可靠性与质量管理丛书

产品寿命分析方法

费鹤良 王玲玲 编著

KEKAOXING YU ZHILIANG
GUANLI CONGSHU

可靠性与质量管理丛书

产品寿命分析方法

费鹤良　王玲玲　编

国防工业出版社

内容简介

本书介绍根据寿命试验或加速寿命试验得到的寿命数据对产品的寿命进行统计推断的方法。以介绍方法为主，举例则是为了说明方法如何使用，对数学推导则从简或从略。

由于本书介绍了常用的各种寿命数据分析的方法（包括国内外在这方面的最新标准与成果），所以也是一本可靠性分析的手册性工具书。本书包括了《可靠性试验用表》（国防工业出版社一九七九版）的全部数表的原理及用法，所以又是一本与《可靠性试验用表》配套的书。此外，本书还增加了新发表或新算出的原理、用法及数表。

本书为从事可靠性工作或质量管理工作的人员提供了对数据进行统计分析的知识，对于科研和教学人员也有参考价值。

可靠性与质量管理丛书
产品寿命分析方法
费鹤良　王玲玲　编
*
国防工业出版社出版
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售
国防工业出版社印刷厂印刷
*
850×1168 1/32　印张 9 1/8　241千字
1988年6月第一版　1988年6月第一次印刷　印数：0,001—6,000册
ISBN 7-118-00038-8/F4　定价：2.75元

出 版 说 明

“企业的技术开发工作要特别重视新产品试制、中间试验、生产性试验以及解决工业化生产中的质量、可靠性、经济性、成品率等一系列工艺和设备问题”。（《中共中央关于科学技术体制改革的决定》1985年3月13日）

产品的可靠性是产品质量的重要组成部分。质量与可靠性是国内及国外市场竞争中能否胜利的决定因素。质量及可靠性要从产品的设计、试制抓起，把质量与可靠性设计到产品中去、贯彻在从试制、试验、生产到使用的各个阶段中。提高产品的质量和可靠性将给研制生产单位带来巨大的经济效益，也带来巨大的社会效益。鉴于国内还没有全面地从各个专题方面介绍可靠性及质量管理方面的著作，本社特委托何国伟同志组织国内有关方面的专家，编著了这套《可靠性与质量管理丛书》，并由何国伟同志担任本丛书的主编。本丛书的目的在于培养可靠性工程和全面质量管理的专业人材，以保障和提高产品质量。

本丛书适用于大专以上的工程技术人员和管理人员，主要用于在职教育，也可供大专院校教学参考。

前　言

可靠性作为产品质量的一个重要组成部分，已为大家所理解。根据寿命试验所得数据，或者根据现场收集到的数据来评价产品的可靠性是人们十分关心的问题。本书将结合可靠性中的实际问题着重介绍寿命数据统计分析中的常用而有效的方法，这些方法有的已有国际标准，有的是我国颁布的国家标准，有些方法是最新的研究成果。

全书力求精练、不拘泥于严格的数学推导，而着重讲清实际背景、基本概念和基本方法，读者根据书中的示范性例题，便可掌握基本内容，并应用于实际工作。本书介绍的方法在电子、机械、化工、建筑等方面均有广泛的应用，适用于从事可靠性工作的工程技术人员和实际工作者。

