},\ -5<x \leqslant 2\}$；

$E=\{x \mid x \in \mathbf{Z},\ -7 \leqslant x \leqslant -2\}$。

8．在数轴上标出下列集合：

$A=\{x \mid x \in \mathbf{R},\ -3 \leqslant x \leqslant 2\}$；

$B=\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x \geqslant -4.2\}$；

$C=\{x \mid x \in \mathbf{R},\ x<7\}$；

$D=\{x \mid x \in \mathbf{R},\ -3.5<x<2.6\}$。

9．如果$K=\{y \mid y+5=9\}$；$P=\{z \mid z(z+3)=0\}$；$M=\{x \mid 4(3x-7)=-28+12x\}$。

说明哪些整数是集合K，P，M的元素。

图 2

10．看图 2，说明下列哪些命题是正确的：

a）$X\in[AB]$；　b）$X\notin[BA)$；　c）$X\in[XB)$；

d）$X\notin(AB)$；　e）$Y\in[AB)$；　f）$X\notin(XY)$；

g）$X\in[AB)$；　h）$Y\notin[AB]$；　i）$Y\in[XY]$。

§2　集合之间的关系

集合之间存在着下列关系：

如果集合B的每一个元素都属于集合A，则说集合B是集合A的子集，记为$B\subset A$。例如，$A=\{a, b, c, k, m\}$，$B=\{a, b, c\}$，$B\subset A$。或记为$A\supset B$。"$B\subset A$"读作"B包含于A"，"$A\supset B$"读作"A包含B"。

显然$A\subset A$，因为A中的每一个元素都属于A。空集看作是任何一个集合的子集，即$\phi\subset A$。

如果集合B中的元素都属于集合A，但是集合A中至少有一个元素不属于集合B，那么称集合B是集合A的真子集。

如果集合B中的每一个元素都属于集合A，同时集合A中的每一个元素都属于集合B，那么说集合A和集合B相等，记为$A=B$。例如，$A=\{2, 3, 4, 5\}$，$B=\{3, 2, 5, 4\}$，$A=B$。

如果在所研究的一个问题中，一切集合都是某一特定集合的子集，则把这个特定的集合称为全集，用 I 表示.

集合之间的关系可以通过欧勒圆直观地表示出来。例如，用欧勒圆表示“集合 B 是集合 A 的真子集”这一关系，可以象图 3 那样表示.

通常用矩形表示全集.

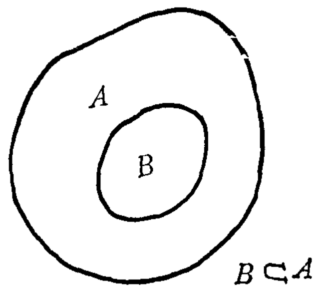

图 3

例 1 已知集合 $A=\{a, b, c\}$，写出 A 中所有不同的子集.

解 A 中不同的子集有：ϕ，$A_1=\{a\}$，$A_2=\{b\}$，$A_3=\{c\}$，$A_4=\{a, b\}$，$A_5=\{a, c\}$，$A_6=\{b, c\}$，$A_7=\{a, b, c\}$。其中 ϕ，A_1-A_6 是 A 的真子集。

如果集合 A 中有一个真子集与集合 B 中的某个真子集相等，则说集合 A 和集合 B 相交。

例如，$A=\{a, b, c, d, e\}$，$B=\{a, c, m, n\}$，A 中真子集 $\{a, c\}$ 与 B 中的真子集 $\{a, c\}$ 相等，这样的集合 A 和集合 B 相交。

用欧勒圆表示集合相交如图 4 .

