

А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, П. Е. Дворчанинский

# МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Физматгиз, Москва, 1962

## 內容簡介

量子統計物理学研究处于低温下的多粒子系統。近几年来在这个领域中进展很大,这主要是因为应用了量子場論的数学方法。这些方法的基础——图解法——具有高度的直观性,并且能够使复杂的运算“自动”进行。用这些方法解决了許多从前无法处理的重要物理問題。

本书叙述了这些新方法和最近以来所得的新結果,較多地反映了苏联兰道院士的学派所获得的成果。本书的对象是理論物理、固体物理和低温物理方面的科学工作者,研究生和高年级大学生。

## 統計物理学中的量子場論方法

A. A. 阿布里科索夫  
Л. П. 戈尔可夫 著  
И. Е. 加洛辛斯基  
郝柏林 譯

科学出版社出版 (北京朝陽門大街117号)

北京市书刊出版业营业登记证出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1963年12月第一版  
1963年12月第一次印刷  
册:1—2,900  
平:1—2,800

书号:2835  
字数:308,000  
开本:850×1168 1/32  
印张:11 3/4 插以:3

定价: 精装本 2.50元  
平装本 2.00元

## 目 录

譯者說明	ii
序言	ix
第一章 多粒子系統在低温下的一般性質	1
§ 1. 元激发。液体 He <sup>4</sup> 在低温下的能譜和性質	1
1. 引言。准粒子(1)。 2. 玻色液体的能譜(5)。 3. 超流(10)。	
§ 2. 費米液体	15
1. 費米液体中的激发(15)。 2. 准粒子能量(18)。 3. 声波(23)。	
§ 3. 二次量子化	28
§ 4. 稀薄玻色气体	31
§ 5. 稀薄費米气体	37
第二章 T = 0 时的量子場論方法	44
§ 6. 相互作用表象	44
§ 7. 格林函数	52
1. 定义。自由粒子的格林函数(52)。 2. 解析性质(56)。 3. 极点的物理意义(60)。 4. 系統在外場中的格林函数(65)。	
§ 8. 图解法的基本原則	66
1. 从变量 N 到变量 M 的变換(66)。 2. 維克定理(67)。 3. 費曼图(70)。	
§ 9. 各种类型相互作用的构图規則	74
1. 坐标空間中的图解法。举例(74)。 2. 动量空間中的图解法。举例(83)。	
§ 10. 戴逊方程。頂角部分。多粒子格林函数	88
1. 图形求和。戴逊方程(88)。 2. 頂角部分。多粒子格林函数(93)。	
3. 基态能量(99)。	
第三章 T > 0 时的图解法	101
§ 11. 溫度格林函数	101
1. 一般性質(101)。 2. 自由粒子溫度格林函数(106)。	

## 譯者說明

本書根據1962年俄文初版譯出。原作者為即將出版的英文譯本作了若干補充與修正，這些修正主要涉及 §§16, 17, 19, 21, 22 和 39；特別 §21 和 §22.3 是完全改寫了的，§19.6 是新增的。原作者友好地提供了以上諸節的訂正稿，因而這個譯本中得以作了相應訂正，特此志謝。

譯稿承以下同志校閱：霍崇儒（第一章），章思俊（第二、三章），霍裕平（第四章），陳式剛（第五章），陳春先（第六章），于潑（第七章）。謹志謝意。

譯者

1963年8月，北京。

## 序 言

最近由于广泛应用了量子場論中的方法，統計物理学有相当大的进展。这些方法的优越性，在于微扰論的新表述法，首先是所謂費曼图的广泛应用。图解法的基本优点是它的直观性：运用单粒子問題的概念，这个方法可以确定任意級近似的結構，并借助对应規則写出所需的表达式。新方法解决了大量旧理論无法考慮的問題，还得出許多新的一般关系，它是目前量子統計中最有力最有成效的方法。

現在，关于量子統計中場論方法的表述，及其对具体問題的应用，杂志文献已浩如烟海。但同时在統計物理工作者中，新方法还没有为人所共知。因此我們以为，已經有必要系統和尽可能全面地叙述这些問題，以饗广大讀者。

关于本书取材，我們首先力图显示新方法的实用性。因此书中除了詳細叙述数学工具外，还討論了量子統計的各种具体問題。当然，我們涉及的問題，还远不是近几年来这个領域中新結果的总汇。材料的取舍，决定于它們的物理意义和借以演示一般方法的可能性。

我們只限于量子統計的場論表述的一种方案（例如，书中未提及所謂三維微扰論等等）。照我們看来，本书采用的格林函数方法是最簡便的。

我們假定，讀者知道統計物理学和量子力学的基础。书中叙述了二次量子化方法和推导場論方法所必需的一切知識。在推导場論方法之前，第一章里簡述了关于能譜性質的某些現代概念，并舉了一些簡單例子。

书中采用  $\hbar = 1$  的单位制。温度以能量单位表示 ( $k = 1$ )。

兰道 (Л. Д. Ландау) 院士和皮达也夫斯基 (Питаевский) 对本书涉及的問題作过許多宝贵的討論，作者向他們表示感谢。

А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, П. Е. Дзялошинский

# МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Физматгиз, Москва, 1962

## 內容簡介

量子統計物理学研究处于低温下的多粒子系統。近几年来在这个領域中进展很大,这主要是因为应用了量子場論的数学方法。这些方法的基础——图解法——具有高度的直观性,并且能够使复杂的运算“自动”进行。用这些方法解决了许多从前无法处理的重要物理問題。

本书叙述了这些新方法和最近以来所得的新結果,較多地反映了苏联兰道院士的学派所获得的成果。本书的对象是理論物理、固体物理和低温物理方面的科学工作者,研究生和高年级大学生。

