潜科学丛书

QIAN KE XUE CONG SHU

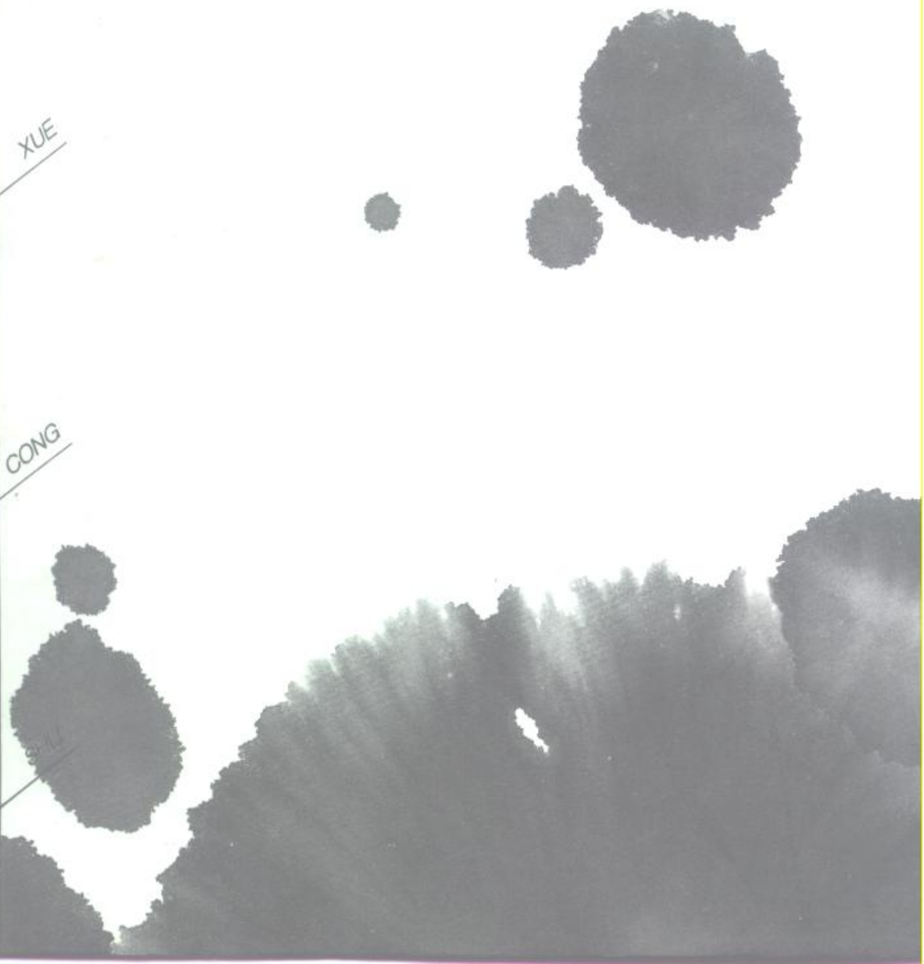
QIANKEXUE CONGSHU

数学猜想集

SHUXUE CHIXIANGJI

□ 徐本顺　解恩泽/编著

□ 湖南科学技术出版社



潜科学丛书

数 学 猜 想 集

□ 徐本顺　解恩泽/编著

□ 湖南科学技术出版社

潜科学丛书
数学猜想集
编　　著：徐本顺　解恩泽
责任编辑：曾平安　张玉纲
出版发行：湖南科学技术出版社
社　　址：长沙市展览馆路 66 号
印　　刷：湖南省新华印刷二厂
厂　　址：邵阳市双坡岭
邮　　编：422001
(印装质量问题请直接与本厂联系)
经　　销：湖南省新华书店
出版日期：1998 年 5 月第 2 版第 2 次
开　　本：850mm × 1168mm　1/32
印　　张：8.25
插　　页：4
字　　数：213000
印　　数：1301—4600
征订期号：京所科技新书目 433—228
书　　号：ISBN 7—5357—0654—1/O·73
定　　价：15.50 元