本书第一章介绍的寿命分布为指数分布的统计推断；第二、三章分别介绍的寿命分布为威布尔分布的统计推断和对数正态分布的统计推断，第四章是非参数统计推断。

由于编者水平有限，错误和不妥之处，肯请读者指正。

编　者

目　录

概　述

要定量地了解一批产品的可靠性水平，就必须要随机地从这批产品中抽取部分样品进行寿命试验，从而获得寿命数据。对不可修复产品，寿命T是指产品从开始工作到失效为止所经历的时间（Time to Failure)。而对可修复产品,寿命T往往是指无故障工作时间，即故障间隔时间（Time Between Failure)。如仅考虑首次故障前的一段时间，那末与不可修复产品的寿终时间是一致的。由于受种种随机因素的影响，产品的寿命T是一个随机变量，而通过对部分样品进行寿命试验所获得的数据，是随机变量T的若干个可能取值。在数理统计中，一批产品寿命的全体称为总体，其分布称为寿命分布，而部分样品进行寿命试验所获得数据称为样本。如何根据样本推断总体的可靠性指标，这是本书的任务。推断的方法可分两类：不管总体的寿命分布是什么类型，由寿命数据对总体的可靠性指标作推断，这类方法称为非参数统计推断方法（一般说来，这种方法的效率较低)；根据总体寿命分布的类型，譬如为指数分布、威布尔分布、对数正态分布，然后根据寿命数据对总体的可靠性指标作推断，这类方法称为参数统计推断方法。本书的重点是介绍参数统计推断方法，因为这类方法比较有效。最后一章将介绍一些非参数统计推断方法。

第一章　指数分布的统计推断

总体的可靠性指标，也就是评价一批产品可靠性的一些定量指标。作为基本概念，在第一节里将简略介绍几种常用可靠性指标(又称可靠性数量特征）的定义，及已知寿命T的寿命分布为$F(t)$时，如何求这些可靠性指标。

1.1　可靠性基本概念

产品开始工作到发生故障（失效）为止所经历的时间，称为寿命T。它是一个随机变量，不同的产品，不同的工作条件，寿命T取值的统计规律性是不同的。寿命T的取值规律往往可以用一个分布函数$F(t)$来描述。它表示产品在规定条件下，产品的寿命T不超过时间t的概率，或者说是产品在t时刻或t时刻前发生失效的概率，即

$$F(t)=P(T\leqslant t)\quad (t>0) \tag{1-1}$$

在可靠性中，寿命T的分布函数$F(t)$常称为失效分布函数或寿命分布函数，假如寿命T是一个连续型随机变量，则

$$F(t)=\int_0^t f(x)dx \tag{1-2}$$

$$F'(t)=f(t)\quad (t>0) \tag{1-3}$$

$f(t)$称为失效概率密度或概率密度函数。

1.1.1　可靠度及可靠寿命

定义：产品在规定的条件下，在规定的时间t内完成规定功能的概率称为产品的可靠度函数，简称可靠度，记为$R(t)$。

由于下列三个事件是等价的：

“产品在时间t内完成规定的功能”；

“产品在时间t内无故障”；

"产品的寿命T大于t"。

于是产品的可靠度$R(t)$可以看成是事件"$T>t$"的概率，即

$$R(t)=P(T>t) \tag{1-4}$$

当产品的寿命分布为$F(t)$时，

$$R(t)=P(T>t)=1-P(T\leqslant t)=1-F(t)$$

产品的可靠度$R(t)$是时间t的函数，产品在不同时间，它的可靠度是不同的。开始使用时，产品可靠度为1，随时间的增加，产品可靠度就越来越低（如图 1-1)，且有

$$\lim_{t\to\infty} R(t)=0$$

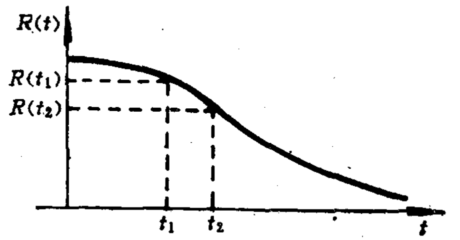

图 1-1

产品的可靠度告诉我们：产品在t时，能正常工作的概率是多少。而在实际工作中，有时要反过来问，为保证产品正常工作的概率达到某一常数R $(0<R<1)$，问产品可以工作到什么时间，即要根据等式