## 統計物理学中的量子場論方法

А. А. Абрикосов  
Л. П. Горьков  
П. Е. Дзялошинский 著

郝柏林譯

科学出版社出版 (北京朝陽門大街117号)

北京市书刊出版业营业登记证出字第061号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

1963年12月第一版

1963年12月第一次印刷

册:1-2,900

张:1-2,800

书号:2835

字数:308,000

开本:850×1168 1/32

印张:11 3/4 插页:3

定价: 精装本 2.50元  
平装本 2.00元

## 目 录

譯者說明	ii
序言	ix
第一章 多粒子系統在低温下的一般性質	1
§ 1. 元激发, 液体 He <sup>4</sup> 在低温下的能譜和性質	1
1. 引言, 准粒子(1), 2. 玻色液体的能譜(5), 3. 超流(10).	
§ 2. 費米液体	15
1. 費米液体中的激发(15), 2. 准粒子能量(18), 3. 声波(23).	
§ 3. 二次量子化	28
§ 4. 稀薄玻色气体	31
§ 5. 稀薄費米气体	37
第二章 $T = 0$ 时的量子場論方法	44
§ 6. 相互作用表象	44
§ 7. 格林函数	52
1. 定义, 自由粒子的格林函数(52), 2. 解析性质(56), 3. 极点的物理意义(60), 4. 系統在外場中的格林函数(65).	
§ 8. 图解法的基本原則	66
1. 从变量 $N$ 到变量 $\mu$ 的变换(66), 2. 維克定理(67), 3. 費曼图(70).	
§ 9. 各种类型相互作用的构图規則	74
1. 坐标空間中的图解法, 举例(74), 2. 动量空間中的图解法, 举例(83).	
§ 10. 戴逊方程, 頂角部分, 多粒子格林函数	88
1. 图形求和, 戴逊方程(88), 2. 頂角部分, 多粒子格林函数(93), 3. 基态能量(99).	
第三章 $T > 0$ 时的图解法	101
§ 11. 溫度格林函数	101
1. 一般性質(101), 2. 自由粒子溫度格林函数(106).	

§ 12. 微扰論.....108	1. 相互作用表象(108). 2. 維克定理(111).
§ 13. 坐标空間中的图解法, 举例.....116	
§ 14. 动量空間中的图解法.....126	1. 动量表象(126). 2. 举例(129).
§ 15. 热力学势 $\Omega$ 的微扰論級数.....137	
§ 16. 戴逊方程, 多粒子格林函数.....142	1. 戴逊方程(142). 2. 格林函数和热力学势 $\Omega$ 的关系(147).
§ 17. $T > 0$ 的时间格林函数, 格林函数的解析性質 .....151	
第四章 費米液体理論 .....163	
§ 18. 动量传递很小时頂角部分的性質, 零声, .....163	
§ 19. 有效质量, 边界动量和粒子数的关系, 能譜的玻色支, 比热.....169	1. 几个輔助关系式(169). 2. 費米液体理論基本关系的証明(172). 3. 能譜的玻色支(174). 4. 边界动量 $p_0$ 和粒子数关系的另一推导 法(176). 5. 比热(179). 6. 費米液体中准粒子的衰減(183).
§ 20. 相碰粒子总动量很小时頂角部分的奇异性.....188	
§ 21. 电子和声子的相互作用.....192	1. 頂角部分(192). 2. 声子格林函数(194). 3. 电子格林函数(198). 4. 电子比热綫性項的修正(204).
§ 22. 隔井等离子体的某些性質.....205	1. 問題提法(205). 2. 动量传递小的頂角部分(207). 3. 电子能 譜(212). 4. 热力学函数(218).
第五章 相互作用玻色粒子系統 .....221	
§ 23. 绝对温度零度时应用場論方法于玻色粒子系統.....221	
§ 24. 格林函数.....230	1. 方程式的結構(230). 2. 格林函数的解析性質(234). 3. 动量 很小时格林函数的性質(238).
§ 25. 稀薄非理想玻色气体.....239	1. 图解法(239). 2. 化学势和单粒子格林函数自能部分的关系(241). 3. 低密度近似(244). 4. 有效相互作用势(248). 5. 低密度近似 下玻色气体的格林函数, 能譜(251).
§ 26. 单粒子激发譜在其終点附近的性質.....253	1. 問題提法(253). 2. 方程組(254). 3. 产生声子的閾点附近譜

的性質(257). 4. 裂变成两个动量下行且不为零的元激发时, 閾点  
附近譜的性質(260). 5. 两个激发以一定角度飞出的裂变(262).

§ 27. $T > 0$ 时場論方法应用于有相互作用的玻色粒子系統 .....264
---

## 第六章 吸收介質中的电磁輻射 .....270

§ 28. 吸收介質中輻射的格林函数.....270	
§ 29. 介电常数的計算.....278	
§ 30. 不均匀电介質中的范德瓦尔斯力.....281	
§ 31. 固体間的分子作用力.....287	1. 固体間的相互作用力(287). 2. 液体中原子間的相互作用力(294). 3. 固体表面上的薄膜(297).

## 第七章 超导理論 .....299

§ 32. 概論, 模型的选择.....299	1. 超导現象(299). 2. 模型, 相互作用哈密頓量(300).
§ 33. Cooper 現象, 无相互作用費米粒子系統基态对粒子間任意 弱吸引的不稳定性.....303	1. 頂角部分的方程(303). 2. 頂角部分的性質(306). 3. 轉变温 度的确定(308).
§ 34. 超导体的基本方程組.....310	1. 绝对温度零度的超导体(310). 2. 有外电磁場存在时的方程, 规范不变性(316). 3. 温度高于零的超导体(317).
§ 35. 声子模型中超导理論方程組的推导.....319	
§ 36. 超导体的热力学.....323	1. 能隙和温度的关系(323). 2. 超导体的热力学(325).
§ 37. 在弱电磁場中的超导体.....328	1. 弱恒定磁場(328). 2. 交变場中的超导体(335).
§ 38. 任意磁場中的超导体在轉变温度附近的性質.....341	
§ 39. 超导合金理論.....347	1. 問題提法(347). 2. 正常金属的剩余电阻(348). 3. 超导合金 的电磁性質(356).

