# 高等工科数学

陈 雄 南 主编

2

上 海 科 学 技 术 文 献 出 版 社

# 高等工科数学

## 第二册

## 多元微积分

陈雄南　主编

曹助我　洪继科
韩仲豪　孙建华　编

上海科学技术文献出版社

**高等工科数学**

（第二册）

多元微积分

陈雄南　主编

*

上海科学技术文献出版社出版发行

（上海市武康路2号）

全国新华书店经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 787×1092 1/32　印张 16.625 字数 399,000

1990年7月第1版　1990年7月第1次印刷

印数：1—10,000

ISBN 7-80513-636-X/O·47

定价：5.90元

《科技新书目》222-344

# 前　　言

在上海高校工科数学协作组的亲切关怀下，我们着手编写了这套《高等工科数学》系列教材。我们的指导思想是，要着重体现工科数学课程教学基本要求和近代工程技术特点，强调专业需要和现代计算，在内容的精简、更新和能力的培养方面作出努力。至于在教材体系方面暂不作较大的更动，希望在今后的教学实践中，和大家共同探索。

全书分若干册出版，它们是一元微积分，多元微积分，线性代数，概率统计方法，数学物理方法及部分应用数学课程内容。供普通高校和成人高校工科学生学习用，也可作为广大工程技术人员自学参考。本书为第二册，主要介绍多元微积分。书中除常见内容外，还考虑到各工程专业的不同要求，把矢量分析与场论、傅里叶级数以及含参变量积分作分章处理，在教学上确有其方便之处。

本册由陈雄南主编，曹助我（上海海运学院）、洪继科（上海技术师范学院）、韩仲豪（上海建材学院）、孙建华（上海铁道学院）分工写出初稿。经多次反复讨论修改后，由陆子芬教授主审定稿。

限于编者水平，书中谬误难免，敬请不吝指教。

一九八八年十二月

# 目　　录

# 第一章　空间解析几何

平面解析几何的知识对学习一元微积分是不可缺少的．同样，空间解析几何的知识对学习多元微积分也是必要的。

本章首先建立空间直角坐标系，并引进在工程技术上有着广泛应用的矢量，介绍矢量的一些运算，然后以矢量为工具来讨论空间的平面和直线，最后介绍空间曲面和空间曲线的部分内容。

## §1　空间直角坐标系

### 一、空间点的直角坐标

为了沟通空间图形与数的研究，我们需要建立空间点与有序数组之间的联系。这种联系通常是用类似于平面解析几何的方法通过引进空间直角坐标系来实现的。具体讨论于下。

过空间一个定点 $O$，作三条互相垂直的数轴，它们都以 $O$ 为原点且一般具有相同的长度单位。这三条轴分别叫做 $x$ 轴或横轴、$y$ 轴或纵轴、$z$ 轴或竖轴；统称坐标轴。通常把 $x$ 轴和 $y$ 轴配置在水平面上，而 $z$ 轴则是铅垂线；它们的正方向要符合右手规则，即以右手握住 $z$ 轴，当右手的四个手指从正向 $x$ 轴以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向正向 $y$ 轴时，大拇指的指向就是 $z$ 轴的正向(图 1-1)。这样的三条坐标轴就组成一个空间直角坐标系 $Oxyz$。

$O$ 点叫做坐标原点，简称原点。

三条坐标轴中的任意两条可以确定一个平面。这样定出的

三个平面统称为坐标面。例如，由 $x$ 轴及 $y$ 轴所确定的坐标面称为 $xOy$ 面，等等。三个坐标面把空间分成八个部分，每一部分叫做卦限（图 1-2）。如，含有正向 $x$ 轴、正向 $y$ 轴、正向 $z$ 轴的那个卦限是第Ⅰ卦限；然后沿逆时针方向，由上到下地确定第Ⅱ、Ⅲ、…、Ⅷ卦限。

取定了空间直角坐标系后，就可以建立起空间点与有序数组之间的对应关系。

设 $P$ 为空间中一已知点。我们过 $P$ 点作三个平面分别垂直于 $x$ 轴、$y$ 轴和 $z$ 轴，它们与 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴的交点依次为 $A$，$B$，$C$（图 1-3）。这三点在 $x$ 轴、$y$ 轴、$z$ 轴上的坐标依次为 $x=OA$，$y=OB$，$z=OC$。于是空间的一点 $P$ 就唯一地确定了一个

