统计分布

方开泰　许建伦　编著

科　学　出　版　社

统 计 分 布

方开泰 许建伦 编著

科 学 出 版 社

1 9 8 7

内 容 简 介

统计分布是数理统计的基础，数理统计的理论和方法均离不开统计分布

本书重点介绍常见的统计分布（包括离散型随机变量的分布、连续型随机变量的分布 多元分布等），详细地介绍了它们的性质、计算方法及相互之间的关系，并用大量的例子介绍这些分布的实际应用背景

本书可供数理统计工作者、从事实际工作的技术人员、理工科师生阅读。

统 计 分 布

方开泰 许建伦 编著

责任编辑 毕 颖

科学出版社 出 版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1987年9月第 一 版 开本：787×1092 1/32

1987年9月第一次印刷 印张：$11^3/_4$ 插页：2

印数：0001—6,000 字数：266,000

统一书号：13031·3662

本社书号：5032·13-1

定价：2.90元

序　言

数理统计学是应用数学的一个分支学科，研究如何以有效的方式收集、整理和分析受到随机性影响的数据，以对所考察的问题作出推断或预测，为采取决策和行动提供依据和建议．数理统计在国民经济中也有着广泛的应用．

统计分布是用来描述随机现象的基本工具，是数理统计学的基础，任何统计方法都离不开统计分布的概念和各种具体分布的性质．鉴于统计分布的重要性，各种类型的概率论和数理统计的书均用一定的篇幅来介绍各种具体的统计分布．除此以外，已有不少关于统计分布的专著，例如美国统计学家 Johnson 和 Kotz 在七十年代编著了《统计分布》（Distribution in Statistics）一书，共四册．十几年来，这套书一直广泛流行，是许多统计工作者身边的手册．日本东京大学竹内启教授于 1975 年出版了《概率分布与统计分析》（確率分布と統計解析）一书，在日本有相当的影响．为了科研和工作的需要，Patel、Kapadia 和 Owen 于 1976年出版了《统计分布手册》(Handbook of Statistical Distributions)．总而言之，统计分布是数理统计的基础，你如果想学习和运用数理统计，你就应该掌握这方面的知识．

本书的目的在于介绍各种常见的分布和它们的性质，并对其中大部分分布给出实际应用的例子，使读者不仅掌握统计分布的基本理论，而且能立即用于实际之中．本书收集的分布较多，性质也较全，兼有"统计分布手册"的性质，可供教数理统计的教师、学生、工程技术人员、科学工作者等

查阅．书中一部分内容在一般的教科书中是可以找到的，但有一部分内容是新的，在国内已出版的一般概率统计书上是没有的．比如，一些分布的近似计算公式，分布拟合的A^2和W^2检验等．

凡具有高中以上水平，并知道简单的微积分和线性代数的人均可阅读本书．书中个别的内容需要较多的数学知识（如书中带*部分），有困难的读者可以跳过不读，并不影响对全书主要内容的理解．为了照顾不懂“实变函数”的读者，我们将离散型变量和连续型变量分开进行处理，而不是用分布函数的工具来统一处理．统计分布的内容极其丰富，而本书只是一本入门书，不是专著，只能选择最基本的内容，所以挂一漏万在所难免，请读者原谅．

全书共分六章，第一章引进阅读本书所需的基本概念和预备知识，第二章介绍各种离散型的统计分布，第三、四章对常用的连续型统计分布逐一进行讨论．这三部分各节之间有一定的独立性，不一定完全按次序去读．鉴于本书篇幅的限制，只能给出少量的统计用表，其余的按照书中推荐的近似公式不难直接算得，在电脑普及的八十年代，也许后者更为方便．在实际中经常需要验证某一实际分布是否为我们设想的形式，这需要作分布拟合检验．第五章讨论了分布拟合检验的各种方法，其中有些方法在国内是首次介绍．最后一章扼要地讨论了几个常用的多元分布，由于多元分布所需的基础知识较多，大部分性质均不予证明．

在编写过程中，我们参照了已出版的许多书籍，其中文献〔1〕—〔8〕对我们的帮助很大，本书有些内容和例子是从这些文献中吸取的，在此向这些文献的作者表示衷心的感谢．加拿大 Simon Fraser 大学斯蒂芬斯教授（Stephens）给我们提供了他尚未出版的书稿，使我们得以完成分布拟合检验

中的 A^2 和 W^2 检验两节，在此也向他表示感谢。王隽骧副教授仔细审阅了书稿，提出了许多宝贵的意见，在此深表谢意.

