

现代数学译丛

莫尔斯理论

J. 米尔诺 著

59

3

科学出版社

现代数学译丛

莫尔斯理论

J. 米尔诺 著

江嘉禾 译

李培信 校

科学出版社

1988

DS99/B/10
内 容 简 介

(本书是根据 M. 斯皮瓦克和 R. 韦尔斯记录的讲义写成的。)

“莫尔斯理论”是微分拓扑的一个重要分支，研究流形上光滑函数的临界点与流形本身拓扑结构之间的关系，同时也包括这一理论在多方面的重要应用，其中最精采的是对测地线变分问题的应用，从而产生了所谓“大范围变分学”。

作者素以文风清晰著称，本书尤其是一部脍炙人口的名著。作者利用近代拓扑的成就，对这一课题做了非常完美的总结和提高，至今仍然是可以使读者沿“极小测地线”进入这一领域的最好著作。

本书读者对象为大学数学系高年级学生、研究生及有关的数学工作者。

J. Milnor

MORSE THEORY

Princeton University Press, 1963

现代数学译丛

莫 尔 斯 理 论

J. 米尔诺 著

江嘉禾 译

李培信 校

责任编辑 杜小杨

科学出版社出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988年5月第一版 开本：850×1168 1/32

1988年5月第一次印刷 印张：4 7/8

印数：0001—3,730 字数：123,000

ISBN 7-03-000363-2/O · 100

定 价：1.60 元

译者前言

Morse (莫尔斯)理论是微分拓扑的一个重要分支,它有两个彼此紧密联系的重要方面:一方面是光滑函数的 Morse 理论,即所谓“临界点理论”;另一方面就是临界点理论对其它数学分枝的应用,特别是变分问题的 Morse 理论,即所谓“大范围变分学”。更确切地说,假设 f 是定义在 n 维光滑流形 M 上的光滑函数, f 的临界点就是指 f 的梯度向量场 $\text{grad } f$ 的零点,即是在局部坐标下使得 $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ ($i = 1, \dots, n$) 的点。 f 的全部临界点的性态与流形 M 本身的拓扑结构有着密切的关系;阐明这些关系就是临界点理论的主要内容。例如,著名的 Morse 不等式就是这样一种关系:

$$\begin{aligned} M_0 &\geq R_0, \\ M_1 - M_0 &\geq R_1 - R_0, \\ &\dots\dots \end{aligned}$$

$$M_n - M_{n-1} + \dots \pm M_0 \geq R_n - R_{n-1} + \dots \pm R_0,$$

其中 M_k 表示非蜕化函数 f 的指数为 k 的临界点的个数, R_k 是流形 M 的模 2 Betti 数。另一方面,考虑 Riemann 流形 M 上的变分问题,例如

$$\int F(x, \dot{x}) dt = \text{极值},$$

那么解曲线的性态与 M 的拓扑结构之间的关系就是大范围变分学要考虑的问题。例如,闭流形上两个固定端点间的测地线问题可以应用临界点理论得到下述结果:命 M 是一个完备的 Riemann 流形, $p, q \in M$ 沿任何测地线不共轭,那么从 p 到 q 的逐段光滑曲线组成的空间 $\mathcal{Q}(M; p, q)$ 同伦等价于一个 CW 复形: 对于每

条从 p 到 q 的指数为 k 的测地线, 这个复形有一个 k 维胞腔. 这样就把 Q 的同伦型和 M 上测地线的性态联系起来, 从而也就刻划了 M 的拓扑结构与 M 上的测地线之间的关系.