文献 .....364
-------------

外国人名对照表 .....367
------------------

## 第一章 多粒子系統在低溫下的一般性質

### § 1. 元激发. 液体 $\text{He}^4$ 在低溫下的能譜和性質

1. 引言. 准粒子. 統計物理研究由大量粒子組成的系統的行為. 液体、气体和固体的宏观性質最終是由組成這些系統的粒子間的微观相互作用决定的. 显然, 要解决包括决定每个粒子的行為在內的完整問題, 是无法設想的. 但系統的总的宏观特征只由某些平均量决定.

为了确定起見, 讓我們討論热力学性質. 系統的宏观状态可以用三个独立的热力学变量决定, 例如, 可以由給定压力  $P$ 、温度  $T$  和系統內的平均粒子数  $N$  来决定. 从量子力学观点看,  $N$  个粒子組成的封閉系統由其能級  $E_n$  描述. 試从系統中分出某个部分, 但要使新的子系还能当作是宏观的. 由于这样一个子系中的粒子数还很多, 而粒子間的作用力只在原子距离上有效, 因此忽略边界效应后, 就可以认为子系是封閉的, 可用子系中粒子数一定时的能級来描述. 事实上, 因为这个子系和原来封閉系統內的其它粒子相互作用着, 因而它的能量和粒子数都不是严格确定的, 它处于任何一个能級上的几率都是大于零的.

由統計物理中知道(參看[1])<sup>1)</sup>, 热力学公式的微观推导基于所謂吉布斯分布, 它給出子系处于能量为  $E_{nN}$ 、粒子数为  $N$  的状态的几率:

$$w_{nN} = Z^{-1} e^{-\frac{E_{nN} - \mu N}{T}} \quad (1.1)$$

这个式子里  $T$  是绝对温度,  $\mu$  是化学势, 而  $Z$  是由以下条件决定的

1) 參閱[79], 第 92 頁. ——譯者注.

同一因子:

$$\sum_{sN} \omega_{sN} = 1. \quad (1.2)$$

由(1.1)式得

$$Z = \sum_{sN} e^{-\frac{E_{sN}-N\epsilon}{T}}. \quad (1.3)$$

$Z$ 称为总统计和。如果能级  $E_{sN}$  已知, 则统计和可以求出。由此可立即得到热力学函数, 因为  $Z$  和热力学势  $Q$  (以  $V, T, \mu$  为独立变量的势) 的关系是

$$Q = -T \ln Z. \quad (1.4)$$

理想气体的热力学函数显然很容易用上式算得, 因为其能量是个别粒子能量之和。对于粒子间有相互作用的多粒子系统, 通常不能求得能级。因此直到目前在量子统计中, 只有相互作用充分弱时, 才成功地考虑了粒子间的相互作用。用微扰论计算热力学函数时, 实际上只能得到前一二级近似。对于相互作用并不弱的大多数物理问题, 直接利用公式(1.1)–(1.4)是一条不现实的途径。

温度极低时情况比较特殊。当  $T \rightarrow 0$  时只有距基态比较近的能级(低激发态)才在统计和中起主要作用。在这个能量范围内, 根据一些很普遍的、与粒子间相互作用的数值和特点无关的概念, 就可以相当细致地确定系统的能谱。

为了使以后的讨论更为清晰, 我们以晶格振动激发为例。只要振动是微弱的, 晶格就可以看成耦合简谐振子的集合。引入简正坐标后, 我们得到  $3N$  ( $N$  是原子数) 个本征频率为  $\omega_i$  的线性振子。按照量子力学, 这个系统的能谱由公式  $E = \sum_{i=1}^{3N} \omega_i \left( n_i + \frac{1}{2} \right)$  给出, 式中  $n_i$  为任意正整数或零。  $n_i$  的不同取法给出系统的不同能级。

晶格振动可以描写成在晶体内传播的单色平面波的迭加。每个波有一定的波矢、频率和决定振动类型的标号  $s$ 。由于在晶体

内可能有各种类型的波传播, 频率  $\omega$  就不再是波矢  $k$  的单值函数, 而由几个支  $\omega_i(k)$  合成; 支的总数是  $3r$ ,  $r$  是每个晶胞内的原子数。当动量较小时这些支中有三个支(称为声学支)的特点是频率与波矢呈线性关系  $\omega_i(k) = u_i(\theta, \varphi) |k|$ 。其它各支的曲线  $\omega_i(k)$  开始于  $k=0$  时的某个不为零的数值, 同时当波矢较小时它与  $k$  的关系很弱<sup>1)</sup>。

知道频谱、能级和晶格原子位移(振子坐标)的矩阵元后, 至少在原则上完全可能算得晶格的热力学和动力学特征。然而实际上更为方便的办法, 是利用从量子力学对应原理得出的另一个等价图象, 来代替耦合振子图象。由对应原理知道, 每个平面波相当于运动着的“粒子”的集合。波矢  $k$  决定这些粒子的动量<sup>2)</sup>, 而频率  $\omega_i(k)$  决定它们的能量<sup>3)</sup>。晶格激发态可以设想成这些“粒子”的总合(它们称为声子), 它们在物体体积内自由运动。这正和前面给出的系统的能级表达式一致, 而后者又和理想气体的能量相似。

