弹性薄壁梁桥分析

TANXING BAOBI LIANGQIAO FENXI

倪元增　钱寅泉　著

人民交通出版社

弹性薄壁梁桥分析

倪元增　钱寅泉　著

人民交通出版社

内 容 提 要

本书作者用板元位移模式法分析弹性薄壁梁桥的各种变形特征，并依此建立相应的控制方程，再用简化的有限元法和加辽金法求数值解，为薄壁箱梁、T梁的弯扭分析和计算提供了简捷的方法，很有实用价值。

图书在版编目（CIP）数据

弹性薄壁梁桥分析/倪元增，钱寅泉著．–北京：人民交通出版社，2000
ISBN 7-114-03573-X

Ⅰ．弹…　Ⅱ．①倪…　②钱…　Ⅲ．薄壁结构-梁桥-弹性分析　Ⅳ．U448.21

中国版本图书馆CIP数据核字（2000）第10060号

弹性薄壁梁桥分析
倪元增　钱寅泉　著
版式设计：周　园　责任校对：戴瑞萍　责任印制：张　凯
人民交通出版社出版发行
（100013　北京和平里东街10号　010　64216602）
各地新华书店经销
北京牛山世兴印刷厂印刷
开本：850×1168　1/32　印张：6.875　字数：178千
2000年6月　第1版
2000年6月　第1版　第1次印刷
印数：0001—3100册　定价：18.00元
ISBN 7-114-03573-X
U·02575

前言

这是一本用截面板元位移模式法的概念来分析弹性薄壁梁桥的各种基本变形特性，从而建立起相应的计算方法的专著。它是作者多年来在教学和科研工作中的总结，是在为研究生授课所编写的讲义的基础上，从概念上加以归纳和深化而重新编写的，因而是一本可供工程师们继续学习的教科书。

本书首先从预备知识入手，回顾了应变和应变能的概念，引入了变分法，此是建立各种控制方程的有效工具。精确的解析解以及近似的有限元法和 Galerkin(加辽金)法解，是本书要分别应用的基本解法，亦在第一章的分析应用中加以介绍。为便于工程师的学习备忘，章末简要地附有：附 I——两个微积分法则；附 II——任意区间上的三角级数；附 III——直梁的杆件有限元法。

第二章是形成截面板元位移模式法的概念。利用截面板元，简易地解决了大曲率弯梁的应变分析问题，建立起更深层次的应变和应变曲率与初曲率的关系，为薄壁弯桥分析打下了基础。该章归纳的形导函数乘积的三种积分类型，是计算截面刚度矩阵的有效手段。

在薄壁梁桥的拉压弯、扭转与扭翘、剪滞及畸变的基本变形中，拉压弯作为最简单的平截面模式，在第二章进行了研究。在第三章接着来研究扭转与扭翘。板元的自身扭曲，是分离于中面的扭翘，存在着自身扭曲的切应变是刚性截面扭转角的二倍关系。通过截面板元的位移函数，在全截面确定扭翘位移模式，这是本书的又一特色。

第四章的剪滞分析，研究了剪滞翘曲的近似位移函数、剪滞翘曲位移函数的幅值与翼板板元的宽度和至中和轴距离的关系、全

截面剪滞翘曲位移模式与轴向拉压的耦联与解耦这三个问题。

第五章对弹性薄壁梁桥建立了按刚性截面分析的控制方程。对于段元法方程，可分建立变形分量截面刚度矩阵和段元节点位移分量的段元刚度矩阵两个阶段。三截面方程的等带宽存储及其求解方法，便于实用。按截面板元算出的内力，便于钢筋混凝土梁的配筋设计，这亦是板元模式法的一个优点。

截面畸变分离于刚性截面的整体分析，在第六章中形成了如下一系列概念：截面畸变可用各肋梁间的相对错动位移来描述；截面的等效平面框架上各节点的线位移分量，可按机动分析与错动位移建立关系；实际畸变位移是错动位移的一半；畸变内力在全截面应构成内力自平衡；对于弯梁还应考虑腹板的畸变转角的附加效应，这些皆被算例一一证实。利用畸变方程还可作所需的横隔数的分析。