Morse 理论是在代数拓扑还远未发展得象今天这样完美的时候发展起来的, M. Morse 本人在这方面的工作是和临界点理论中纯拓扑结果打交道, 所以他不得不通过烦琐细致的具体分析来论证他的结果, 这就使得他的名著《大范围变分学》(The Calculus of Variations in the Large, 1934) 一书显得很难阅读, 从而引起很多作者企图以简明的笔触来解释他的工作. 值得提到的是 H. Seifert 和 W. Threlfall 合著的《大范围变分学》, 多年来一直被公认为这方面的优秀著作. 该书主要是讲处理大范围变分问题的拓扑方法, 对于临界点理论本身则着墨不多; 此外, 尽管叙述简洁清晰, 但在处理方法上仍然是具体分析, 并未用到近代拓扑的成就. 随着代数拓扑和微分拓扑的发展, 终于出现了 J. Milnor 的这本脍炙人口的名著, 对这一课题的基本理论做了非常完美的总结和提高, 使之摆脱了繁琐的论证而呈现出清晰明朗的面貌, 使以前那些浩如烟海的文献成为历史的陈迹. 今天的读者只要贯通这短短的篇幅就可直接跨入这个领域了, 因此我们把它介绍给读者. 当然, 阅读本书需要读者具有微分拓扑及代数拓扑的一些最基本的概念和知识.

J. Milnor 的这本书是 1963 年写成的, 从那时以来 Morse 理论又有了很大的进展, 但本书仍然是可以使读者沿“极小测地线”进入这一领域的最好著作. 我们这里稍微提一下读者可以继续深入的某些方面. 例如, 由于临界点定义为梯度向量场 $\text{grad } f$ 的零点, 自然可以考虑流形 M 上的一般向量场 X 的零点与 M 的拓扑结构之间的关系, 亦即 M 上的一组微分方程

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n)$$

的奇点与 M 的拓扑结构的关系. 这方面有下面的文章可以参考:

S. Smale, Morse inequalities for a dynamical system,

Bull. Amer. Math. Soc., **66** (1960), 43—49.

S.Smale 正是在这个基础上完成了他的关于 Poincaré 猜测的卓越工作. 其次, 由于测地线问题是一维变分问题, 本来是无限维的空间 Q 才能够化为有限维空间, 应用临界点理论来处理. 但一般的多维变分问题就无法化为有限维流形上的临界点问题, 因而要求发展无限维流形上的 Morse 理论, 在这方面有下列开创性工作可以参考:

R.S.Palais, Morse theory on Hilbert manifolds, *Topology*, **2** (1963), 299—340.

R.S.palais and S.Smale, A generalized Morse theory, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70**(1964), 165—172.

S.Smale, Morse theory and a non-linear generalization of the Dirichlet problem, *Ann. Math.*, **80** (1964), 382—396.

最后, 关于 Morse 理论近年来的发展, 有下面的介绍性工作可以参考:

R. Bott, Lectures on Morse theory, old and new, *Bull. Amer. Math. Soc. (New Series)*, **7**(1982), 331—338. (中译文载《数学译林》, 第3卷(1984), 第1, 2期.)

目 录

第一章 流形上的非蜕化光滑函数	1
§ 1. 引论	1
§ 2. 一些定义和引理	4
§ 3. 用临界值刻划流形的同伦型	13
§ 4. 例	25
§ 5. Morse 不等式	27
§ 6. 欧氏空间中的流形; 非蜕化函数的存在性	31
§ 7. 关于超平面截面的 Lefschetz 定理	37
第二章 Riemann 几何概要	41
§ 8. 协变微分	41
§ 9. 曲率张量	48
§ 10. 测地线与完备性	51
第三章 对变分学的应用: 测地线	63
§ 11. 光滑流形的道路空间	63
§ 12. 道路的能量	65
§ 13. 能量函数在临界道路处的 Hesse 泛函	69
§ 14. Jacobi 场; E_{**} 的零化子空间	73
§ 15. 指数定理	79
§ 16. Q^c 的有限维逼近	84
§ 17. 全道路空间的拓扑结构	88
§ 18. 非共轭点的存在性	92
§ 19. 拓扑结构与曲率的某些关系	94
第四章 对 Lie 群和对称空间的应用	102
§ 20. 对称空间	102
§ 21. Lie 群是对称空间	104
§ 22. 极小测地线组成的全流形	110
§ 23. Bott 关于酉群的周期性定理	115