数字  $n_i$  可解释为处于状态  $i$  ( $i = (k, s)$ ) 中的声子数目。它们可以取任意值。由此看出, 即令组成晶格的原子具有半整数自旋, 声子还是服从玻色统计。

在极低温度下低能声子起最主要的作用。从前面关于频谱各支的叙述可知, 能量最低的声子相当于声学支的动量较小的部分。这时  $\omega(k)$  是线性关系。仅仅由这一个事实就可以作出许多定性结论, 例如晶格比热遵从  $T^3$  律。

进行定量计算时, 常常用所谓德拜各向同性模型代替实际晶格的频谱。这个模型把谱的低频部分的三个声学支代之以各向同性物体的频谱, 即能量为  $\omega_i(k) = u_i k$  的纵声子和能量同为  $\omega_i(k) = u_i k$ 、但具有两种可能偏振的横声子。此外还认为声子动

1) 关于晶格振动谱的詳細情况, 可参看派尔斯(R. E. Peierls)的书[2]。  
2) 实际上  $k$  不是动量, 而是“准动量”(见[2])。但这里这种差别并不重要。  
3) 再提提一次, 在我们所取的单位制中  $\hbar = 1$ 。这就是说能量的量纲是[秒]<sup>-1</sup>, 而动量的量纲是[厘米]<sup>-1</sup>。为了回到通用的单位, 只须将各个能量和动量都乘以  $\hbar$ 。

量不能超过某个临界值  $k_0$ , 它决定于保持正确自由度数目的归一条件。显然  $k_0 \sim \frac{1}{a}$ ,  $a$  是原子間距离。这个模型导致著名的固体比热德拜內插公式。以后我們要用这个模型研究金属內的电子声子相互作用。

如果在振动晶格的位能中計入微小的非簡諧項, 則前面的能量表达式不再是准确的。具有不同的  $n_i$  的諸状态間出現一定的跃迁几率。利用声子概念, 这可以解释为声子間的各种相互作用过程, 其結果是声子互相散射和产生新的声子。換句話說, 在作严格討論时声子只能近似地看成自由运动的粒子。

温度升高, 振动幅度增加, 非簡諧項的作用也随之俱增。在声子图象中, 温度上升时声子数目增多, 因而声子間作用也益增。因此, 声子作为自由运动粒子的这种概念, 只适用于温度不太高的范围(远低于熔点)。

現在討論一般情况。与上面的例子相似, 探討系統低激发态能譜图象的基础是假定在一級近似下能級与理想气体能級相应。換言之, 就是假定任何一个能級都是若干“准粒子”或元激发的能量之和, 它們在物体內运动并具有动量  $p$  和能量  $\epsilon(p)$  (一般地說, 元激发的色散律  $\epsilon(p)$  与自由粒子的能量表达式  $\epsilon_0(p) = \frac{p^2}{2m}$  不

同)。应当立即強調指出, 元激发是由于系統內粒子的集体作用而产生的, 因此属于整个系統, 而不属于个别粒子。元激发数目也完全不必等于系統內的粒子总数。

所有能譜可以分为两大类——玻色型譜和費米型譜。在第一种情况下元激发具有整数內禀动量矩(自旋)并服从玻色統計。在第二种情况下元激发具有半整数自旋并遵从費米統計。由量子力学知道, 任何系統的动量矩只能作整数改变。由此看出, 玻色激发可以单个地出現与消失, 而費米激发必須成对。

前面关于晶格振动的例子中已指出, 元激发的統計不必与組成系統的粒子的統計一致。显而易見的只是, 玻色系統不能具有

半整数自旋的激发。

元激发并不对应于系統的确切稳定态, 而是大量能量差别很小的准确稳定态的迭加(波包)。因此系統有一定几率从一个态跃迁到另一个态, 这就使波包扩散, 元激发衰減。所以只有当波包的能量寬度(它决定衰減)比能量本身小得多时, 用元激发来描述系統才是合理的。

波包的扩散和与之相关的元激发衰減可以视为“准粒子”互相作用的结果。这时能量和动量守恒律是成立的。这些过程可以分为一个元激发“裂变”为几个另外的元激发的过程, 以及元激发彼此間的“散射”过程。

以后我們將看到, 只有能量相当大时才会产生元激发的裂变。而散射过程仅在元激发数目足够多时才成为重要的。由此可見, 在低温下, 当为数极少的低能元激发起主要作用时, 这两类使元激发衰減的过程都是无足輕重的。低温下元激发間的作用弱, 于是可以将它們看作“准粒子”的理想气体。

現在, 基于实验数据和直接的理論計算, 可以认为上述关于能譜結構的概念已是非常确定的事实。当然各种物理对象(例如液态氦的同位素  $\text{He}^3$  和  $\text{He}^4$ , 金属, 电介质等)的能譜也是完全不同的。 $\text{He}^4$  的能譜是玻色型, 而  $\text{He}^3$  和金属电子<sup>1)</sup> 的能譜却属于費米型。

**2. 玻色液体的能譜<sup>2)</sup>** 具有玻色型能譜的系統的例子之一, 是所謂玻色液体, 即由自旋为整数的原子构成的液体。在自然界中只存在着一种这样的液体——液体氦(更确切地說, 是同位素  $\text{He}^4$ ), 它在绝对温度零度也不凝固。由于氦原子  $\text{He}^4$  的自旋为零, 我們实际上只須討論自旋为零的一种情形。

动量数值很小时, 玻色液体元激发能量与动量的关系可以借

1) 为了避免誤解, 我們必須說明, 以后各处討論的都是各向同性的金属模型, 这与实际情况当然相距很远。实际金属的电子能譜是显著各向异性的, 因此本书中所述的許多結果对于它們只有定性意义。