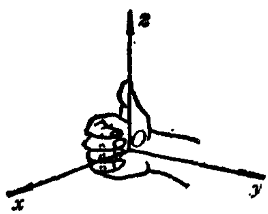


图 1-1

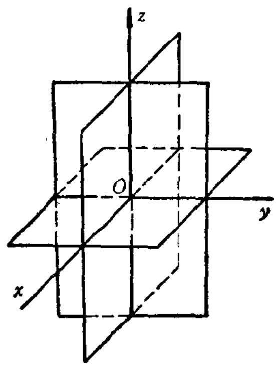


图 1-2

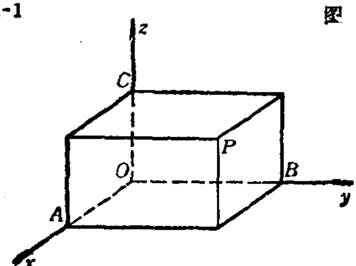


图 1-3

有序数组$x, y, z$。这组数$x, y, z$就叫做$P$点的坐标，并依次称$x, y, z$为$P$点的横坐标、纵坐标和竖坐标。坐标为$x, y, z$的点$P$记作$P(x, y, z)$。

反过来，已知一有序数组$x$、$y$、$z$，我们可以在$x$轴上取坐标为$x$的点$A$，在$y$轴上取坐标为$y$的点$B$，在$z$轴上取坐标为$z$的点$C$，然后通过$A$，$B$，$C$三点分别作$x$轴、$y$轴与$z$轴的垂直平面。这三个垂直平面的交点$P$便是以有序数组$x, y, z$为坐标的点(图1-3)。

这样，通过空间直角坐标系，我们就建立了空间的点$P$和有序数组$x$、$y$、$z$之间的一一对应关系。

每个卦限中的点，其坐标各有一定的特征。如下表所示：

| 卦　限 | $x$ | $y$ | $z$ | 卦　限 | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Ⅰ | + | + | + | Ⅴ | + | + | - |
| Ⅱ | - | + | + | Ⅵ | - | + | - |
| Ⅲ | - | - | + | Ⅶ | - | - | - |
| Ⅳ | + | - | + | Ⅷ | + | - | - |

## 二、空间两点间的距离

设$P_1(x_1, y_1, z_1)$、$P_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点。为了用两点的坐标来表达它们间的距离$d$，我们过$P_1$，$P_2$各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面。这六个平面围成一个以$P_1P_2$为对角线的长方体(图1-4)。

由于$\triangle P_1QP_2$为直角三角形，$\angle P_1QP_2$为直角，所以$d^2=|P_1P_2|^2=|P_1Q|^2+|QP_2|^2$。又$\triangle P_1AQ$也是直角三角形，且$|P_1Q|^2=|P_1A|^2+|AQ|^2$，所以

$$d^2=|P_1P_2|^2=|P_1A|^2+|AQ|^2+|QP_2|^2$$

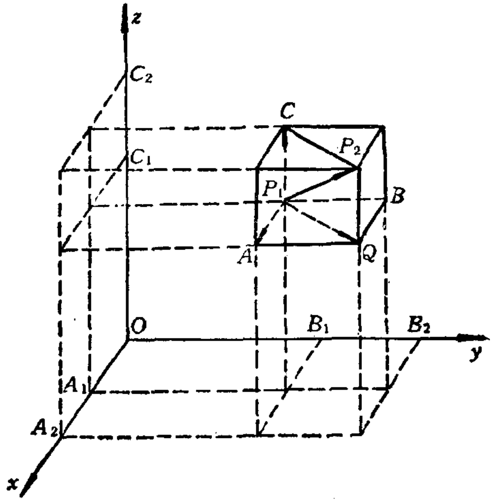


图 1-4

而由于

$$|P_1A| = |A_1A_2| = |x_2 - x_1|,$$

$$|AQ| = |B_1B_2| = |y_2 - y_1|, \quad |QP_2| = |C_1C_2| = |z_2 - z_1|$$

所以

$$d = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式。

特殊地，点 $P(x, y, z)$ 与坐标原点 $O(0, 0, 0)$ 的距离为

$$d = |OP| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**例 1** 求证以 $M_1(4, 3, 1)$、$M_2(7, 1, 2)$、$M_3(5, 2, 3)$ 三点为顶点的三角形是一个等腰三角形。