第一章 流形上的非蜕化光滑函数

§ 1. 引 论

在这一节里,我们将讨论一个特例,借以说明今后要对任意流形进行讨论的一般问题。让我们考虑一个环面 M , 切于平面 V , 如图 1 所示。

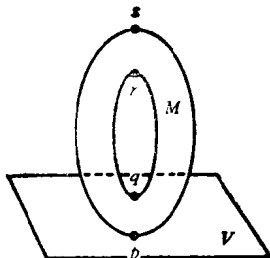


图 1

命 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ 是关于平面 V 的高度 (\mathbf{R} 总表示实数直线), M^a 是合于 $f(x) \leq a$ 的一切点 $x \in M$ 的集合。于是下述事实为真:

- (1) 若 $a < f(p)$, 则 M^a 是空集¹⁾。
- (2) 若 $f(p) < a < f(q)$, 则 M^a 同胚于一个 2 维胞腔。
- (3) 若 $f(q) < a < f(r)$, 则 M^a 同胚于圆柱面:



图 2

1) 这里的 $a < f(p)$ 原文是 $a < 0 < f(p)$ 。——译注

(4) 若 $f(r) < a < f(s)$, 则 M^a 同胚于一个紧致流形, 其环柄数为 1, 边缘是一个圆周.



图 3

(5) 若 $f(s) < a$, 则 M^a 是整个环面.

为了描述当 a 通过 $f(p)$, $f(q)$, $f(r)$, $f(s)$ 诸值时 M^a 发生的变化, 考虑同伦型比考虑同胚型要方便一些. 就同伦型而言:

(1)→(2)的变化是粘合一个 0 维胞腔的运算. 因为, 就同伦型而言, 当 $f(p) < a < f(q)$ 时, 空间 M^a 同伦于一个 0 维胞腔毫无区别:



图 4

这里“ \approx ”表示“具有同样的同伦型”.

(2)→(3)的变化是粘合一个 1 维胞腔的运算:



图 5

(3)→(4)的变化仍然是粘合一个 1 维胞腔的运算:

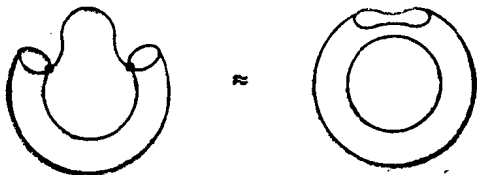


图 6

(4)→(5)的变化是粘合一个 2 维胞腔的运算。

“粘合一个 k 维胞腔”的意义,可以确切定义如下。命 Y 是任何一个拓扑空间,

$$e^k = \{x \in \mathbf{R}^k: \|x\| \leq 1\}$$

是 k 维胞腔,由 k 维欧氏空间中长度 ≤ 1 的所有向量组成,它的边缘

$$e^k = \{x \in \mathbf{R}^k: \|x\| = 1\},$$

记为 S^{k-1} 。若 $g: S^{k-1} \rightarrow Y$ 是一个连续映像,那么先作 Y 和 e^k 的拓扑和(即是隔离并),然后把每个 $x \in S^{k-1}$ 和 $g(x) \in Y$ 看成一样,就得到

$$Y \bigcup_g e^k$$

(Y 和 k 维胞腔 e^k 用 g 粘合起来)。就 $k=0$ 的情形而言,让 e^0 是一个点, $e^0 = S^{-1}$ 是空集,所以 Y 和一个 0 维胞腔粘合起来,不过就是 Y 和一个不属于它的点的并。

读者可能想到, M^a 的同伦型发生变化的各点 p, q, r 和 s 的特性可以借助于函数 f 加以简单的刻划。这些点是函数 f 的临界点: 如果我们在这些点的邻近选取任何一个坐标系 (x, y) , 则偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 同时为零。在点 p 处,我们可以选取 (x, y) 使得 $f = x^2 + y^2$, 在点 s 处可以使 $f = \text{常数} - x^2 - y^2$, 而在点 q 和 r 处,可以使 $f = \text{常数} + x^2 - y^2$ 。注意: 在每一点处, f 的表达式中负号的个数,正好就是从 M^a 过渡到 M^b 时必须粘合的胞腔的维数,这里 $a < f(\text{所考虑的点}) < b$ 。我们的头几个定理就是把这些事实推广到流形上的任意可微函数的情形。

参 考 文 献

为了进一步探讨 Morse 理论,下列基本文献是非常有用的。

- [1] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, American Mathematical Society, New York, 1934.
- [2] H. Seifert und W. Threlfall, Variationsrechnung im Grossen, New

York, 1951 (中译本: 大范围变分学, 江嘉禾译, 上海科学技术出版社, 1963).