2) 以下所述关于玻色液体能譜的观念是由兰道首先提出来的<sup>1)</sup>。



助一些相当一般的想法来决定。小动量的范围相当于液体的长波振动。而这种振动正是普通声波。由此立刻得到结论：小动量的元激发就是声量子——声子，其能量与动量的关系是熟知的。实际上注意到声波频率  $\omega$  与波矢的关系  $\omega = uk$ ，其中  $u$  是声速，我们立即得到所需的关系式

$$\epsilon = up \quad (1.5)$$

这样，动量很小时或色液体激发能与动量呈线性关系，比例系数就是声速。

动量增大后， $\epsilon(p)$  不再是线性关系，曲线  $\epsilon(p)$  的形状已不能如此简单地确定。因此，下面引述的讨论很有意义，它可以使我们对于任意动量得到一系列关于  $\epsilon(p)$  的结论<sup>1)</sup>。

液体能量是它的密度  $\rho(\mathbf{r})$  和流体力学速度  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  的泛函：

$$E(\rho, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int \rho \mathbf{v}^2 d\mathbf{r} + E^{(0)}(\rho), \quad (1.6)$$

式中  $E^{(0)}$  是与速度无关的那部分能量。让我们讨论微振动。这时  $\rho(\mathbf{r}) = \bar{\rho} + \delta\rho(\mathbf{r})$ ，其中  $\bar{\rho}$  为与坐标无关的平衡密度，而  $\delta\rho(\mathbf{r})$  和  $\mathbf{v}$  是描述振动的微小量。注意到，由定义得

$$\bar{\rho} = \frac{1}{V} \int \rho(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad \int \delta\rho d\mathbf{r} = 0.$$

准确到  $\delta\rho$  和  $\mathbf{v}$  的二级无穷小量，(1.6) 式右端第一项中的函数  $\rho(\mathbf{r})$  可换成平均值  $\bar{\rho}$ 。以同样的准确度可以把  $E^{(0)}$  写成如下形状：

$$E^{(0)}(\rho) = E^{(0)}(\bar{\rho}) + \int \psi(\mathbf{r}) \delta\rho d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \iint \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \delta\rho(\mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.$$

函数  $\psi(\mathbf{r})$  和  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  仅仅由未受振动扰动的各向同性的均匀液体的性质决定，因此函数  $\psi(\mathbf{r})$  应当是常数： $\psi(\mathbf{r}) = \text{常数} = \psi$ ，而  $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  只与  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  有关： $\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ 。所以  $E^{(0)}$  展开式中的一次项正比于  $\int \delta\rho(\mathbf{r}) dV = 0$ 。最终有

1) 下述推导是 Л. П. Питаевский 首先给出的<sup>[1]</sup>。

$$E = E^{(0)}(\bar{\rho}) + \frac{\bar{\rho}}{2} \int \mathbf{v}^2 d\mathbf{r} + \frac{1}{2} \iint \varphi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \delta\rho(\mathbf{r}) \delta\rho(\mathbf{r}') d\mathbf{r} d\mathbf{r}'.$$

速度  $\mathbf{v}$  和密度振动的关系由连续性方程式给出

$$\dot{\rho} + \text{div}(\rho\mathbf{v}) = 0,$$

如果准确到  $\delta\rho$  和  $\mathbf{v}$  的一次项，此式可写为

$$\dot{\rho} + \bar{\rho} \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.7)$$

变换到傅立叶表示：

$$\delta\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \rho_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}},$$

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \varphi_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}},$$

并且考虑到液体微振动总是纵向的，即波矢为  $\mathbf{p}$  的波中速度  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}$  总平行于  $\mathbf{p}$ ：

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = a_{\mathbf{p}} \mathbf{p}.$$

现在由(1.7)式容易求出

$$\mathbf{v}_{\mathbf{p}} = i \frac{\dot{\rho}_{\mathbf{p}}}{\bar{\rho}} \cdot \frac{\mathbf{p}}{p^2}$$

以及

$$E = E^{(0)}(\bar{\rho}) + \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \left( \frac{|\dot{\rho}_{\mathbf{p}}|^2}{2\bar{\rho}p^2} + \frac{1}{2} \varphi_{\mathbf{p}} |\rho_{\mathbf{p}}|^2 \right). \quad (1.8)$$

(1.8) 式中第一项是未扰动液体的能量，而第二项分解为许多项之和，其中每一项就正是频率为  $\omega_{\mathbf{p}}$  的简谐振子的能量

$$\omega_{\mathbf{p}}^2 = \bar{\rho} p^2 \varphi_{\mathbf{p}}. \quad (1.9)$$

这样，我们看到液体的任何振动都分解成元振动——由简谐振子方程描述的元激发。

在量子情况下每个这种振子的能量由下式表示

$$\epsilon_{\mathbf{p}} = \omega_{\mathbf{p}} \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

这样得到的系统的能谱结构完全相当于前面描述过的元激发图象。系统的能谱是不同数量元激发的能量之和；元激发能量  $\epsilon(\mathbf{p})$  与动量的关系由(1.9)式和显而易见的关系  $\epsilon(\mathbf{p}) = \omega_{\mathbf{p}}$  决定。

为了彻底地将问题解出,我们还必须把  $\varphi_p$  通过系统的特征量表示出来。为此必须注意到,量子情况下系统的基态能量并不等于  $E^{(0)}(p)$ , 这是与经典情况不同的,其原因在于这时必须考虑振子的所谓零振动能量。后者对一个振子等于  $\omega_p/2$ 。这样,玻色液体的基态能量等于

$$E_0 = E^{(0)}(p) + \sum_p \frac{\omega_p}{2},$$

其中(见(1.8)式)

$$V \frac{\omega_p}{2} = \frac{1}{2\bar{\rho}p^2} |\dot{\rho}_p|^2 + \frac{1}{2} \varphi_p |\rho_p|^2 = \varphi_p |\rho_p|^2 \quad (1.10)$$