$$P(T>t)=R(t)=R$$

求相应的时间t，这个时间称为可靠寿命。

定义：设产品的可靠度为$R(t)$，使可靠度等于给定值R的时间$t_{(R)}$称为可靠寿命。即由

$$R(t_{(R)})=R \tag{1-5}$$

可解得可靠寿命$t_{(R)}$。

当可靠度$R=0.5$的可靠寿命$t_{(0.5)}$，称为中位寿命，可靠度$R=e^{-1}$的可靠寿命称为特征寿命。

例1.1 产品的寿命T服从单参数指数分布，其分布函数为

$$F(t)=1-e^{-\lambda t} \quad (t>0) \tag{1-6}$$

其中λ是大于零的常数，则其可靠度为

$$R(t)=e^{-\lambda t} \quad (t>0)$$

可靠度为R的可靠寿命$t_{(R)}$由

$$R(t_{(R)})=e^{-\lambda t(R)}=R$$

得

$$t_{(R)}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{R}$$

中位寿命和特征寿命分别为

$$t_{(0.5)}=\frac{1}{\lambda}\ln 2,$$

$$t_{(e^{-1})}=\frac{1}{\lambda}\ln\frac{1}{e^{-1}}=\frac{1}{\lambda}.$$

1.1.2 平均寿命及寿命方差

定义： 产品的寿命T的失效密度函数为$f(t)$，则称

$$E(T)=\int_0^{\infty}tf(t)dt$$

为产品的平均寿命，称

$$D(T)=E(T-E(T))^2=\int_0^{\infty}(t-E(T))^2f(t)dt$$

为产品的寿命方差。$D(T)$ 也可记为 $Var(T)$。

产品的平均寿命和寿命方差即是寿命T的数学期望和方差。平均寿命是定量描述产品平均能正常工作多长时间。

对可修复产品，如灯泡、晶体管、轴承等，平均寿命是指一批产品平均寿终时间，记为MTTF(Mean Time to Failure)。对单个产品来说，它的寿命可能很长，也可能很短，但整批产品的平均寿命将是一个定值。

对可修复产品，如电视机、飞机、通讯设备等，平均寿命是指平均无故障工作时间，记为MTBF (Mean Time Between Failure)。它也是一个描述整体可靠性水平的量，不是指单个产品一次无故障工作时间，而是指一个或几个产品无数次无故障工作时间的平均。

产品的寿命方差是从数量上反映了产品寿命长短参差不齐的程度。

例1.2 产品寿命T服从单参数指数分布，其分布函数$F(t)$由公式 (1-6)给出，其概率密度为

$$f(t)=F'(t)=\lambda e^{-\lambda t}\quad (t>0)$$

其平均寿命和寿命方差分别为

$$E(T)=\int_0^{\infty}\lambda t e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}$$

$$D(T)=\int_0^{\infty}\left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2\lambda e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda^2}$$

可见指数分布的平均寿命即为特征寿命。

1.1.3 失效率

失效率是产品可靠性的重要指标，不少产品是按其失效率大小来描述其可靠性水平的。

定义：已工作到时刻 t 的产品，在时刻 t 后单位时间内发生失效的概率称为产品在时间 t 的失效率，记为 $\lambda(t)$。

根据失效率的定义，可知它是一个条件概率。产品工作到时刻 t，即为条件"$T>t$"，在此条件下再求产品在单位时间内失效的概率，即

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<T\leqslant t+\Delta t|T>t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<T\leqslant t+\Delta t,\ T>t)}{P(T>t)\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P(t<T<t+\Delta t)}{P(T>t)\Delta t}$$

如产品的寿命分布为 $F(t)$，它的概率密度为 $f(t)$，则

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{R(t)\Delta t}=\frac{f(t)}{R(t)}\qquad(1\text{-}7)$$

此式告诉我们，已知寿命分布 $F(t)$，可求得 $\lambda(t)$；反之，已知失效率 $\lambda(t)$ 也可求得寿命分布，因为

$$f(t)=F'(t)=[1-R(t)]'=-R'(t)$$

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{-R'(t)}{R(t)}=[-\ln R(t)]'$$

两边积分

$$\int_0^t \lambda(t)dt=\int_0^t[-\ln R(t)]'dt=-\ln R(t)$$

$$R(t)=e^{-\int_0^t \lambda(t)dt} \tag{1-8}$$

$$F(t)=1-e^{-\int_0^t \lambda(t)dt}$$

失效率 $\lambda(t)$ 是时间 t 的函数，所以有时也称失效率函数。产品在不同时刻，失效率是不同的。一般产品的失效率 $\lambda(t)$，开始处于逐渐下降过程（称早期失效），到一阶段后，逐渐趋于平稳（偶然失效期），后期失效率随时间 t 增加而迅速上升（耗损失效期），这一整个过程称为浴盆曲线（如图 1-2）。