- [3] R. Bott, The stable homotopy of the classical group, *Annals of Math.*, **70** (1959), 313—337.
- [4] R. Bott, Morse theory and its application to homotopy theory, 由 A. van de Ven 记录的(油印)讲义, University of Bonn, 1960.

§ 2. 一些定义和引理

“光滑”和“可微”这些字眼, 交替地用来表示 C^∞ 可微. 光滑流形 M 在点 p 处的切空间记为 TM_p . 如果 $g: M \rightarrow N$ 是一个光滑映像, $g(p) = q$, 则 g 在切空间之间导出的线性映像记为 $g_*: TM_p \rightarrow TN_q$.

现在命 f 是流形 M 上的一个光滑实值函数, 点 $p \in M$ 称为 f 的**临界点**, 如果导出映像 $f_*: TM_p \rightarrow TR_{f(p)}$ 是零映像. 这就是说, 如果在点 p 的邻域 U 中选取局部坐标系 (x^1, \dots, x^n) , 则

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0.$$

实数 $f(p)$ 称为 f 的**临界值**.

我们用 M^a 表示合于 $f(x) \leq a$ 的一切点 $x \in M$ 的集合, 如果 a 不是 f 的临界值, 则从隐函数定理可见, M^a 是一个光滑的有边流形, 它的边缘 $f^{-1}(a)$ 是 M 的光滑子流形.

一个临界点 p 称为**非蜕化的**, 如果矩阵

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$$

是非异的, 可以直接验证: 非蜕化性不依赖于坐标系的选择. 这一点也可以从下述内蕴定义推出.

如果 p 是 f 的临界点, 我们来定义 TM_p 上的一个对称双线性泛函 f_{**} , 称为 f 在点 p 处的**Hesse 泛函**. 若 $v, w \in TM_p$, 则 v 和 w 可以扩张为向量场 \tilde{v} 和 \tilde{w} . 命 $f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$, 其中 \tilde{v}_p 自然就是 v , 而 $\tilde{w}(f)$ 则表示 f 在方向 \tilde{w} 的方向导数. 我们应该证明: f_{**} 是完全确定的, 并且关于 v 和 w 是对称的, 它是

对称的, 因为

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0,$$

其中 $[\tilde{v}, \tilde{w}]$ 是 \tilde{v} 和 \tilde{w} 的 Poisson 括号, 而 $[\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0$ 是由于 p 是 f 的临界点.

这样一来, f_{**} 是对称的. 它显然也是完全确定的, 因为 $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = v(\tilde{w}(f))$ 不依赖于 v 的扩充 \tilde{v} , 而 $\tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$ 不依赖于 \tilde{w} .

如果 (x^1, \dots, x^n) 是点 p 处的一个局部坐标系,

$$v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad w = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p,$$

则可取 $\tilde{w} = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x^j}$, 其中 b_j 表示常值函数. 于是

$$\begin{aligned} f_{**}(v, w) &= v(\tilde{w}(f))(p) = v\left(\sum b_j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(p) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p), \end{aligned}$$

所以矩阵 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$ 就是双线性泛函 f_{**} 关于 $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$ 这组基的表示.