从(1.9)和(1.10)我们立刻得到<sup>1)</sup>:

$$\varepsilon(p) = \omega_p = \frac{p^2}{2mS(p)}, \quad (1.11)$$

这里  $S(p) = \frac{|\rho_p|^2}{Vm\bar{\rho}}$  是所谓密度关联函数

$$S(r-r') = \frac{[n(r) - \bar{n}][n(r') - \bar{n}]}{\bar{n}} \quad (1.12)$$

的傅立叶分量,而  $n(r) = \frac{\rho(r)}{m}$  是单位体积内的粒子数。

虽然  $S(p)$  并不能算出来,从(1.11)式还是可以作出许多关于  $\varepsilon(p)$  形状的重要结论。另一方面,知道  $\varepsilon(p)$  的某些性质后,可以判断函数  $S(p)$  的行为,而后者正好决定液体和各种粒子(中子等,见后面第三章 §17)的相互作用过程。

前面已经提到,动量较小时元激发能量与动量呈线性关系:  $\varepsilon \approx up$ 。由此看出,  $S(p)$  也与动量呈线性关系  $S \approx \frac{p}{2mu}$ 。

当距离很近,或者说动量很大时,函数  $S(p)$  具有已知的(见 [1] §114)形式

$$S(r) = \delta(r) + v(r) \quad (1.13)$$

1) 公式(1.11)是费曼<sup>10)</sup>用另一种方法首先推得的。我们觉得,他所用的方法复杂得多,但并不比上述方法具备更大的普遍性。

其中  $v(r)$  当  $r \rightarrow 0$  时没有奇异性。写成傅立叶分量就得

$$S(p) = 1 + v(p),$$

当  $p \rightarrow \infty$  时,  $v(p) \rightarrow 0$ 。于是动量很大时  $S(p)$  趋向 1, 而

$$\varepsilon(p) \approx \frac{p^2}{2m},$$

也就是元激发能量和液体的自由原子(He<sup>4</sup> 原子)能量一样。

对于动量的中间数值,函数  $S(p)$  可能随着  $p$  的增加而单调地由零上升到 1, 也可能在  $p \sim \frac{1}{a}$  附近通过极大值, 这里  $a$  是原子间

距离(这是考虑量纲而得出来的,因为在液体问题中唯一具有长度量纲的参量是原子间距离)。后一情况下元激发能谱的形状可能如图 1 所示。

兰道<sup>11)</sup>首先假设液体 He<sup>4</sup> 的激发谱在  $p \sim \frac{1}{a}$  附近有极小值。

应当指出,上面给出的(1.11)式的推导基于流体力学近似,这时液体被看成连续介质。当数量级为原子间距的距

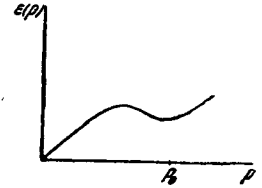


图 1

离或数量级为  $\frac{1}{a}$  的动量起重要作用时,这种近似就不对了。由于

(1.11)式对于小动量是成立的,所以它应当看作是从小动量范围到极大动量范围的内插公式;动量极大时,粒子实际上是自由的,这时元激发和粒子一致,具有能量  $p^2/2m$ 。

液体 He<sup>4</sup> 元激发能谱的细节,自然不能从计算得出。最近借助中子在液体 He<sup>4</sup> 中的散射实验<sup>12)</sup>,求得了最准确的  $\varepsilon(p)$  曲线。

知道了能谱,就可以算出液体 He<sup>4</sup> 的热力学函数(更确切地说,是算出它们在给定温度时的值与  $T = 0$  时的值之差)。这时随着  $T$  的数值不同,能谱中起最大作用的部分也不同(见图 1)。

在最低温范围内,只有能谱的小动量部分,即声子部分最重要。温度较高时,  $\varepsilon(p)$  极小值 ( $p = p_0$ ) 附近的激发变成最重要。

的。将能量  $\epsilon$  按  $p - p_0$  展开就得到<sup>1)</sup>：

$$\epsilon(p) = \Delta + \frac{1}{2m^*}(p - p_0)^2. \quad (1.14)$$

能谱这一部分的元激发称为“旋子”(ротон)。

一切热力学量都是“声子”部分和“旋子”部分的和。为了求得热力学势，只须将(1.1)和(1.14)式代入下式(见[1], §53)

$$Q = VT \int \ln(1 - e^{-\frac{\epsilon(p)}{T}}) \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (1.15)$$

这时还应当注意到以下情况。首先，元激发数目并未给定，它要从平衡条件，即自由能对粒子数目变化为极小值，确定；这就给出

$$\left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T} = \mu = 0 \quad (F = Q + \mu N) \quad (1.16)$$

当  $\mu = 0$  时热力学势  $Q$  和自由能  $F$  重合。其次，由于旋子能量总是大于问题中所能涉及的温度，它们的玻色分布可以代之以玻尔兹曼分布。这是因为当  $T \ll \epsilon_{\text{por}}$  时，可在计算(1.15)式的积分时将  $\ln(1 - e^{-\epsilon(p)/T})$  按小量  $e^{-\epsilon(p)/T}$  展开而取第一项。这样就得到玻尔兹曼公式

$$F_{\text{por}} = -VT \int e^{-\frac{\epsilon(p)}{T}} \frac{dp}{(2\pi)^3}.$$

考虑以上两点，就可以算得：

$$F_{\text{por}} = -V \frac{\pi^2 T^4}{90\mu^3}, \quad (1.17)$$

$$F_{\text{por}} = -V \frac{2m^{*1/2} T^{3/2} p_0^3}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{\Delta}{T}}.$$