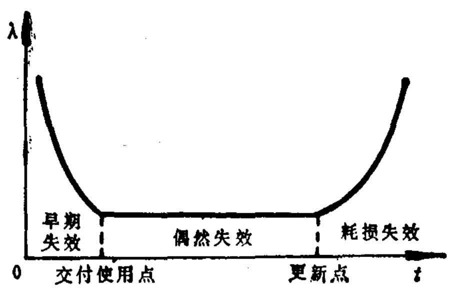

图 1-2

如产品的寿命分布为单参数指数分布，则其失效率

$$\lambda(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}}=\lambda$$

是一个常数，所以处于偶然失效期的产品的寿命分布可以用指数分布描述。

假如时间 t 的单位是小时，则可靠寿命、平均寿命的单位也是小时，寿命方差的单位是（小时）^{2}，失效率的单位是(1/小时)。可靠度是事件“$T>t$”发生的概率，所以是无量纲的量。

1.2 指数分布

双参数指数分布的分布函数为

$$F(t)=1-e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad (t\geqslant\gamma) \tag{1-9}$$

其概率密度为

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad (t \geqslant \gamma)$$

其中$\lambda>0$，$\gamma>0$是二个参数。当产品的寿命分布为双参数指数分布时，根据其寿命分布函数（1-9）可以求出可靠性数量特征

$$R(t)=e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad t \geqslant \gamma \tag{1-10}$$

$$t_{(R)}=\gamma-\frac{1}{\lambda}\ln R \tag{1-11}$$

$$E(T)=\frac{1}{\lambda}+\gamma \tag{1-12}$$

$$D(T)=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\lambda(t)=\lambda$$

产品从$t=0$开始工作，保证在$(0,\gamma)$这段时间内不会失效，所以γ称为超始寿命或保证寿命，又称位置参数。假如产品受到各种随机冲击的次数满足三个条件

（1）在$(a, a+t]$这段时间内，产品受到k次随机冲击的概率与起点a无关，仅与时间长短t有关。

（2）在二段不相重叠时间$(a_1, a_2]$和$(b_1, b_2]$内，产品受到随机冲击的次数k_1，k_2相互独立。

（3）在很短时间Δt内，产品受到二次或二次以上随机冲击的概率是Δt的高阶无穷小量。(Δt)，而受到一次随机冲击的概率近似于Δt的线性函数$\lambda\Delta t$。

则称此过程是普哇松(Poisson)过程，可以证明[1]在普哇松过程中产品在$(\gamma, t]$这段时间内，受到k次随机冲击的概率为

$$P_k(t-\gamma)=\frac{\lambda^k(t-\gamma)^k}{k!}e^{-\lambda(t-\gamma)}$$

$$(k=0, 1, 2, \cdots)$$

若产品受到一次冲击就失效，则产品不失效的概率为

$$P(T>t)=P_0(t-\gamma)=e^{-\lambda(t-\gamma)} \quad (t>\gamma)$$

此即为指数分布的可靠度。因此，当产品受到的随机冲击模型是普哇松过程，而从$t=\gamma$开始，产品受到一次随机冲击就失效，

此时产品的寿命分布就可用双参数指数分布描述。当 $\gamma=0$ 时，即为单参数指数分布。用产品的失效率是否近于常数也可判断产品的寿命分布是否为指数分布。

1.3 极大似然估计

假如可以判定产品的寿命分布为双参数指数分布，其分布函数由式（1-9）给出。若其中参数 γ，λ 已知，则不难用式(1-10)，(1-11)，（1-12）求得产品的各种可靠性指标。但实际情况中 γ，λ 往往是未知参数，因而首要的任务是通过寿命试验，获得寿命数据后，对这些未知参数进行估计。根据样本（数据）提供的有关未知参数的信息，构造一个样本的函数来估计未知参数的方法，称为参数的点估计问题。求未知参数点估计方法不止一种，而极大似然估计是求点估计的比较有效的经典方法。通过下面的具体例子介绍极大似然估计法的基本思想。