总　　序

1979年11月，在中国大地上诞生了“潜科学”这一新概念。作为一门学科，“潜科学”学一方面要研究创新性的科学技术思想胚胎从潜到显的内部孕育过程的基本规律，以寻求最大限度发挥人们科学创造潜力的途径；另一方面要研究新观点、新学说，从提出、传播、鉴别和检验进入科学殿堂的外部成长过程的基本规律，以确定使新理论顺利成长的适宜条件。作为一项事业，“潜科学”将利用刊物、年鉴、学术讨论和科学基金等多种手段，积极发掘富有开拓精神和创造才能的科技人才，热情扶持已经萌发的新思想、新学说的成长，帮助它们冲破种种障碍，为科学百花园不断增添新的奇葩，推动学术上的自由探讨和繁荣。

现代科学技术的各个部门都在加速向前发展，随着每一个领域里的惊人进步，在人们面前展现出愈来愈广阔的未知世界。传统观念和理论受到有力的冲击和挑战，层出不穷的新课题激励着

人们去探索；现代技术的突破性进展，使新技术革命的浪潮席卷全球，正在引起生产组织、产业结构和社会生活的重大变革。在这种形势下，积极推动潜科学理论的研究和潜科学事业的发展，特别是推动那些具有潜科学价值和未来意义的开发性探索，更是有特殊意义的。

为了促进这一新兴学科的成长，推动这一新生事业的发展，由“中国潜科学研究会”与《潜科学》杂志社共同组织，并系统地编写一套“潜科学丛书”。旨在通过对科学技术发展中大量个例的剖析，从不同的侧面和角度，揭示科学技术更替变革的历史足迹，概括出某些共同的带规律性的东西，以总结经验，吸取教训，为新思想、新观点、新假说、新理论的孕育和成长摇旗呐喊，鸣锣开道。

“潜科学丛书”是一套带有学术性、探索性、哲理性和趣味性的文集。我们要求每篇文章史料要翔实，科学内容要准确，观点要鲜明，力求作到文献性、科学性和思想性的统一，为进一步的深入研究提供启示。

这套丛书，自1986年以来，先后出版了《科学史上的重大争论集》、《科学蒙难集》、《科学发现个例分析》、《技术发明个列分析》、《数学猜想》、《科学前沿疑难与展望》六本。受到了国内外读者的好评，1996年获全国优秀科普读物三等奖。许多读者希望这套丛书能重新出版。为了不辜负读者的厚爱，我们将已出版的六本书作了重新修订，书名改为《科学争论集》、《科学蒙难集》、《科学发现集》、《技术发明集》、《数学猜想集》、《科学前沿集》，另外精编增补了《科学悖论集》和《科学问题集》两本，一套总共八本，奉献给读者。

当前，正是大力倡导“科教兴国”之时，这套丛书重编再版其意义更为深远，我们可以从这套丛书中，找到更多的科学技术发展的潜在规律，以促进我国科学技术的更快发展。

这套丛书的编写，是一个有益的尝试。我们希望吸引、动员

更多具有创新精神和见解的潜科学事业的支持者投入这套丛书的编写工作，不断扩大范围，丰富内容和提高质量，在推进科学技术事业的发展中，起到它的一点作用。

目　　录

序

加强潜科学的理论研究，不仅要结合历史资料对潜科学的基本形态作概括性的分析，而且更要对其基本形态中的具体表现作深入的探讨，从中发现规律性的东西，使潜科学学的学科体系建立在更坚实的基础之上。这本书，正是本着这样的想法写成的。

所谓数学猜想，是指根据某些已知的事实材料和数学知识，对未知的量及其关系所作出的一种预测性的推断。它既有一定的科学性，又有某种假定性，是科学性与假定性的辩证统一。一般说来，这种推断是数学中难度较大的问题。数学猜想不仅是数学研究的一个科学方法和数学发展的一种重要形式，而且还是科学猜测这种潜科学基本形态在数学中的具体表现。因此，对它进行考察和分析，必将促进潜科学理论研究的深入开展。

本书的重点是分析和阐述数学猜想的思想与方法。全书共有九个部分，从内容上可分为两大类：第一类是对数学猜想的典型事例进行历史考察与思想剖析（一、二、三、四、五）；第二类