第七章用板元模式段元法列出了几个算例作检验比较。对于单室矩形弯箱梁的简化方程可供简支梁实用。

第八章的肋板式多肋T梁桥，与箱梁桥有所差异的是在畸变中应考虑各肋梁的扭转角，还可以按刚接梁法直接建立控制方程。

在前面的研究中未尽的一些问题，放在第九章一并加以讨论，以提供处理的方法。

最后的第十章是板元模式段元法的程序实施要点，它亦可以起到概括一下板元模式段元法概念的作用。此法是本书落实于工程设计的实用算法。对于一般的有限元法或有限条法，其输出结果，工程师要考虑结构受力的机制和从中寻求各种变形因素相互之间的关系是困难的，会导致忽略对结构特性的真正把握。板元模式法则克服了此一弊端，有利于工程师进行概念设计。

阅读本书的各章，可先读其小结，便于掌握要点。本书如果能使读者对弹性薄壁梁桥的分析，形成一个清晰而完整的概念，是作者的愿望。但作者水平有限，书中难免有不当与错误之处，恳请赐教。本书的出版得到了刘效尧高级工程师和吴德心副总编辑的大力支持，在此深表感谢。

目　录

第一章 预备知识

§1-1 引 言

本书研究弹性薄壁梁桥的应力应变分析,需要运用弹性力学的变分原理[1],本章作为预备知识给以简述之。

由于某些函数的物理意义,常常使得与其性状有关的某种泛函取驻值。如弹性力学中的最小势能原理:在所有的容许位移函数中,真实的位移使总势能取极小值。在此,总势能是容许位移场函数的函数,即泛函。变分法就是在一组容许函数中选定一个函数,使给定的泛函取驻值。弹性力学问题可以通过泛函的驻值条件,提供问题的控制微分方程和边界条件,如从最小势能原理的驻值条件导出弹性平衡方程和求解边界条件。由于能量泛函具有明确的物理意义,且在坐标变换中保持不变,可方便地推出各种坐标系表示的控制微分方程和求解边界条件。它亦容易地对能量泛函采用直接法求解,如用有限元法建立弹性体的节点平衡方程,求得近似解。

§1-2 应 变 能

以一弹簧为例,如图 1-1 所示,其弹簧常数为 k,弹簧从自由状态的零伸长到 Δ,弹簧力与伸长 u 成正比例变化,即 $P = ku$。于是,该弹簧储存了应变能

$$U = \int_0^{\Delta} k\, u \mathrm{d}u = \frac{1}{2} k\Delta^2 \tag{1-1}$$

取单元体的简单应变，线弹性模量和剪切模量分别为 E 和 G，而 $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$，μ 为泊桑比。图 1-2a 为简单线应变，有单位体积的应变能

$$U_0=\int_0^{\varepsilon}\sigma \mathrm{d}\varepsilon=\int_0^{\varepsilon}E\varepsilon \mathrm{d}\varepsilon$$

$$=\frac{1}{2}E\varepsilon^2=\frac{1}{2}\sigma\varepsilon \tag{1-2}$$

图 1-2b 为纯剪切应变，有单位体积应变能

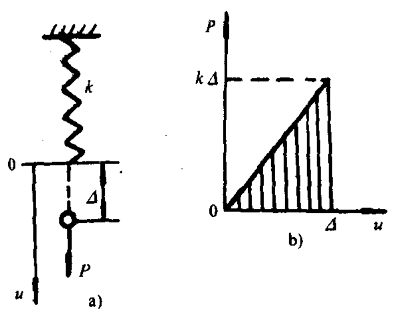


图 1-1　弹簧模型

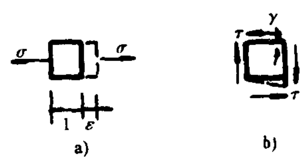


图 1-2　单元体简单应变

$$U_0=\int_0^{\gamma}\tau \mathrm{d}\gamma=\int_0^{\gamma}G\gamma \mathrm{d}\gamma=\frac{1}{2}G\gamma^2=\frac{1}{2}\tau\gamma \tag{1-3}$$

在直角坐标系中，各应变分量及应力分量彼此正交。对于复杂应力状态，单位体积应变能为

$$U_0=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}) \tag{1-4}$$

取一单位长度的等截面直杆，如图 1-3 所示，横截面积为 A，

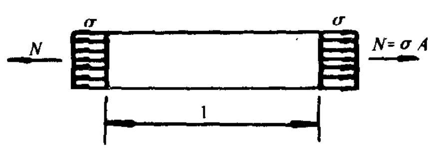


图 1-3　简单拉伸

轴力为 N，横截面上有均匀分布的正应力 σ，轴向有均匀的线应变 ε，单位体积应变能 $U_0 = E\varepsilon^2/2$，则该直杆有应变能

$$U = \int_A U_0 \mathrm{d}A = \frac{1}{2} EA\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\frac{N^2}{EA} \tag{1-5}$$