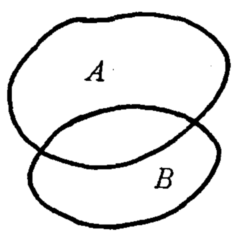

图 4

集合之间的关系存在下列性质：

1. 如果 $A=B$，$B=C$，那么 $A=C$；

2. 如果$A\subset B$，$B\subset C$，那么$A\subset C$；

3. 如果$A\subset B$，$B=C$，那么$A\subset C$

道理很简单，这里无需加以说明。

练　习　二

1. 指出下列各对集合之间处于什么样的关系：

a）$A=\{m, n, p\}$ 和$B=\{k, m, n\}$；

b）$A=\{m, n, p\}$ 和$B=\{n, m, p, k\}$；

c）$A=\{m, n, p\}$ 和$B=\{p, m, n\}$；

d）$A=\{m, n, p\}$ 和$B=\{k, l\}$。

2. 已知$a\in N$，能否断定$a\in \mathbf{Z}$？反之，由$a\in \mathbf{Z}$，得出$a\in N$是否成立？

3. 给定集合$C=\{-4\frac{5}{8}, -3, 0, \frac{1}{6}, 8.3, 9, 12\}$。从中分出子集，子集中的元素分别是：

a）自然数；b）整数；c）偶数；d）非负整数；e）是3的倍数的整数；f）正数。

4. 已知

P是等边三角形的集合；

Q是等腰三角形的集合；

S是等腰直角三角形的集合。

指出图5中哪一个图表示上面这些集合。

5. M是数923，233中数字的集合，K是数3，222，329中数字的集合。指出下列命题中哪个为真：a）M是K的子集。b）M和K相等。c）K是M的子集。d）K和M相交。

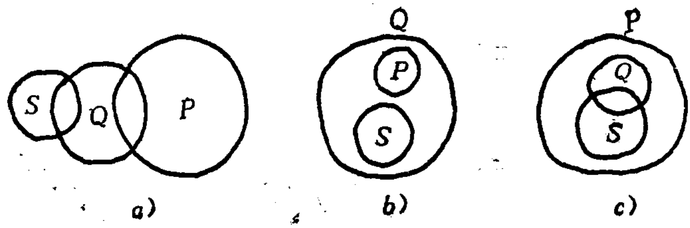

图 5

6. X是正多边形的集合，Y是四边形的集合，M是矩形的集合. 确定这些集合之间所存在的关系，并用欧勒圆表示它们.

7. M是满足底边上的高是底边的平分线这一条件的三角形的集合，K是等边三角形的集合，L是等腰三角形的集合，P是所有的高相等的三角形的集合.

集合M，K，L，P中有没有两两相等的集合?

8. 指出下列集合中哪些是相等的：

$A=\{x \mid x\in\mathbf{Z},\ 0<x<4\}$;

$B=\{x \mid x\in\mathbf{Z},\ 0<x\leqslant 4\}$;

$C=\{3,\ 1,\ 2\}$;

$D=\{x \mid x\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant x\leqslant 4\}$;

$E=\{x \mid x\in\mathbf{Z},\ 0<x\leqslant 3\}$;

$F=\{x \mid x\in\mathbf{Z},\ 1\leqslant x\leqslant 3\}$.

9. 解下列方程：a) $(2x-4)(7-x)=0$;
b) $x^2-9x+14=0$; c) $x(2-x)(3x-21)=0$.

指出根集相等的方程. 这样的方程叫做什么方程?

10. 给定集合：$A=\{a,\ b,\ c,\ d\}$; $B=\{a,b,$

4 }; $C=\{4, 2, c\}$; $D=\{a, b, 3\}$; $E=\{1, b\}$. 已知：$B\subset A$, $C\subset A$, $D\subset A$, $E\subset B$. 求a, b, c, d的值.

11. 指出下列命题中哪些为真：

a) $\{m, n\}\subset\{\{m, n, k\}, \{m, k\}, m, n\}$;

b) $\{m, n\}\in\{\{m, n, k\}, \{m, k\}, m, n\}$;

c) $\{m, k\}\in\{\{m, n, k\}, \{m, k\}, m, n\}$.

12 从非负整数集Z_0中分出以下各子集：

X是一位数的集合；Y是合数的集合；P是奇数的集合.

图 6 中哪一幅图是表示这些集合的？

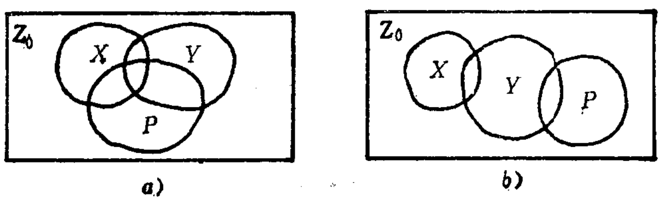

图 6

§3 集合的运算

对集合可实行并、交、差、笛卡儿乘积等运算.

那些属于集合A或者属于集合B的元素构成的集合称为集合A和集合B的并集，记为$A\cup B$，也就是$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$.