是就数学猜想的产生、演变、判定、类型、特征和意义等，作综合性的分析和论述（六、七、八、九）。为了更系统地了解数学发展史上著名数学猜想的研究状况，我们特编制了《数学猜想一览表》，作为〔附录〕载于书后，仅供参考。在写作中，我们力图资料准确、史实具体、观点鲜明、重点突出，在揭示“潜”的实质与规律性上下功夫。

数学猜想大都是专业性很强的数学难题，写作中遇到的最大困难就是通俗化的问题。我们虽作了很大的努力，但也难满足广大读者的需要。

在写作过程中，我们参考和引述了国内外许多重要文献。特别是华罗庚、王元、陈景润、柯召、孙琦、潘承洞、潘承彪、闵嗣鹤、刘彦佩、冯克勤等我国著名数学家和学者的有关论著，对我们有很大的启发和帮助。

李迪教授对本书的写作给予了许多支持，姚俊梅、徐炎章参加了本书的部分编写工作，这里，一并致谢。

写这样的书，对我们来说还是一个尝试。限于我们的水平及问题本身的难度，不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

徐本顺　解恩泽

一、源远流长

——从勾股定理到费尔马大定理

17 世纪，法国数学家彼埃尔·德·费尔马(Pierre de Fermat，1601—1665）曾宣称他证明了：当整数 n 大于 2 时，不存在一个整数 n 次幂是另外两个整数 n 次幂之和。三个世纪以来，虽然许许多多数学家试图证明它，但始终没有成功。费尔马当时是一位法官，并非职业数学家，居然以他的“定理”难住了三个世纪以来的优秀数学家，这种思想真是太微妙了！这个问题看来似乎很简单，只要有初中水平的数学知识，就不难理解所提出的问题，但为了证明它，却吸引了千千万万个数学爱好者。他们一代又一代，前赴后继，有的甚至为之献出毕生精力，但均未达到最终目的。这个困惑人们三百多年的“大定理”，直至 1993 年才被英国数学家安德鲁·维尔斯攻克。我们简略地回顾一下人们研讨这个问题的历史过程及其所获得的成果，无疑对我们进一步解决这个问题，以及增强提出问题和解决问题的能力是会有一定的后发作用的。

（一）从勾股三角形谈起

早在3500年以前，巴比伦人就知道三边为下列各数的一些三角形为直角三角形：

120,	119,	169;
3456,	3367,	4825;
4800,	4601,	6649;
13500,	12709,	18541;
72,	65,	97;
360,	319,	481;
2700,	2291,	3541;
960,	799,	1249;
600,	481,	769;
6480,	4961,	8161;
60,	45,	75;
2400,	1679,	2929;
240,	161,	289;
2700,	1771,	3229;
90,	56,	1060。

然而，当时为什么列出这些三角形，现在还是个谜。

在3000年以前，中国已经知道用边长为3，4，5的直角三角形来进行测量。中国最古老的一本天文数学书《周髀算经》一开头就有周公问商高："天不可阶而升，地不可得尺寸而度。"商高讲："勾广三，股修四，经隅五。"① 其意是天的高度和地面上的一些测量的数字是怎样得到的呢？这可用边长为3，4，5的直角三角形来测算。在《周髀算经》卷上之二，荣方、陈子问答

① 钱宝琮校点，算经十书（上册），中华书局，1963年，第13页。

中，陈子讲道："勾股各自乘，并而开方除之"，① 用现代的数学符号表示，就是

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

其中，a，b 是三角形的直角边，c 为其斜边。可见，陈子已经知道一般的勾股定理。约公元 222 年，赵君卿为《周髀算经》注释时，对勾股定理作了理论证明。

勾股定理，西方称为毕达哥拉斯定理。毕达哥拉斯(Pythagoras，古希腊人，约前 572—前 500 年）于公元前 572 年左右出生在爱琴海的萨摩斯岛。据说，他从师于泰勒斯，可能还游历过埃及、巴比伦。他在意大利南部的希腊油港克罗托内创办了著名的毕达哥拉斯学校。这个学校不仅研究哲学、数学，而且发展成了一个有秘密仪式和盟约的帮会式的团体。由于该团体除了搞学术活动外，还参与政治活动，同当时的贵族党结成联盟，因此南意大利的民主力量摧毁了学校的建筑并迫使该团体解散。据传，毕达哥拉斯于公元前 500 年左右被害于梅塔庞通。他的弟子则分散到其他的学术中心去了。该团体虽然形式上不存在了，但这个学派实际上继续存在至少两个世纪之久。该学派的学术思想和成就影响十分深远。由于该团体所有发现都归功于毕达哥拉斯，因此现在很难确切知道那项发现应归功于学派中哪一个人了，毕达哥拉斯的学术成就是集体智慧的产物。

