中学数学实验教材

第二册(下)

中学数学实验教材编写组　编

北京师范大学出版社

1982年11月

中学数学实验教材
第二册(下)
中学数学实验教材编写组　编

北京师范大学出版社出版
新华书店北京发行所发行
邯郸地区印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：5　字数：103千
1982年11月第一版　1984年5月第三次印
印数：45,401—63,401
统一书号：7243·48　定价：0.45

前　言

这一套中学数学实验教材，内容的选取原则是精简实用，教材的处理力求深入浅出，顺理成章，尽量作到使人人能懂，到处有用。

本教材适用于重点中学，侧重在满足学生将来从事理工方面学习和工作的需要。

本教材的教学目的，是使学生切实学好从事现代生产，特别是学习现代科学技术所必需的数学基础知识；通过对数学理论、应用、思想和方法的学习，培养学生运算能力，思维能力，空间想象力，从而逐步培养运用数学的思想和方法去分析和解决实际问题的能力；通过数学的教学和学习，培养学生良好的学习习惯，严谨的治学态度和科学的思想方法，逐步形成辩证唯物主义世界观。

根据上述教学目的，本教材精选了传统数学那些普遍实用的最基础的部分，这就是在理论上、应用上和思想方法上都是基本的、长远起作用的通性、通法。比如，代数中的数系运算律，式的运算，解代数方程，待定系数法；几何中的图形的基本概念和主要性质，向量，解析几何；分析中的函数，极限，连续，微分，积分；概率统计以及逻辑、推理论证等知识。对于那些理论和应用上虽有一定作用，但发展余地不大，或没有普遍意义和实用价值，或不必要的重复和过于繁琐的内容，如立体几何中的空间作图，几何体的体积、表面积计算，几何难题，因式分解，对数计算等作了较大的精简或删减。

全套教材共分六册。第一册是代数。在总结小学所学自然数、小数、分数基础上，明确提出运算律，把数扩充到有理数和实数系。灵活运用运算律解一元一次、二次方程，二元、三元一次方程组，然后进一步系统化，引进多项式运算，综合除法，辗转相除，余式定理及其推论，学到根式、分式、部分分式。第二册是几何。由直观几何形象分析归纳出几何基本概念和基本性质，通过集合术语、简易逻辑转入欧氏推理几何，处理直线形，圆、基本轨迹与作图，三角比与解三角形等基本内容。第三册是函数。数形结合引入坐标，研究多项式函数，指数、对数、三角函数，不等式等。第四册是代数。把数扩充到复数系，进一步加强多项式论，方程式论，讲线性方程组理论，概率（离散的）统计的初步知识。第五册是几何。引进向量，用向量和初等几何方法综合处理几何问题，坐标化处理直线、圆、锥线，坐标变换与二次曲线讨论，然后讲立体几何，并引进空间向量研究空间解析几何初步知识。第六册是微积分初步。突出逼近法，讲实数完备性，函数，极限，连续，变率与微分，求和与积分。

本教材基本上采取代数、几何、分析分科，初中、高中循环排列的安排体系。教学可按初一、初二代数、几何双科并进，初三学分析，高一、高二代数（包括概率统计）、几何双科并进，高三学微积分的程序来安排。

本教材的处理力求符合历史发展和认识发展的规律，深入浅出，顺理成章。突出由算术到代数，由实验几何到论证几何，由综合几何到解析几何，由常量数学到变量数学等四个重大转折，着力采取措施引导学生合乎规律地实现这些转折，为此，强调数系运算律，集合逻辑，向量和逼近法分别在实现这四个转折中的作用。这样既遵循历史发展的规律，又突出了几个转折关头，缩短了认识过程，有利于学生掌握

数学思想发展的脉络，提高数学教学的思想性。

这一套中学数学实验教材是教育部委托北京师范大学、中国科学院数学研究所、人民教育出版社、北京师范学院、北京景山学校等单位组成的领导小组组织“中学数学实验教材编写组”，根据美国加州大学伯克利分校数学系项武义教授的《关于中学实验数学教材的设想》编写的。第一版印出后，由教育部实验研究组和有关省市实验研究组指导在北京景山学校，北京师院附中，上海大同中学，天津南开中学，天津十六中学，广东省实验中学，华南师院附中，长春市实验中学等学校试教过两遍，在这个基础上编写组吸收了实验学校老师们的经验和意见，修改成这一版《中学数学实验教材》，正式出版，内部发行，供中学选作实验教材，教师参考书或学生课外读物。在编写和修订过程中，项武义教授曾数次详细修改过原稿，提出过许多宝贵意见。