由于我们的水平有限，书中一定有许多缺点和错误，请读者不吝批评指正。

方开泰（中国科学院应用数学研究所）

许建伦（苏州大学）

1985年3月

目　录

第一章　预备知识

本书的目的是介绍各种常见的分布及其应用，为此需要一些概率论和数理统计的预备知识，这些知识对理解全书是重要的．本章将介绍：事件、概率、随机变量、分布函数、分布密度、矩和各种母函数等．将上述这些内容推广至多个随机变量——随机向量的情形（见第五节），也是应随后几章的需要而设立的．第五节数学形式稍为复杂一些，数学基础不够的读者可跳过该节，先读第二章，待今后需要时再回过来读它．那时有了许多具体分布的背景，再读这一节就不会有太多的困难．在今后几章中涉及到一些统计应用，这就需要知道总体、样本等概念，为此在第七节我们简单地介绍了这些概念，以及参数估计和假设检验的提法．

第一节　事件和概率

一、随机现象及其统计规律性

在自然界和人类社会中，有许多现象，我们完全可以预言它们在一定条件下是否出现．例如“同性的电互相排斥”，“在没有外力作用的条件下，作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动”等等是一定会出现的；而上述现象的反面，即“同性的电互相吸引”，“在不受外力作用的条件下，作等速直线运动的物体改变其等速直线运动状态”等等是必

然不会出现的．这种在一定条件下必然出现的现象叫必然事件，在一定条件下必然不出现的现象叫不可能事件．显然，必然事件的反面是不可能事件．

然而，在自然界和人类社会中，还有许多现象，它们在一定条件下可能出现也可能不出现，这种现象称为随机事件，或简称事件．例如“掷一枚质地均匀的硬币，数字面（正面）向上”，这件事可能发生，但也可能发生背面向上的情形．“新生的婴儿是男孩”，这件事可能发生，但也可能发生新生的婴儿是女孩的情形．

我们常常通过随机试验来观察随机事件的统计规律性，例如：事件“正面向上”是随机试验“掷一枚质地均匀硬币”的一个可能结果，而事件“婴儿是男孩”是随机试验“婴儿出生”的一个可能结果．

一般地，设 E 为一试验，如果不能事先准确地预言它的结果，而且在相同条件下可以重复进行，就称为随机试验．以 ω 表示它的一个可能的结果，称 ω 为 E 的一基本事件．全体基本事件的集合 $\Omega=\{\omega\}$ 称为基本事件空间或样本空间．

例1.1 E——掷一枚质地均匀的硬币而观察所出现的面，ω_1——正面（数字面），ω_2——背面，于是$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$．

例1.2 E——在一个箱子里有 10 个球，上面分别标以 1，2，…，10，若从箱子里随机地取一个球，令 ω_i——球上的数字是 i，则 $\Omega=\{\omega_1, \cdots, \omega_{10}\}$．如果简记 ω_i 为 i，则得 $\Omega=\{1, \cdots, 10\}$．

例1.3 E——计算某电话交换台在某段时间内所接到的呼唤次数，若 ω_i——正好接到 i 次呼唤，则 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \cdots, \omega_n, \cdots\}$．如果简记 ω_i 为 i，则 $\Omega=\{0, 1, \cdots, n, \cdots\}$．

基本事件是事件中的一种，一般的事件总是由若干基本

事件共同组成的，因而是Ω的一个子集．例如，在例1.2中，事件A：“球上的数字不大于3”是由三个基本事件组成，即$A=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$．同样，对于事件$B$：“球上的数字为偶数”，即有$B=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8, \omega_{10}\}$．由此可见，每一事件都对应于$\Omega$的一个子集，显然$\Omega$就是必然发生的事件，以后用$\phi$表示不可能发生的事件．