**解** 因为

$$|M_1M_2|^2 = (7-4)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2 = 14$$

$$|M_2M_3|^2 = (5-7)^2 + (2-1)^2 + (3-2)^2 = 6$$

$$|M_3M_1|^2 = (4-5)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2 = 6$$

所以 $|M_2M_3|=|M_3M_1|$，即 $\triangle M_1M_2M_3$ 为等腰三角形。

**例2** 在 $z$ 轴上求与两点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点。

**解** 因为所求点在 $z$ 轴上，所以不妨设该点为 $M(0, 0, z)$。依题意有 $|AM|=|MB|$，即

$$\sqrt{(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2}$$
$$=\sqrt{(3-0)^2+(5-0)^2+(-2-z)^2}$$

两边去根号，解得

$$z=\frac{14}{9}$$

因此，所求点为 $M\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$。

## 习 题 1-1

1．在空间直角坐标系中，定出下列各点的位置：

$A(1,2,3)$，　$B(-2,3,4)$，　$C(2,-3,-4)$，　$D(3,4,0)$，

$E(0,4,3)$，　$F(3,0,0)$。

2．若有以下情形时，则点 $P(x,y,z)$ 的轨迹如何？

(1) $x=0$；　　(2) $y=0$；　　(3) $z=0$；

(4) $x=y=0$；　　(5) $y=z=0$；　　(6) $z=x=0$；

(7) $x=y=z$；　　(8) $x=y, z=0$；　　(9) $x=z$。

3．设 $(0,0,0)$ 与 $(3,6,7)$ 为长方体对角线的两端．求作此长方体，它的诸棱或在坐标面内或与坐标面平行。

4．试求以下各点 $(a>0, b>0, c>0)$：

$A(a,b,c)$，$B(a,b,-c)$，$C(a,-b,c)$，$D(-a,b,c)$，$E(-a,-b,c)$，$F(-a,b,-c)$，$G(a,-b,-c)$，$H(-a,-b,-c)$

(1) 与原点之距离；

(2) 与坐标轴之距离；

(3) 诸点中哪对点对称于坐标面；

(4) 哪对点对称于坐标轴？

(5) 哪对点对称于原点？

5. 求下列各对点之间的距离：

(1) $(0,0,0)$，$(2,3,4)$；　　(2) $(4,-2,3)$，$(-2,1,3)$.

6. 求点 $M(4,-3,5)$ 与原点及各坐标轴间的距离.

7. 试证以三点 $A(4,1,9)$，$B(10,-1,6)$，$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

8. 在 $yOz$ 平面上，求与三已知点 $A(3,1,2)$、$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点.

## §2　矢量及其线性运算

最简单的量是在取定单位后就可以用一个实数来表示，例如距离、时间、体积、质量、温度等，这种只有大小的量称为数量. 另外还有一些量，它们不但有大小并且还具有方向，例如位移、速度、力等，这种量虽然不同于数量，但是也具有与数量相似的运算规律. 掌握了这些规律就能更直接地解决某些具体问题.

### 一，矢量概念

最简单的运动是一个质点的位移，它沿着一个确定的方向移动一段距离. 人们在指定位置的时候就经常利用位移的概念，如从 $A$ 地向东北方走 15 km 就到达 $B$ 地；又如目标在正前方 300m 处，所指的就是位移. 显然位移是一种既有大小(距离)又有方向的量.

象位移这样的量是很多的，例如力、加速度、角速度、力矩、电场强度等，它们虽然具有不同的力学或物理的内容，但都是既有大小又有方向的量，和位移一样. 于是就有必要把这种量的共同特点抽象出来作为统一研究的对象. 因此，数学上把既有大小又有方向的量称为矢量或向量.

矢量的特征是大小和方向，几何上，往往用一条有方向的线

段，即有向线段来表示。有向线段的长度 $|AB|$ 表示矢量的大小，有向线段的方向表示矢量的方向。

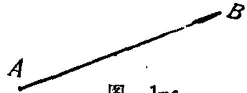

图 1-6

而以 $A$ 为始点、$B$ 为终点的有向线段所表示的矢量，记为 $\overrightarrow{AB}$（图 1-5）。有时也用一个粗体字母或用一个上面加箭头的字母来表示矢量，例如矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{F}$ 或 $\vec{a}$、$\vec{i}$、$\vec{v}$、$\vec{F}$ 等。