本教材虽然试用过两遍，但是实验基础仍然很不够，这次修改出版，目的是通过更大范围的实验研究，逐步形成另一套现代化而又适合我国国情的中学数学教科书。在实验过程中，我们热忱希望大家多提意见，以便进一步把它修改好。

中学数学实验教材编写组

一九八一年三月

目　　录

第四章 圆

在工农业生产和日常生活中，圆的应用相当广泛。过去我们初步掌握了一些圆的知识，这一章我们将在复习这些知识的基础上，把圆和直线形结合起来，进一步学习有关圆的一些性质。

§1 圆的基本性质

1.1 圆的概念

在一个平面上和某一定点的距离等于定长的点的集合叫做圆周，简称为圆；其中定点叫做圆的圆心，连结圆心与圆上任一点的线段叫做半径。通常以点O为圆心的圆记作⊙O；以点O为圆心，半径长是r的圆记作⊙(O, r)。

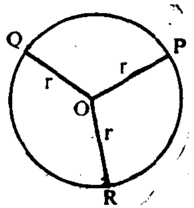


图 4-1

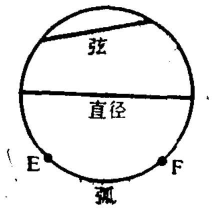


图 4-2

显然，**同圆的半径都相等**（图 4-1）。而当一个圆的圆心确定了，半径r的大小也确定了，这个圆的位置与大小也就完全确定了。

圆上任意两点间的部分叫做**弧**；连结圆上任意两点间的

线段叫做这个圆的弦；通过圆心的弦叫做圆的直径（图4-2）。显然，**一个圆的直径等于它的半径的二倍**.

从圆的定义，不难直接推知：

两个圆能够重合的充要条件是两个圆的半径相等。

半径相等的圆叫做**等圆**.**等圆的半径相等直径相等**.

从圆的定义，我们还可以看出，一个圆把它所在的平面分为三部分（图4-3）：

1．圆本身，即与圆心的距离等于半径的点所构成的集合.其中任何一点都叫做圆上的点.

2．圆的内部，与圆心的距离小于半径的点所构成的集合.圆的内部又简称**圆内**；其中任何一点都叫做圆内的点.

3．圆的外部：与圆心的距离大于半径的点所构成的集合；圆的外部又简称**圆外**，其中任何一点都叫做圆外的点.

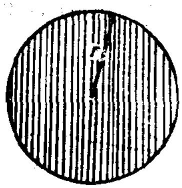


图 4-3

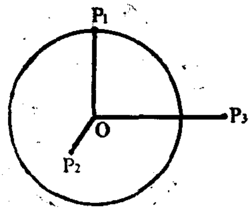


图 4-4

通常我们说的**圆面**，指的是由圆所围成的平面部分，也就是与圆心的距离小于或等于半径的点所构成的集合．如图4-3中阴影部分.

由上述定义可知，$\odot(O, r)$与平面上任一点P的位置关系，有下述的性质（图4-4）.

1．点P在$\odot(O, r)$上的充要条件是$\overline{OP}=r$；

2．点P在$\odot(O, r)$内的充要条件是$\overline{OP}<r$；

3. 点 P 在 $\odot(O, r)$ 外的充要条件是 $\overline{OP} > r$。

练　习

1. 根据下述条件画圆

（1）已知定点 O，以 O 为圆心画一圆使半径等于2厘米。

（2）已知两个定点 O、P，画 $\odot(O, \overline{OP})$。

（3）先画一条 $\overline{AB}$，再画出以 $\overline{AB}$ 为直径的圆。

2. 把以下命题写成"若—则"形式

（1）点 P 在 $\odot(O, r)$ 上的充分条件是 $\overline{OP} = r$；

（2）点 P 在 $\odot(O, r)$ 内的必要条件是 $\overline{OP} < r$；

（3）点 P 在 $\odot(O, r)$ 外的充分条件是 $\overline{OP} > r$。

3. 以点 O 为圆心，r_1、r_2 为半径画两个圆。说出满足下列条件的点 X 在平面上的位置范围。

（1）$\overline{OX} > r_2$，（2）$\overline{OX} \leqslant r_1$，（3）$r_1 < \overline{OX} < r_2$