从此不难求得其它热力学量。

**3. 超流。** 玻色液体最有趣的性质是“超流”，即无摩擦地通过毛细管的本领。兰道<sup>[3]</sup>证明了，从他所建议的元激发能谱形状，

1) 对于  $\text{He}^4$ ，公式内各常数的值是<sup>[7]</sup>：

$\Delta = 11.4 \cdot 10^{21} \text{ 秒}^{-1}$ ， $p_0 = 1.92 \cdot 10^8 \text{ (厘米)}^{-1}$ ， $m^* = 0.16 m_{\text{He}^4}$ 。

可以得出这种性质。

设玻色液体在绝对零度下以速度  $v$  流过毛细管。在和液体相联系的坐标系中，液体是静止的，而毛细管以速度  $-v$  运动。由于管壁和液体之间的摩擦，液体渐被管壁带动。这就是说，液体的能量和动量不复为零。只有在液体中出现了元激发时，才可能发生这种情况。当出现了一个这种元激发后，液体就获得了动量  $p$  和能量  $\epsilon(p)$ 。现在再回到与毛细管相连的坐标系中，液体在这个坐标系中的能量是

$$\epsilon + pv + \frac{Mv^2}{2}.$$

这样，元激发的出现使液体能量改变了  $\epsilon + pv$ 。只有这个变化是负数时，元激发才可能出现，于是

$$\epsilon + pv < 0.$$

当  $p$  和  $v$  方向相反时，这个量取最小值。因此至少须有  $\epsilon - pv < 0$ ，即  $v > \frac{\epsilon}{p}$ 。我们于是得到了要使液体中能产生元激发，其速度所必须满足的条件

$$v > \left(\frac{\epsilon}{p}\right)_{\text{min}}. \quad (1.18)$$

在曲线  $\epsilon(p)$  上  $\frac{\epsilon}{p}$  最小的点是

$$\frac{d\epsilon}{dp} = \frac{\epsilon}{p}, \quad (1.19)$$

即从坐标原点所引直线与曲线  $\epsilon(p)$  相切之处。

这样，仅当液体速度小于满足条件(1.19)式诸点的元激发速度时，才能出现超流(注意  $\frac{d\epsilon}{dp}$  是元激发速度)。

对于任何玻色液体都至少有一个点满足条件(1.19)。这就是坐标原点  $p = 0$ 。  $p$  接近零时，元激发以声速运动，因此液体流速超过声速  $u$  时，超流条件显然被破坏了。

液体  $\text{He}^4$  的能谱中还有一个危险点。从图 1 所示曲线看出，

它位于旋子极小值右面。利用(1.14)容易得出,超流流速应满足不等式

$$v < \frac{1}{m^*}(\sqrt{p_0^2 + 2m^*\Delta} - p_0),$$

或者,考虑到諸常数的数值(从它們可以看出  $p_0^2 \gg 2m^*\Delta$ )

$$v < \frac{\Delta}{p_0}.$$

我們得到了最終結論:当流速超过  $\frac{\Delta}{p_0}$  时,液体  $\text{He}^4$  內的运动显然已不是超流。

温度高于零度时,玻色液体內出現元激发。不难看出,上述关于液体流动时能否有新元激发出現的討論,并不因之改变。有意义的是探討已經存在的元激发,对液体的运动有何影响。

为此我們設想,“元激发气体”以某种宏观速度  $v$  在液体中运动。分布函数可以从静止气体的分布函数作代換  $\epsilon \rightarrow \epsilon - pv$  而求得。单位体积气体的动量由积分給出:

$$P = \int p n(\epsilon - pv) \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (1.20)$$

对于小速度  $n(\epsilon - pv)$  可以按  $pv$  展开。結果得到

$$P = - \int p(pv) \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \cdot \frac{dp}{(2\pi)^3} = - \frac{v}{3} \int p^2 \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \cdot \frac{dp}{(2\pi)^3}. \quad (1.21)$$

从(1.21)式看出,运动着的元激发气体的动量  $P$  正比于运动速度  $v$ 。 $P$  与  $v$  的比例系数显然就是运动物体的质量。这样我們就看出,元激发气体相对于液体的运动伴随着质量轉移。个别元激发当然可以与器壁作用,产生散射。元激发气体在散射时和器壁交换动量。这就是說,元激发气体的运动是粘滯的。既然,如前面已經看到的,元激发气体运动时有质量轉移,我們作出如下結論:在已經有元激发存在的玻色液体中可以发生粘滯流动,其速度并不破坏超流条件(1.18)。重要的是,粘滯流动所轉移的质量,决不等于整个液体的质量;它由关系式(1.21)决定,与元激发数目有关(例如,  $T = 0$  时  $P = 0$ )。

現在已經可以討論流速不破坏超流条件时,玻色液体运动的一般图象了。

从絕對零度开始討論。如果液体在初始时刻处于基态,即沒有元激发存在,那么,它們以后也无从产生,运动始終是超流。

当  $T \approx 0$  时运动图象有实质改变。現在液体中存在着元激发,其数目由相应的統計公式决定。虽然新的元激发不能产生,但是如前所述,沒有任何因素会妨碍已經存在着的元激发和器壁碰撞,和后者交换动量。与公式(1.21)相应,只有一部分液体质量参与这个粘性流动。另一部分液体质量还照常流动,即不与器壁摩擦,也不与产生粘流的那部分液体摩擦。这样,  $T \approx 0$  时的玻色液体好象是两种液体——“超流的”和“正常的”——的混合物,它們互不摩擦地运动。