取一单位长度的矩形等截面直梁，如图 1-4 所示，按平截面假

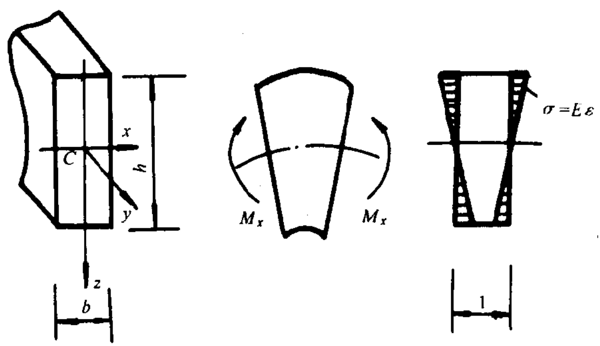


图 1-4 纯弯曲

设，有线应变 $\varepsilon = -z\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2}$，而应变能

$$\begin{aligned} U &= \int_A \frac{1}{2} E\left(z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2}\right)^2 \mathrm{d}A \\ &= \frac{E}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2}\right)^2 \int_A z^2 \mathrm{d}A = \frac{EI_x}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2}\right)^2 \end{aligned} \tag{1-6}$$

式中：$I_x = \int z^2 \mathrm{d}A$，为横截面对主形心轴 x 的惯性矩；

w——为梁的 z 向挠度。

又弯矩

$$M_x = \int_A \sigma z \mathrm{d}A = -EI_x \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}y^2} \tag{1-7}$$

因而，应变能又可写为

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_x^2}{EI_x} \tag{1-8}$$

取一单位长度的圆轴，如图 1-5 所示，按刚性截面假设，剪应变

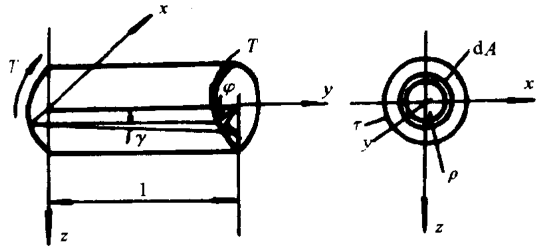


图 1-5　圆轴扭转

$\gamma = \rho \dfrac{d\varphi}{dy}$,有应变能

$$U = \int_A \frac{1}{2} G\left(\rho \frac{d\varphi}{dy}\right)^2 dA$$

$$= \frac{G}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 \int_A \rho^2 dA = \frac{GJ_\rho}{2}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 \tag{1-9}$$

式中：$J_\rho = \int_A \rho^2 dA$,为圆截面的极惯矩。

又扭矩

$$T = \int_A \tau\rho dA = GJ_\rho \frac{d\varphi}{dy} \tag{1-10}$$

因而,应变能又可写为

$$U = \frac{1}{2}\frac{T^2}{GJ_\rho} \tag{1-11}$$

以一单位长度的等截面轴心受力直杆为例,若轴向线应变为 ε_1 和 ε_2 之和,则应变能为

$$U = \frac{1}{2} EA(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2$$

$$= \frac{1}{2} EA\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2} EA\varepsilon_2^2 + EA\varepsilon_1\varepsilon_2 \tag{1-12}$$

可见对于线性弹性体,应变具有叠加关系,而应变能不存在叠加关系,一般具有耦联项 $\varepsilon_1\varepsilon_2$。

再取一单位长度的矩形等截面直梁,承受轴力 N_y、变矩 M_x 和 M_z 作用,Cxz 为横截面主形心坐标。对应于 N_y、M_x 和 M_z 的某

点的轴向线应变分别为$\frac{dv}{dy}$、$-z\frac{d^2w}{dy^2}$和$-x\frac{d^2u}{dy^2}$，u、v和w分别为x、y和z轴的位移分量。根据应变的叠加关系，有轴向线应变

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_y &= \frac{dv}{dy} - z\frac{d^2w}{dy^2} - x\frac{d^2u}{dy^2} \\
&= v' - zw'' - xu''
\end{aligned}
\tag{1-13}
$$