（4）$\overline{OX} = r_1$，（5）$\overline{OX} < r_1$。

4. 已知一个 $\odot O$ 的直径长是 4cm。说出满足下列条件的 P 点的可能位置：

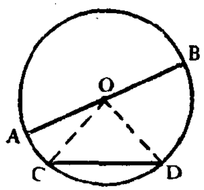
（1）$\overline{OP} > 2\text{cm}$，

（2）$\overline{OP} \geqslant 2\text{cm}$，

（3）$\overline{OP} < 2\text{cm}$，

（4）$\overline{OP} = 0$。

5. 求证一个圆的直径是这个圆中最长的弦。



第5题

（提示：按图中所示证 $\overline{AB} > \overline{CD}$）。

1.2　不共线的三点确定一圆

我们已知，如果知道了圆心的位置和半径长，那末圆的位置和大小也就确定了．现在我们来研究经过一个点；经过两个点；经过三个点可分别作出几个圆？

已知一个点 A，很明显，以 A 点以外的任何点为圆心，以这点到 A 点的距离为半径所作的圆都经过 A 点（图4-5）。因此，**经过一点可以作无数个圆．**

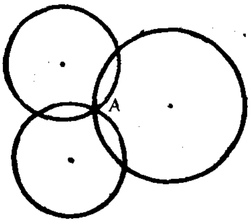


图 4-5

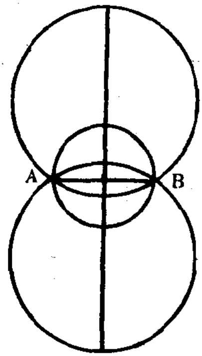


图 4-6

经过两个已知点 A、B，可以作多少个圆呢（图4-6）？由于经过 A、B 两点的圆的圆心到 A 点与 B 点的距离应相等，而和 A、B 两点距离相等的点仅在 $\overline{AB}$ 的垂直平分线上，所以，以 $\overline{AB}$ 的垂直平分线上任一点为圆心，以这点到 A 点（或 B 点）的距离为半径所作的圆都经过 A、B 两点。因此，**经过两点也可以作无数个圆，且圆心都在连结这两点的线段的垂直平分线上．**

现在我们来研究，经过 A、B、C 三点可以作多少个圆的问题？

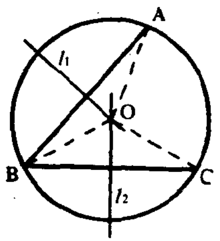


图 4-7

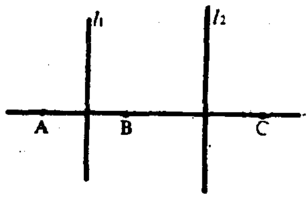


图 4-8

我们知道，经过 A、B 两点的圆的圆心必定在 $\overline{AB}$ 的垂直平分线上（图4-7中的 l_1），经过 B、C 两点的圆的圆心又必定在 $\overline{BC}$ 的垂直平分线上（图 4-7中的 l_2），因而经过 A、B、C 三点的圆的圆心必定是直线 l_1 和 l_2 的交点 O，由于 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，所以以 O 为圆心 $\overline{OA}$ 为半径的圆经过 A、B、C 三点．

这样一来，能不能说经过三个点就可作一个圆呢？我们再来看图4-8中所示的三点 A、B、C，它们是在同一条直线上的，这时 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的垂直平分线 l_1 和 l_2 都垂直于同一条直线，于是 $l_1 /\!/ l_2$，l_1 和 l_2 便没有交点，这就说明了经过 A、B、C 三点的圆的圆心根本不存在，所以也就没有圆都经过 A、B、C 三点．因此，我们不能笼统地说经过三个点可作一个圆．如果 A、B、C 三点在同一条直线上(叫做共线的点)，便没有圆经过这三点；如果 A、B、C 三点不在同一条直线上（叫做不共线的点），那么 $\overline{AB}$ 与 $\overline{BC}$ 的垂直平分线必相交（为什么？），这时，就可作一个圆经过这三点，又由于 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 的垂直平分线都只有一条，所以它们的交点也是唯一的，从而 $\overline{OA}$ 的长也是唯一的，所以经过 A、B、C 三点也只能作一个圆．