有一大批晶体管，预计它们的不合格品率 p 可能是 0.1 或 0.3，为了确定这批晶体管的不合格品率 p 究竟是多少，现从中任取四只进行测试，结果发现其中有一只是不合格品。如何根据抽样结果估计 p 的取值呢？直观上分析，四个样品中有一个不合格品，不合格品率 p 不可能很小，故 p 取 0.3 的可能性大。其实我们可以用概率知识分别计算一下 p 取不同数值时，抽样结果出现的概率。

$p=0.1$ 时，$p_4(k=1)=4(0.1)^1(0.9)^3=0.2916$，

$p=0.3$ 时，$p_4(k=1)=4(0.3)^1(0.7)^3=0.4116$。

可见计算结果确实表明 $p=0.3$ 的可能性比 $p=0.1$ 可能性大，因而我们自然取 p 的估计为 0.3，记

$$\hat{p}=0.3$$

将上面例子一般化。若总体 X 的分布函数 $F(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$ 中有 k 个未知参数，为估计这些参数，从此总体中抽取一个样本。通过试验，所得数据为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，取参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的估计量 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$，$\cdots$，$\hat{\theta}_k$ 使数据出现的概率达到最大，用

这样原则求估计量的方法就称为极大似然估计。

设总体是连续型随机变量，其概率密度为 $f(x;\ \theta_1,\ \theta_2,\cdots,\ \theta_k)$，此时数据 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 出现的概率为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)dx_i$$

$$=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)dx_1dx_2\cdots dx_n \qquad (1\text{-}13)$$

式中 $dx_1,\ dx_2,\ \cdots,\ dx_n$ 与参数 θ 无关，因而要求 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$ 使概率最大，只要求 $\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2,\ \cdots,\ \hat{\theta}_k$ 使

$$L(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)$$

达到最大即可，称 $L(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)$ 为似然函数。

当总体是离散型随机变量时，其分布律为 $f(x_i;\ \theta_1,\cdots,\theta_k)$，则数据出现的概率即为似然函数（1-13）式，

由于 $\ln L(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)$ 和 $L(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)$ 同时达到最大，而在计算上用 $\ln L(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)$ 比用 $L(\theta_1,\ \cdots,\ \theta_k)$ 方便，称 $\ln L(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)$ 为对数似然函数。如 $\ln L(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)$ 关于 θ_i 的偏导存在，则可用微分法求 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k$ 的极大似然估计，即可由方程组

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)}{\partial\theta_1}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial \ln L(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)}{\partial\theta_k}=0\end{array}\right\} \qquad (1\text{-}14)$$

解出 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k$ 的极大似然估计

$$\hat{\theta}_1(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ \hat{\theta}_2(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\ \cdots,\ \hat{\theta}_k(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

方程组（1-14）称为似然方程。

如 $g(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)$ 是 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k$ 的函数，$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots,$

$\hat{\theta}_k$ 是 θ_1，θ_2，…，θ_k 的极大似然估计，则 $\hat{g}=g(\hat{\theta}_1,\ \hat{\theta}_2,\ \cdots,\ \hat{\theta}_k)$ 是 $g(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_k)$ 的极大似然估计。

例1.3 设产品 T 的寿命分布为单参数指数分布，其概率密度为

$$f(t;\ \lambda)=\lambda e^{-\lambda t} \qquad (t>0)$$

$(t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n)$ 是 n 个产品的失效时间，求参数 λ 的极大似然估计。

解：先求似然函数和对数似然函数

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\ \lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} t_i} \qquad (t_i>0)$$

$$\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n} t_i$$

其似然方程为

$$\frac{\partial \ln L(\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n} t_i=0$$

解得

$$\hat{\lambda}=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} t_i}$$

不难证明 $\hat{\lambda}$ 确能使 $\ln L(\lambda)$ 达到最大，所以 $\hat{\lambda}$ 是失效率 λ 的极大似然估计，而平均寿命、可靠寿命和可靠度的极大似然估计分别为

$$\hat{E}(T)=\frac{1}{\hat{\lambda}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

$$\hat{t}_R=\frac{1}{\hat{\lambda}}\ln\frac{1}{R}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\ln\frac{1}{R}$$