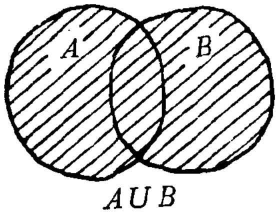

图 7

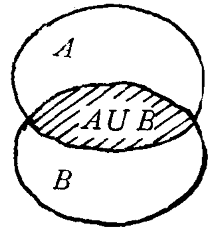

图 8

用欧勒圆表示集合A和B的并集如图 7 所示。

那些既属于集合A又属于集合B的元素构成的集合称为集合A和B的交集，记为$A\cap B$，也就是$A\cap B=\{x\mid x\in A$且$x\in B\}$。

用欧勒圆表示集合A和B的交集如图 8 所示。

关于集合的并与交，下列运算定律成立：

1. 并与交是可交换的，即对于任意的集合 A 和 B，有：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

2. 并与交满足结合律，即对于任意的集合A，B和C，有：

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

3. 并关于交满足分配律，交关于并满足分配律，即对于任意的集合A，B和C，有：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

集合A中不属于集合B的元素构成的集合称为集合A和集合B的差集，记为$A\setminus B$，也就是$A\setminus B=\{x\mid x\in A$且

$x \notin B\}$。例如，集合$A=\{a, b, c, k, m\}$，$B=\{a, b, d, e\}$，那么$A\setminus B=\{c, k, m\}$，$B\setminus A=\{d, e\}$。

利用欧勒圆表示集合A和B的差集如图9所示。

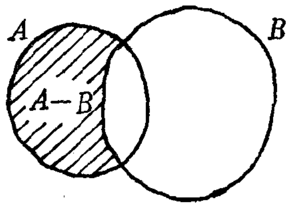

图 9

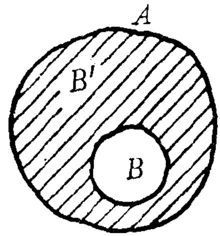

图10

如果$B\subset A$，则集合A和B的差集称为集合B在集合A内的余集，记为B'（或B_A'）。图10中划斜线的部分就是集合B'。

例 1　已知集合$A=\{m, k, l, n\}$，$B=\{m, n, p, t, y\}$。求$A\cup B$，$A\cap B$，$A\setminus B$。

解　$A\cup B=\{m, k, l, n, p, t, y\}$，

$A\cap B=\{m, n\}$，$A\setminus B=\{k, l\}$。

例 2　证明对于任意的集合A，B和C，等式 $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$成立。

解　设$x\in A\setminus(B\cup C)$。这时，根据差集的定义，$x\in A$又$x\notin(B\cup C)$，也就是$x\notin B$同时$x\notin C$。因为$x\in A$又$x\notin B$，所以$x\in A\setminus B$，因为$x\in A$又$x\notin C$，所以$x\in A\setminus C$。于是，根据交的定义，有$x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$。这就是说，如果元素$x$属于集合$A\setminus(B\cup C)$，

那么它也属于集合 $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$。

设 $y\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$。这时，根据交的定义，$y\in A\setminus B$ 同时 $y\in A\setminus C$。根据差的定义，由 $y\in A\setminus B$，得到 $y\in A$ 又 $y\notin B$，由 $y\in A\setminus C$，得出 $y\in A$ 又 $y\notin C$. 因为 $y\notin B$ 同时 $y\notin C$，所以根据并的定义，$y\notin B\cup C$，这就是说，$y\in A\setminus(B\cup C)$。这样一来，如果元素 y 属于集合 $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$，那么它也属于集合 $A\setminus(B\cup C)$。

于是，已经确定了每个属于集合 $A\setminus(B\cup C)$ 的元素属于集合 $(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$，反之亦然. 由此说明，对于任意的集合 A，B 和 C，等式 $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ 成立。

取前一个分量属于集合 A，后一个分量属于集合 B 的一对元素，所有这样的对偶构成的集合称为集合 A 和 B 的笛卡儿乘积，记为 $A\times B$。也就是 $A\times B=\{(a,b)\mid a\in A, b\in B\}$。

例 3 列出集合 $A=\{3,4,5\}$，$B=\{1,2,6,7\}$ 的笛卡儿乘积的元素.

解 这样一些有序数对是集合 A 和 B 的笛卡儿乘积的元素，这些数对中的前一个数属于集合 A，后一个数属于集合 B。于是 $A\times B=\{(3,1),(3,2),(3,6),(3,7),(4,1),(4,2),(4,6),(4,7),(5,1),(5,2),(5,6),(5,7)\}$.

例 4 如果

a) $X=\{x\mid x\in\mathbf{N},\ 2\leqslant x\leqslant 5\}$,

$Y=\{y\mid y\in\mathbf{N},\ 1\leqslant y\leqslant 3\}$;