假设 H 是定义在向量空间 V 上的一个双线性泛函. 考虑 V 的一个子空间, 使得 H 在这个子空间上是负定的, 这种子空间的最大维数就定义为 H 的**指数**; 考虑向量 $v \in V$, 使得对每个 $w \in V$ 均有 $H(v, w) = 0$, 所有这种向量 v 组成一个子空间, 称为 H 的**零化子空间**, 它的维数称为 H 的**零化数**. 对于 TM_p 上的双线性泛函 f_{**} , 现在可以界说它的**指数**和**零化数**了. 显然, f 的临界点 p 非蜕化的充要条件是: f_{**} 在 TM_p 上的零化数为零. f_{**} 在 TM_p 上的指数, 简称为 f 在点 p 处的**指数**. 下面的 Morse 引理表明: f 在点 p 处的性态可以由这个指数完全刻划出来. 在叙述这个引理之前, 我们先证明下面的

引理 2.1 命 f 是一个 C^∞ 函数, 定义在 \mathbf{R}^n 中原点 0 的一个

凸邻域 V 中, 使得 $f(0) = 0$. 于是

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

其中 g_i 是某些适当的 C^∞ 函数, 定义在邻域 V 中, 合于

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

证 由于

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt, \end{aligned}$$

所以我们可以命

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

引理 2.2 (Morse 引理) 命 p 是 f 的一个非蜕化临界点. 于是存在 p 的一个邻域 U 和这个邻域中的局部坐标系 (y^1, \dots, y^n) , 使得对一切 i 有 $y^i(p) = 0$, 并且在整个邻域 U 中有恒等式

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2,$$

其中 λ 是 f 在点 p 处的指数.

证 我们首先证明: 对于 f 的任何一个这样的表达式, λ 都一定是 f 在点 p 处的指数. 对于任何坐标系 (z^1, \dots, z^n) , 如果

$$\begin{aligned} f(q) &= f(p) - (z^1(q))^2 - \dots - (z^\lambda(q))^2 \\ &\quad + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \dots + (z^n(q))^2, \end{aligned}$$

则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^i}(p) = \begin{cases} -2, & \text{如果 } i = j \leq \lambda, \\ 2, & \text{如果 } i = j > \lambda, \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

这就表明 f_{**} 关于 $\left. \frac{\partial}{\partial z^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial z^n} \right|_p$ 这组基的代表矩阵是

$$\begin{bmatrix} & & -2 & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & -2 & & & & & \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & 2 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

因此存在 TM_p 的一个 λ 维子空间,使得 f_{**} 为负定,并且存在一个 $n - \lambda$ 维子空间 V ,使得 f_{**} 为正定.假若存在 TM_p 的一个子空间,其维数大于 λ ,使得 f_{**} 为负定,则这个空间就会和 V 有非零的交¹⁾,这显然是不可能的,因此 λ 是 f_{**} 的指数.

现在来证明: 的确存在这样一个适当的坐标系 $(y^1 \cdots y^n)$.显然,我们可以假设: p 是 \mathbf{R}^n 的原点,并且 $f(p) = f(0) = 0$.按照引理 2.1,我们可以记

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \cdots, x_n),$$

其中 (x_1, \cdots, x_n) 在点 0 的某个邻域中. 由于点 0 假定是临界点,所以²⁾

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0.$$

因此,应用引理 2.1 于 g_i , 我们有

$$g_i(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x_1, \cdots, x_n),$$

其中 h_{ij} 是某些适当的光滑函数,从而

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \cdots, x_n).$$

可以假设 $h_{ij} = h_{ji}$, 因为若命 $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, 则有 \bar{h}_{ij}

1) 原文是“这个子空间就会和 V 相交”. ——译注

2) 原文的公式是 $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(0) = 0$, 显系笔误. 此外,请读者注意,本书中局部坐标均用上标编号表示,如 (u^1, \dots, u^n) , 而欧氏空间中的坐标则用下标编号表示,如 (x_1, \dots, x_n) . 但原文偶有笔误,均依此改正,不再加注. ——译注

$= h_{ij}$, 且 $f = \sum x_i x_j h_{ij}$. 此外, 矩阵 $(h_{ij}(0))$ 等于

$$\left(\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right),$$

因而是非异的.

于是, 存在一个非异坐标变换, 使得 f 在原点 0 的某个可能较小的邻域中具有所要的表达式. 要看出这点, 我们可以完全仿照通常化二次型为对角型的证法 (例如见 Birkhoff and Maclane, A Survey of Modern Algebra, p. 271). 关键的一步可以说明如下.