二、事件的运算

进行一个试验，可能发生的事件往往很多，这些事件各有不同的特点，但彼此之间又有一定的联系，下面我们介绍一些事件之间的重要关系和运算．

（1）如果事件A发生必然导致B发生，就说事件A是事件B的特款，或说B包含A，记作$A\subset B$．如果$A\subset B$，且$B\subset A$，就说A与B相等，记作$A=B$．

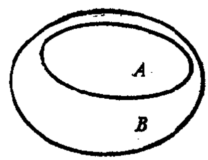


图 1.1　$A\subset B$

在例1.2中，若令$A=\{2\}=\{$球上的数字是2$\}$，$B=\{2,4,6,8,10\}=\{$球上的数字是偶数$\}$，显然$A\subset B$．图1.1形象地表示B包含A．

（2）“两事件A、B中至少有一个发生”也是一个事件，称此事件为A与B的和，记作$A\cup B$，见图1.2中阴影部分．

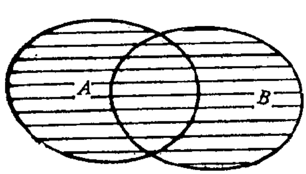


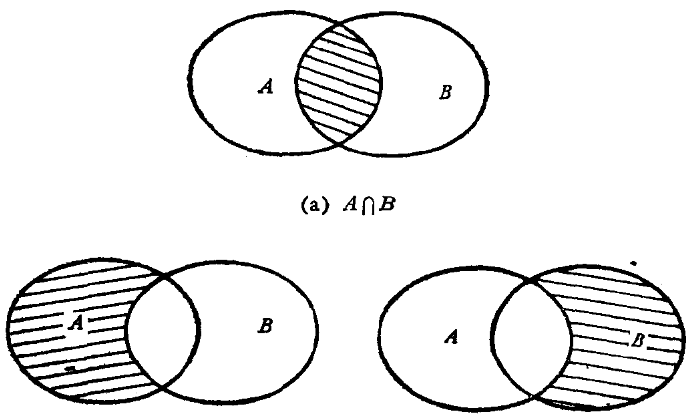
图 1.2　$A\cup B$

一般地，我们可以定义“有限多个”或“可列多个”事件的和．

（3）“两事件A、B同时发生”也是一个事件，称它为A与B的交，记为$A\cap B$，见图1.3(a)中阴影部分．

一般地，我们也可以类似地定义“有限多个”或“可列多个”事件的交。

（4）“事件 A 发生，而事件 B 不发生”这也是一个事件，称这个事件为 A 与 B 的差，记作 $A-B$，见图1.3(b)中阴影部分。



(a) $A\cap B$

(b) $A-B$　　(c) $B-A$

图 1.3

在例 1.3 中，若令 $A=\{$呼唤次数不超过 5$\}=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{$呼唤次数为偶数$\}=\{2,4,6,\cdots\}$，则$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,8,\cdots\}$，$A\cap B=\{2,4\}$。此时 $A-B=\{1,3,5\}$，$B-A=\{6,8,10,\cdots\}$。

特别地，事件 Ω 与 A 的差 $\Omega-A$ 这一事件称为 A 的逆事件，记作 A^c。如上述的 $A^c=\{$呼唤次数大于 5$\}=\{6,7,\cdots\}$，$B^c=\{$呼唤次数为奇数$\}=\{1,3,5,\cdots\}$。

（5）如果两个事件 A 和 B，不可能同时发生，即$A\cap B=\varnothing$，则说 A 与 B 为“互不相容”，见图 1.4。

如果 n 个事件 A_1，$\cdots$，A_n 中的任意两个事件是互不相

容的，就说 A_1，…，A_n 互不相容.