矢量的大小叫做矢量的模。矢量 $\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{a}$，$\vec{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$，$|\boldsymbol{a}|$，$|\vec{a}|$。模等于 1 的矢量 $\boldsymbol{e}$ 叫做单位矢量。模等于零的矢量叫做零矢量，记作 $\boldsymbol{0}$ 或 $\vec{0}$。零矢量的方向可以看作是任意的。在直角坐标系中，以原点 $O$ 为始点，向一个点 $M$ 引矢量 $\overrightarrow{OM}$，这个矢量叫做 $M$ 点的矢径，它常记作 $\boldsymbol{r}$。

在实际问题中，有些矢量与其始点有关，有些矢量与其始点无关。由于一切矢量的共性是它们都有大小与方向，所以在数学上我们只研究与始点无关的矢量，并称这种矢量为自由矢量（简称矢量），即只考虑矢量的大小和方向，而不论它的始点在什么地方。当遇到与始点有关的矢量（例如，某一质点的运动速度）时，可在一般原则下作特别处理。

由于我们只讨论自由矢量，所以如果两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，又互相平行，且指向相同，我们就说矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是相等的，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$。这就是说，经过平行移动后能完全重合的矢量是相等的。

## 二、矢量加减法

接连两次位移合起来也是一个位移。从点 $O$ 位移到点 $B$，再从点 $B$ 位移到点 $C$，合起来就是从 $O$ 到 $C$ 的位移，合成的方法可以用三角形来表示（图1-6）。一般地，我们规定的加法运算如下：

作矢量 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 $\overrightarrow{OB}$ 的终点 $B$ 为起点作 $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，连接

$OC$，就得 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$. 这一方法叫做矢量加法的三角形法则。

根据力学上实验的结果，我们可以得到求两力的合力的平行四边形法则（图 1-6）。由于平行四边形的对边平行且相等，所以从图 1-6 可以看出这两种法则的结果是相同的。

矢量的加法符合下列运算规律：

1° 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

2° 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.（图1-7）

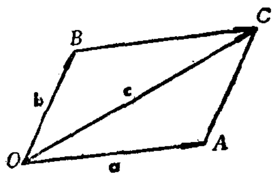


图 1-6

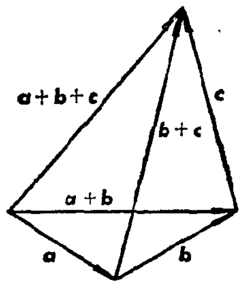


图 1-7

多个矢量的和可以用折线一次作出：

$$\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\cdots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\overrightarrow{A_0A_n}$$

这是求合力的几何方法。

设 $\boldsymbol{a}$ 为一矢量．与 $\boldsymbol{a}$ 的模相同而方向相反的矢量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负矢量，记作 $-\boldsymbol{a}$（图 1-8）．由此，我们规定两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差（图 1-9）：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

特殊地， $$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$$

虽然矢量加减法的运算规律和实数加减法是一样的，但是绝不能把矢量和实数混同起来。

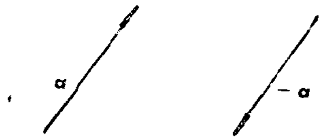


图　1-8

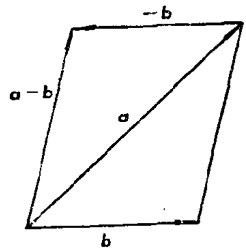


图　1-9

由于方向是不能比较大小的，所以 $\boldsymbol{a}<\boldsymbol{b}$ 是没有意义的．而矢量的模是实数，故矢量的模可以比较大小．关于模和加减法的关系，有三角不等式：

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$$

## 三、矢量与数量的乘法

最简单的位移过程是直线上的连续运动，例如弹簧的伸缩，只有位移大小的改变和方向的反转．大小的改变可以用倍数来表示，而方向的反转可以用正负号来表示．由此引出数乘矢量的概念：实数 $\lambda$ 与矢量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个矢量，其长度为

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

$\lambda\boldsymbol{a}$ 的方向当 $\lambda>0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相同；当 $\lambda<0$ 时与 $\boldsymbol{a}$ 相反．(图1-10)当然，当 $\lambda=0$ 时 $\lambda\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$．

显然，

$$1\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\ (-1)\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$$

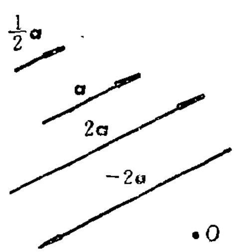


图　1-10

矢量与数量的乘积符合下列运算规律：

1° $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

这是因为矢量 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})$，$\mu(\lambda\boldsymbol{a})$，$(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ 都是平行矢量(或者说是共线