"万物皆数"② 是毕达哥拉斯学派对宇宙和事物的本质认识。他们认为整数是人和物质的各种各样性质的起因。在这种哲学思想的指导下，就导致他们对于数的性质的阐述和探讨。因此，把几何问题与算术紧密结合起来研究，就成为毕达哥拉斯学派的很自然的事情了。3，4，5 为边的直角三角形三边皆为整数，这种三条边为整数的直角三角形称为勾股三角形，或者叫做毕达哥拉

---

① 钱宝琮校点，算经十书（上册），中华书局，1963 年，第 27 页。

② M·克莱因著，张理京、张锦炎译，《古今数学思想》（第一册），上海科学技术出版社，1979 年，第 168 页。

斯三角形。把所有的勾股三角形都找出来就等价于求下列不定方程

$$x^2+y^2=z^2$$

的所有正整数解，于是，一个几何问题就转化为一个数论中的不定方程求解问题。

（二）勾股数

如果正整数 x，y，z 能满足下列不定方程

$$x^2+y^2=z^2, \tag{1}$$

则它们叫做勾股数。

求出（1）的所有正整数解，也就是求出（1）的所有勾股数。

为了解决这个初等数论中的著名问题，我们再观察几个简单的勾股三角形：

3,	4,	5;
5,	12,	13;
7,	24,	25;
9,	40,	41;
11,	60,	61;
……		

观察这些数，可发现如下规律：

第一个数是奇数，第二个数是第一个数的平方减 1 再除以 2，第三个数是第二个数加 1，也是第一个数的平方加 1 再除以 2，即设 m 为奇数，则一般有

$$m, \ \frac{m^2-1}{2}, \ \frac{m^2+1}{2}。$$

于是有

$$m^2+\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2, \tag{2}$$

其中 m 为奇数。

一般认为毕达哥拉斯已发现了公式（2）[①] 不过公式（2）只给出一部分勾股数。

（2）式两边同乘上 4，再变形，得

$$(2m)^2+(m^2-1)^2=(m^2+1)^2。\tag{3}$$

显然（3）式不论 m 是奇数还是偶数，等式都成立。古希腊哲学家、数学家柏拉图（Plato，约公元前 430—约公元前 349），于公元前 380 年给出了公式（3），其中 m 为奇数或偶数。

显然公式（2）与（3）均不能给出全部的勾股三角形。实际上，如果以 a，b，c 为边的直角三边形为勾股三角形，那么，对于任意自然数 n，以 na，nb，nc 为边的三角形也必定是勾股三角形。

在公式（3）中，m 为任意自然数，1 是一个特殊的自然数，由特殊到一般，若 1 也变成任意自然数，比如变成 n^2，是否能给出所有的勾股三角形呢？把 1 变成 n^2，为了使（3）式保持恒等，（3）中的第一项$(2m)^2$ 应变成$(2mn)^2$，即有

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2。$$

显然，当 $m=n$ 时，就不能得到三角形，更谈不上勾股三角形了，因此，需要对 m，n 作些限制。

大约公元 3 世纪，亚历山大里亚的丢番图（Diophantus，约 246—330）给出一个方法，可得到全部的勾股三角形。具体可叙述如下。

如果（1）式有正整数解，且满足$(x,y)=d>1$，则由 $d^2|x^2$[②]，$d^2|y^2$，得

$$d^2\mid(x^2+y^2)。$$

而 $x^2+y^2=z^2$，所以 $d^2|z^2$。故有

---

① M·克莱因著，张理京，张锦炎译：《古今数学思想》（第一册），上海科学技术出版社，1979 年，第 36 页。

② 设 a，b 为二整数且 $b\neq0$，若 b 整除 a，记为 $b|a$；b 不整除 a，记为 $b\nmid a$。