于是，我们便得到确切的结论：

定理　过不共线的三个点，可以作一个圆且只可以作一个圆．

由上述讨论，我们还可看到一个圆的圆心到圆的任一条弦的两个端点的距离相等，因而可得：

推论1　圆的任一条弦的垂直平分线都通过圆心．

由于任一个 $\triangle ABC$ 的三个顶点不共线，因此经过 A、B、C 三个顶点可以作一个圆，且只可以作一个圆 $\odot O$（图4-9），这个圆叫做 $\triangle ABC$ 的**外接圆**，它的圆心 O 叫做 $\triangle ABC$

的外心，而$\triangle ABC$叫做$\odot O$的**内接三角形**。由于$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，$O$点一定在三边的垂直平分线上，于是又可得：

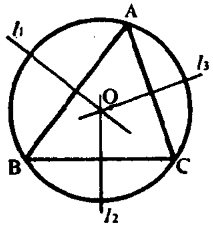


图 4-9

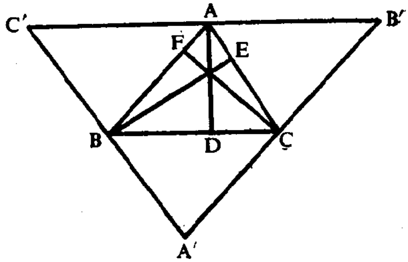


图 4-10

推论2　三角形的三边的垂直平分线相交于一点，这个点就是三角形的外心

由推论 2 我们又可得到：

推论3　三角形的三条高线相交于一点.

已知　AD、BE、CF 是$\triangle ABC$的三条高线（图 4-10）.

求证　AD、BE、CF 相交于一点.

证明　经过$\triangle ABC$的各顶点 A、B、C 分别作对边的平行线，设它们分别相交于 B'、C'、A'各点，于是 $AD\perp B'C'$，$BE\perp C'A'$，$CF\perp A'B'$（为什么？）.又因为四边形$BCAC'$和$BCB'A$都是平行四边形（为什么？）.

$\therefore$　$\overline{C'A}=\overline{BC}=\overline{AB'}$，于是 A是$\overline{B'C'}$的中点.

同理，B 是$\overline{A'C'}$的中点，C 是$\overline{A'B'}$的中点.因此，AD、BE、CF 分别是$\triangle A'B'C'$的三边上的垂直平分线，由推论 2 可知 AD、BE 和 CF 相交于一点.

图4-10中，画出的是锐角三角形，如$\triangle ABC$是钝角三角形，上述证明过程同样适用.同学可自己验证.

三角形的三条高线的交点叫做**三角形的垂心**.

例1 求作一条已知弧的圆心。

已知 $\overset{\frown}{EF}$(图4-11).

求作 $\overset{\frown}{EF}$ 所在圆的圆心.

作法

(1) 在 $\overset{\frown}{EF}$ 上任取三点 A、B、C，并且作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$.

(2) 分别作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的垂直平分线 l_1 和 l_2，设它们的交点为 O，O 点就是所求作的圆心.

证明 $\because$ A、B、C三点在$\overset{\frown}{EF}$上（作法），

$\therefore$ $\overset{\frown}{EF}$ 是经过 A、B、C 的圆的一部分.

又$\because$ O 是经过 A、B、C 的圆的圆心，

$\therefore$ O 是$\overset{\frown}{EF}$所在圆的圆心.

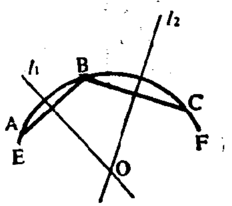


图 4-11

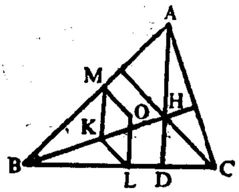


图 4-12

例2 已知 O和H 各是$\triangle ABC$ 的外心和垂心，$OL \perp \overline{BC}$ 于L（图4-12）.

求证 $\overline{OL} = \frac{1}{2}\overline{AH}$.