于是有应变能

$$
\begin{aligned}
U &= \int_A \frac{1}{2}E(v' - zw'' - xu'')^2 dA \\
&= \frac{1}{2}EA(v')^2 + \frac{1}{2}EI_x(w'')^2 + \frac{1}{2}EI_z(u'')^2
\end{aligned}
\tag{1-14}
$$

式中：$I_x = \int_A z^2 dA$；$I_z = \int_A x^2 dA$。

该式对于横截面主形心坐标系 Cxz，其静面矩 $S_x = \int_A z dA = 0$，$S_z = \int_A x dA = 0$ 以及惯性积 $I_{xz} = \int_A xz dA = 0$，使直梁的轴向变形和两向弯曲的应变能彼此独立，无耦联关系，即存在正交性，此时有叠加关系。

又取一单位长度的圆轴，承受弯矩 M_x 和扭矩 T_y 作用，Cxz 为圆截面的形心坐标，如式(1-4)所示，线应变与剪应变存在正交性，其应变能彼此独立，有叠加关系，即

$$
U = \frac{1}{2}EI_x(w'')^2 + \frac{1}{2}GJ_\rho(\varphi')^2 \tag{1-15}
$$

§1-3 弹性体系的总势能和最小势能原理

对于弹性体系的杆件，应变能为弹性势能。对于外荷载则具有重力势能。现在考虑的外力，可以是广义力，且皆视为具有重力势能。取对应的位移或广义位移的参考零点，外力对应于位移的功与该外力的势能反号。如外力 P 与位移 u 的正方向一致，外力矩 M 与转角 φ 的正方向一致，则其势能分别为

$$
V_p = -Pu \tag{1-16}
$$

$$V_m = -M\varphi \tag{1-17}$$

弹性体系的总势能 Π 为应变能 U 与外力势能 V 之和,即

$$\Pi = U + V \tag{1-18}$$

对于悬挂一重物 P 的弹簧,如图 1-6 所示,有弹簧常数 k,该体系的总势能为

$$\Pi = \frac{1}{2}ku^2 - Pu \tag{1-19}$$

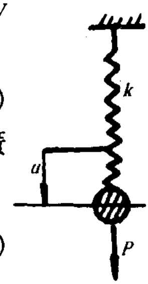


图 1-6　弹簧体系

对于如图 1-7 所示的直梁体系,承受双向弯曲的横向分布荷载 q_x 和 q_z,扭转分布力矩 m_y,分布轴向荷载 q_y,以及滑动铰支端的 N_l、M_{xl}、M_{zl}和 T_l,其总势能为

$$\begin{aligned}\Pi = &\frac{1}{2}\int_0^l (EA(v')^2 + EI_x(w'')^2 + EI_z(u'')^2 + GJ_\rho(\varphi')^2)\mathrm{d}y \\ &- \int_0^l (q_y v + q_z w + q_x u + m_y \varphi)\mathrm{d}y \\ &- N_l v(l) - M_{xl}w'(l) - M_{zl}u'(l) - T_l\varphi(l)\end{aligned} \tag{1-20}$$

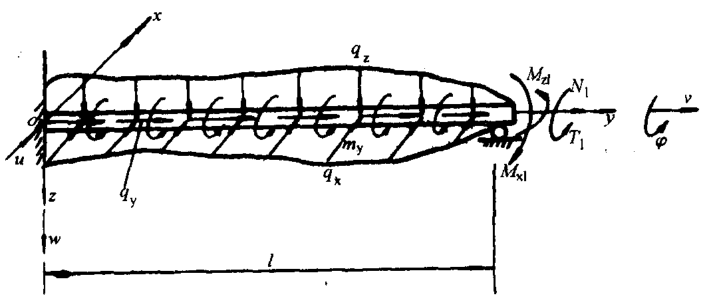


图 1-7　直梁体系

对于一般的各向同性弹性体,由式(1-4)和广义虎克定律,可求得单位体积应变能

$$\begin{aligned}U_0 = &\frac{E\mu}{2(1+\mu)(1-2\mu)}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 \\ &+ G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + \frac{G}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\end{aligned} \tag{1-21}$$

可见,弹性应变能是应变分量的正定函数。

以图 1-6 的弹簧体系为例,式(1-19)的总势能 Π 为简单变量

u 的函数。对 u 求 Π 的极小值,即

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}u} = ku - P = 0 \tag{1-22}$$