用归纳法, 假设在 0 的某个邻域 U_1 中, 存在坐标系 (u_1, \dots, u_n) , 使得在整个 U_1 中

$$f = \pm (u_1)^2 \pm \dots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j > r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n),$$

其中矩阵 $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))$ 是对称的. 对最后 $n - r + 1$ 个坐标施行线性变换后, 可以假设 $H_{rr}(0) \neq 0$. 命 $g(u_1, \dots, u_n)$ 表示 $|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|$ 的平方根, 它在点 0 的某个较小的邻域 $U_2 \subset U_1$ 中是 u_1, \dots, u_n 的非零光滑函数. 现在引进新坐标 v_1, \dots, v_n 如下:

$$v_i = u_i, \text{ 如果 } i \neq r,$$

$$v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left[u_r + \sum_{i > r} u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right].$$

从反函数定理可见, 在 0 的某个充分小的邻域 U_3 中, v_1, \dots, v_n 可以取作坐标. 容易验证, 在整个邻域 U_3 中, f 可以表为

$$f = \sum_{i \leq r} \pm (v_i)^2 + \sum_{i,j > r} v_i v_j H_{ij}(v_1, \dots, v_n).$$

这就完成了归纳证明, 引理 2.2 证毕.

推论 2.3 非蜕化临界点是孤立的.

现在给出一些例子, 讨论 \mathbf{R} 和 \mathbf{R}^2 上的函数的蜕化临界点, 并加以图示如下.

(a) $f(x) = x^3$. 原点是蜕化的临界点.

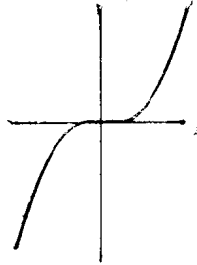


图 7

(b) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$. 原点是蜕化的非孤立临界点.

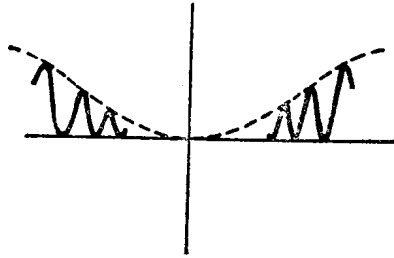


图 8

(c) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = (x + iy)^3$ 的实部. 原点(0, 0)是蜕化的临界点(“猴鞍点”).

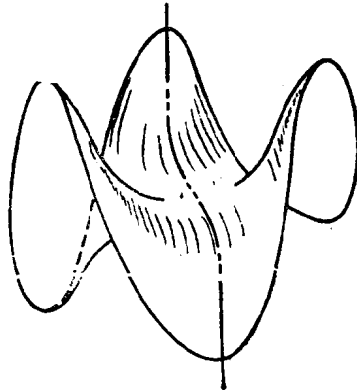


图 9

(d) $f(x, y) = x^2$. 临界点集是 y 轴¹⁾, 它是 \mathbf{R}^2 的子流形. 临界点全是蜕化的.

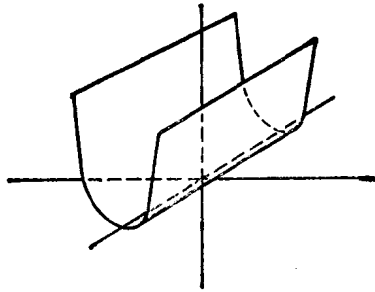


图 10

(e) $f(x, y) = x^2y^2$. 临界点全是蜕化的. 临界点集是 x 轴和 y 轴的并, 不是 \mathbf{R}^2 的子流形.

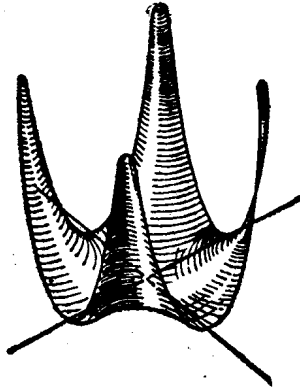


图 11

在结束本节之前, 让我们来讨论单参数微分同胚群. 想要深究的读者可以参考 K. Nomizu 的 *Lie Groups and Differential Geometry*.

1) 原文是“临界点集是 x 轴”. ——译注