证明 已知$OL \perp \overline{BC}$ 于L点，作$OM \perp \overline{AB}$ 于 M 点，由于O是$\triangle ABC$ 的外心，所以 L、M 分别是 $\overline{BC}$、$\overline{AB}$的中点. 取 $\overline{BH}$ 的中点 K，作$\overline{MK}$，$\overline{LK}$，

$\because$ $MK \parallel AH$，$OL \parallel AH$，

$\therefore MK \parallel OL$，

同理可证，

$LK // OM$，

$\therefore$ $OMKL$ 是平行四边形，

$\therefore$ $\overline{OL}=\overline{MK}=\frac{1}{2}\overline{AH}$。

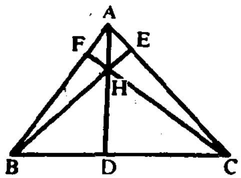
练 习

1．分别作一个锐角三角形、一个直角三角形和一个钝角三角形的外接圆，并说出它们的外心的位置各有什么特点。

2．经过任意四点，可不可以作一个圆？试举例说明。

3．分别作出一个锐角三角形、一个直角三角形和一个钝角三角形的垂心，并说出它们的位置各有什么特点。

4．已知 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心，D、E、F 是三高的垂足。试分别说出 $\triangle HBC$、$\triangle HAC$、$\triangle HAB$ 的垂心各是图中哪一点。



第 4 题

1.3 圆的对称性

已知$\odot O$(图4-13)，在$\odot O$上任取一点A，引直径$\overline{AA'}$，则$\overline{AA'}$被圆心 O 平分。这就是说 A' 是以点 O 为对称中心的点 A 的对称点。如果在 $\odot O$ 上再取 B、C、D…，并引直径 $\overline{BB'}$、$\overline{CC'}$、$\overline{DD'}$，…，那么点 B'、C'、D'…也都分别是以 O 为对称中心的点 B、C、D、…的对称点。这就说明了$\odot O$ 上以 O 为对称中心的任何点的对称点都在 $\odot O$ 上。由此可知，

圆是中心对称形；圆心是它的对称中心。

已知$\overline{AA'}$是$\odot O$ 的任一条直径(图4-14)，作直径$\overline{BB'}\perp\overline{AA'}$，把$\odot O$左边部分沿着直线 AA' 翻折过来，由于$\overline{BB'}\perp\overline{AA'}$，$\overline{OB'}=\overline{OB}$，那么 B 点就与 B' 点重合。因为经过 A、

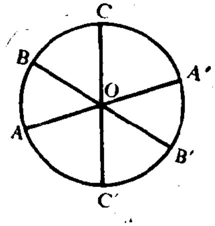


图 4-13

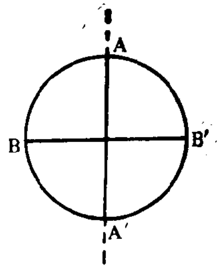


图 4-14

B'、A'三点只可以作一个圆，所以以 A、A' 为端点，经过 B' 点的弧只有一条，因此$\overset{\frown}{ABA'}$与 $\overset{\frown}{AB'A'}$ 重合。由此可知，

圆是轴对称图形，任一条通过圆心的直线都是它的对称轴。

由上述圆的对称性，我们可推出许多圆的重要性质。

推论1 圆被它的任何一条直径截出的两段弧相等。这两段弧都叫做半圆。

小于半圆的弧叫做劣弧，大于半圆的弧叫做优弧。以后说到弧，如不特别指明，一般都指的是劣弧。

推论2 一圆的直径垂直于一条非直径的弦的充分必要条件是这直径平分这条弦或平分这条弦所对的弧。

我们来证必要性，充分性留给同学们自证。

已知 ⊙O 中，直径$\overline{CD}\perp$弦 $\overline{AB}$于 E 点（图4-15）。

求证 $\overline{AE}=\overline{BE}$，$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$。

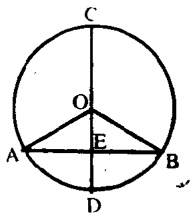


图 4-15

证明 ∵ $\overline{CD}$ 是⊙O 的直径

∴直线 CD 是⊙O 的对称轴.

又 ∵ $CD\perp AB$ 于 E 点

∴ CD 也是等腰$\triangle OAB$的对称轴。以 CD 为轴把图形翻折叠合时，半圆$\overset{\frown}{CAD}$与半圆$\overset{\frown}{CBD}$重合，$\overline{AE}$ 与 $\overline{BE}$ 重合。A 点