此为该弹性体系的平衡方程。再求一次导数,得

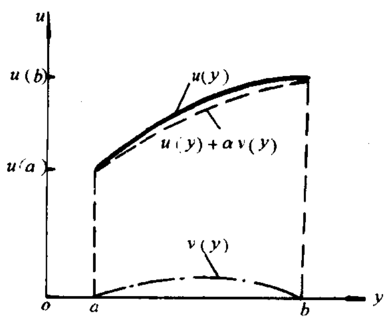
$$\frac{\mathrm{d}^2\Pi}{\mathrm{d}u^2} = k > 0 \tag{1-23}$$

可见平衡方程为总势能的极小值条件,两者是等价的。它可归结为最小势能原理:在所有满足给定几何边界条件的容许位移 u、v 和 w 中,真实的位移使总势能取极小值。

在一般的弹性体系中,如总势能式(1-20),容许的位移是空间点的函数,是一族位移场,总势能为该族位移函数的函数,即泛函。在该族位移函数中使泛函取极小值的是真实的处于弹性平衡状态的位移场。而求某一函数使泛函有极小值,这是数学中的变分问题。

§1-4 变 分 法

在变分法中,通常用 δu 来表示 u 的变分,u 为自变函数。譬如 u 为一位移场,对于直梁则 $u(y)$ 为一挠曲线,如图 1-8 所示,并有端点条件 $u(a)$ 和 $u(b)$。在给定的端点条件下,该位移曲线容许改变为 $u(y)+\alpha v(y)$,而 $v(y)$ 为容许改变的位移曲线,有端点条件 $v(a)=v(b)=0$。于是 u 的变分 δu 为[2]



$$\delta u = \alpha v \tag{1-24}$$

图 1-8 位移曲线的变分关系

其中 α 是任意小的实数,意味着 u 的改变是任意小的。同时,对 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$、$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}$、…亦视为独立的自变函数,可有变分为

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)=\alpha\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y},\delta\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}\right)=\alpha\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}y^2},\cdots \tag{1-25}$$

δ 称为变分算子,而 δu、$\delta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)$、…称为 u、$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$、…的一阶变分。

引入任意小的实数 α 后,泛函 $F=F(y,u,u')$成为 $F=F(y,u+\alpha v,u'+\alpha v')$,即为 α 的函数,求极值时即作微分运算:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}F(y,u+\alpha v,u'+\alpha v')=\frac{\partial F}{\partial u}v+\frac{\partial F}{\partial u'}v' \tag{1-26}$$

此式遵循复合函数求导规则。将此式乘以 α,并考虑到式(1-24)、(1-25),现可定义:泛函 $F=F(y,u,u')$的一阶变分为

$$\begin{aligned}\delta F&=\alpha\left(\frac{\partial F}{\partial u}v+\frac{\partial F}{\partial u'}v'\right)\\&=\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial u'}\delta u'\end{aligned} \tag{1-27}$$

应该注意到,在变分运算中自变量 y 坐标不变,只对自变函数求变分。遵此,变分的运算法则与微分的运算法则相似,只要用 δ 算子取代 d 算子。变分算子亦能与微分和积分算子交换:

① $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\delta u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(\alpha v)=\alpha\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\delta\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right) \tag{1-28}$$

② $$\delta\left(\int_l u\mathrm{d}y\right)=\alpha\int_l v\mathrm{d}y=\int_l \alpha v\mathrm{d}y=\int_l \delta u\mathrm{d}y \tag{1-29}$$

二阶变分按定义为

$$\begin{aligned}\delta^2F&=\delta(\delta F)\\&=\alpha^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\partial F}{\partial u}v+\frac{\partial F}{\partial u'}v'\right)\\&=\alpha^2\left(\frac{\partial^2F}{\partial u^2}v^2+2\frac{\partial^2F}{\partial u\partial u'}vv'+\frac{\partial^2F}{(\partial u')^2}(v')^2\right)\\&=\frac{\partial^2F}{\partial u^2}(\delta u)^2+2\frac{\partial^2F}{\partial u\partial u'}\delta u\delta u'+\frac{\partial^2F}{(\partial u')^2}(\delta u')^2\end{aligned} \tag{1-30}$$

现求泛函

$$I(u)=\int_a^b F(y,u,u')\mathrm{d}y,\ u'=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{1-31}$$

的驻值条件 $\delta I=0$。有