从上面的讨论中，我们已经看到，一个事件 A 可表为基本事件空间 Ω 中的一个子集，这个子集仍记为 A. 于是我们也可从集合论的观点来看待事件，结果发现这种观点非常有用，因为上面对事件所引进的关系恰和通常在集合论中所引进的相应的关系一致. 比如说，设事件 A是 B 的特款，于是A发生必导致 B 发生，考虑含于 A 的一个基本事件ω，当ω发生时，A 发生，根据假定，这时 B 也发生，故此ω必含于 B，从而证明了集合 A与B 之间有集合论中所定义

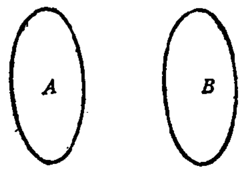


图 1.4　$A\cap B=\phi$

表 1.1　集合论与概率论术语对照表

符　号	集　合　论	概　率　论
Ω	空　间	样本空间；必然事件
ϕ	空　集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω中的点（或元素）	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω的子集A	事件A
$A\subset B$	集合A包含在集合B中	事件A含于事件B
$A=B$	集合A与B相等	事件A与B相等
$A\cup B$	集合A与B之和	事件A与B至少有一发生（事件A与B之和）
$A\cap B$	集合A与B之交	事件A与B同时发生（事件A与B之交）
A^c	集合A的余集	事件A的逆事件
$A-B$	集合A与B之差	事件A发生而事件B不发生（事件A与B之差）
$A\cap B=\phi$	集合A与B没有公共元素	事件A与B互不相容

的包含关系 $A\subset B$. 反之，设集合 $A\subset B$，当事件 A 发生时，必有 A 中的某个基本事件 ω 发生，既然此 $\omega\in A$，就有 $\omega\in B$，故事件 B 也发生，这说明事件 A 是 B 的特款. 由此可见，"事件 B 包含事件 A" 与 "集合 B 包含集合 A" 两概念是一致的. 为了便于对照，我们把它们的术语列于表1.1.

三、概率及其公理化定义

我们观察一个随机试验的各种事件，一般来说，总会发现有些事件出现的可能性大些，有些事件出现的可能性小些，有些事件出现的可能性彼此大致相同. 例如，在例 1.2 中，随机抽取一个球，考虑事件 A："抽到球的数字是 2"，B："抽到球的数字是偶数"，显然，事件 B 出现的可能性大于事件 A 出现的可能性，因为前一事件是后一事件的特款. 既然各事件出现的可能性大小不同，人们自然想到用一个数字 $P(A)$ 来标志事件 A 出现的可能性，较大的可能性用较大的数字来标志，较小的就用较小的数字，这数字 $P(A)$ 就称为事件A 的概率.

在概率论的发展史上，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出了定义概率和计算概率的各种方法，然而所定义的概率都存在一定的缺陷，在哲学上有许多争论，所以毋宁说它们只是一些计算概率的方法.

1. 几种概率计算方法

（1）古典型　对于某一随机试验 E，如果 (i)全体基本事件 $\omega_1,\cdots,\omega_n$只有有限个；(ii) 每个基本事件出现的可能性都相同，则称 E 为古典型随机试验.

对于古典型随机试验，任意事件 A，对应的概率定义为

$P(A)$=事件 A 包含的基本事件数(k)/基本

事件总数(n)。 (1.1)

若将例 1.2 考虑成古典型随机试验,令 A={球上的数字是偶数}, 于是 $n=10$, A 中包含五个基本事件, 即 $k=5$, 由公式 (1.1)

$$P(A)=5/10=1/2$$

与经验是吻合的, 在第二章我们将看到更多的实际例子.

对于 (1.1) 定义的概率, 它具有

性质 (*) (i) 设 A 为任一事件, 则 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

(ii) 对必然事件 Ω, 有 $P(\Omega)=1$;

(iii) 如 $A_1, \cdots, A_m$ 互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

(2) 几何型 用枪打靶, 假想打中靶上的任一点的可能性是相同的, 在一次射击中, 射中图 1.5 中区域 A 的概率, 直观上可以用 A 的面积除以靶 (用 Ω 表示) 的面积来表示, 即

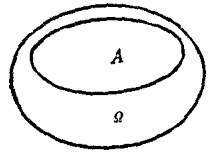


图 1.5

$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\text{靶的面积}}$$

一般地, 设某一随机试验, 其结果 (看作一个点) 必落在 Ω 之中, 并具有"均匀性",即试验结果必落在 Ω 中, 而且落在某区域 $A(\subset\Omega)$ 中的可能性大小与 A 的度量大小 $L(A)$ 成正比, 而与 A 的位置及形状无关, 事件 A 的概率定义为

$$P(A)=L(A)/L(\Omega). \tag{1.2}$$

对于几何型概率的计算, 在一般的概率论书上都有, 比较典型的有"约会问题"、"蒲丰 (Buffon)的针问题"等等,

我们在此就不举例了。

易见，几何概率（1.2）也具有性质（*）。

（3）频率　设 E 为一随机试验，A 为其中任一事件，在相同的条件下，把 E 独立重复试验 n 次，以 $f_n(A)$ 表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数，比值

$$F_n(A)=f_n(A)/n \tag{1.3}$$

称为事件 A 在这 n 次试验中出现的频率，而 $f_n(A)$ 称为 A 在这 n 次试验中出现的频数。

易知，当 A 出现的可能性愈大，频率 $F_n(A)$ 也愈大；反之，如果 $F_n(A)$ 愈大，那么可以设想 A 出现的可能性也愈大，因此，频率与概率之间有紧密的联系。可以证明，当 $n\to\infty$ 时，在一定意义下，$F_n(A)\to P(A)$。因此，当 n 充分大时，可以取频率作为概率的近似值，从而可以用这种方法来求一些实际问题中的概率。用（1.3）定义的频率也具有性质（*）。

2*. 概率的公理化定义

从上面我们看到，虽然我们讨论了特殊的概率计算，我们从中可发现，对于古典概率、几何概率和频率都具有性质（*），这使人们想到：是否可以用这些性质来作为一般的概率定义。近代的概率论的公理结构正是这样做的，它给出了事件与概率的严格定义。

定义1.1　设 Ω 是抽象的点 ω 的集，Ω 中的一些子集 A 所成的集 $\mathscr{F}$ 称为 Ω 中的一个 σ-代数，如果 $\mathscr{F}$ 满足

(i) $\Omega\in\mathscr{F}$；

(ii) 如 $A\in\mathscr{F}$；则 $A^c\in\mathscr{F}$；

(iii) 如 $A_n\in\mathscr{F}\ (n=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$。

定义1.2　设 $P(A)(A\in\mathscr{F})$ 是定义在 σ-代数 $\mathscr{F}$ 上的实

值集函数，如果它满足下列条件

(i) 对每个 $A\in\mathscr{F}$，有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$；

(ii) $P(\Omega)=1$；

(iii) 如 $A_n\in\mathscr{F}$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $A_i\cap A_j=\phi$，$i\neq j$，则有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

就称它为$\mathscr{F}$上的概率测度，或简称概率，而称$\mathscr{F}$中的集为事件，三元体 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间.

根据定义1.2，我们可得概率的性质如下

（1） $P(\phi)=0$。

（2） 如 A，B 为两事件，且 $A\supset B$，则

$0\leqslant P(A-B)=P(A)-P(B)$，从而，$P(A)\geqslant P(B)$.

特别地有

$$P(A^c)=1-P(A).$$

（3） 对任意 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$，有

$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)\leqslant P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$.

（4） 对任意两个事件 A 和 B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

为了书写方便，以后常用 AB 简记 $A\cap B$. 类似地，若 A,B,C 是任意三个事件，则

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

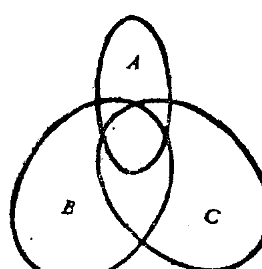


图 1.6

这个公式由图 1.6 很容易导出，只要理解公式中的每一项代表图