实际上当然不发生这种分割,液体中仅仅存在着两种运动,每种运动有自己的有效质量或有效密度。“正常”密度就是单位体积运动着的元激发气体动量与其速度的比例系数。在(1.21)式中先后代入玻色分布和玻尔兹曼分布(前者  $\epsilon = uv$ ,后者  $\epsilon$  由(1.14)式給出)可以求出正常密度的声子和旋子部分:

$$\rho_{n\Phi} = \frac{2\pi^2 T^4}{45u^5}, \quad (1.22)$$

$$\rho_{np} = \frac{2m^{*1/2} p_0^4 e^{-\frac{\Delta}{T}}}{3(2\pi)^{3/2} T^{1/2}}.$$

剩下的那部分液体密度对应于超流运动。这样就有

$$\rho = \rho_n + \rho_s. \quad (1.23)$$

元激发气体的宏观速度記作  $v_n$ 。超流液体速度記作  $v_s$ 。后一速度有一重要性质。如果将玻色液体放入圓筒內并使圓筒繞軸轉动,正常部分将被筒壁带动而开始与之俱轉。相反,超流部分仍然静止。也就是說,无法使超流部分轉动。换言之,超流部分的运动总是位流。其数学表示是

$$\text{rot } v_s = 0, \quad (1.24)$$

对于元激发说来,液体超流部分的运动起着外界条件的作用。应当指出,前面讲到的函数  $\epsilon(p)$  的形状,正是在与超流部分相联系的坐标系中才是那样。在静止坐标系中显然有

$$\epsilon' = \epsilon(p) + p v_s, \quad (1.25)$$

式中  $p$  是在与超流液体相連的坐标系中的动量。

在为元激发写輸运方程式时,就必须考虑这一点。因而輸运方程式的形状是

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial \epsilon'}{\partial p} - \frac{\partial n}{\partial p} \cdot \frac{\partial \epsilon'}{\partial r} = I(n), \quad (1.26)$$

这里  $I(n)$  是碰撞积分。

玻色液体中存在着两种速度不同的运动,这就导致了十分奇特的流体力学。流体力学方程可以从輸运方程式(1.26)求得。这里不打算引述的这个推导是 И. М. Халатников 完成的,并叙述在他的总結論文[8]里<sup>1)</sup>。

玻色液体的双速度流体力学与普通流体力学差别很大。例如,在玻色液体中可以产生两种不同类型的振动,其传播速度也不一样。

第一种振动是普通声波,或称第一声。在这种声波中液体作为整体运动;正常和超流部分并不分开。第一声的传播速度等于  $u_1$ 。第二种振动——所謂第二声的传播速度是

$$u_2 = \sqrt{\frac{\rho_n T S^2}{\rho_n \rho C}}, \quad (1.27)$$

其中  $C$  和  $S$  是单位体积的比热和熵。在这种波里正常部分和超流部分作位相相反的振动,同时液体的总通量  $\mathbf{j} = \rho_n \mathbf{v}_n + \rho_s \mathbf{v}_s \approx 0$ 。

我們不准备更詳細地討論有关超流液体的流体力学問題。在許多专门論文中研究了液体氦中声的传播,元激发的相互作用以及因之而生的各种耗散过程(粘滯性、热传导等),其結果在 E. M. Лифшиц<sup>[9]</sup> 和 И. М. Халатников<sup>[8]</sup> 的总結文章中有詳細叙述,

1) 适用于速度不十分高时的超流 He<sup>4</sup> 的流体力学方程是兰道首先得到的<sup>[10]</sup>。

讀者可以參閱。

現在我們轉而討論温度更高时玻色液体的特性,这时元激发数目增多了。元激发之間的相互作用已經不能省略,它們不能再看作自由粒子組成的气体。因此,对气体模型算出的热力学量的(1.17)式也就失去意义。决定正常密度的(1.22)式也不复成立。然而关于玻色液体內有效密度不同的两种运动的概念,却与前面所討論的元激发图象沒有直接联系,可以认为它还适用于比較高的温度。流体力学方程实际上只是守恆定律的結果,并可从后者导出(參看[8]),因而也还成立。随着温度升高,正常密度  $\rho_n$  也不断增大,一直达到和  $\rho$  相等。在这一温度下氦发生相变(所謂  $\lambda$  点)。相变点下可能有超流,相变点上不可能超流,玻色液体的流体力学也就与普通液体无异。

从  $\rho_n \approx \rho$  到  $\rho_n = \rho$  的过渡,原则上可以是連續的,也可以是跃变的。实验表明,氦的相变是二級相变,不吸收或放出潜热(見[10], §130)。由此得知,正常密度  $\rho_n$  随温度連續增加,最后在相变点达到  $\rho$  值。

温度远高于  $\lambda$  点时,氦不具有任何异于普通液体的特性。但在  $\lambda$  点附近却有理由看到許多本質上新的性質。系統的各种特征量,首先是热力学函数在二級相变点附近的行为,是現在尚未解決的問題,这是凝聚介質的物理中最有意义的課題之一。

## § 2. 費米液体

1. 費米液体中的激发。討論由遵从費米統計的相互作用粒子組成的系統。我們只限于自旋为 1/2 的情况,因为实际上能涉及到的也仅是液体氦 He<sup>3</sup>, 金屬中的电子或者核物質。自旋为 1/2 的有相互作用的費米粒子的系統我們將称为費米液体。

費米液体低激发态的理論是由兰道<sup>[11,12]</sup> 建立的。这个理論的基础,是假定費米液体的激发譜可以按理想費米气体能譜同样原則构成。因此在开始討論費米液体之前,有必要把已知的費米气体激发态图象和元激发概念联系起来。

$T = 0$  时理想费米气体处于基态,大家熟知,这时粒子占据了全部动量小于某个边界值  $p_0$  的量子态,而全部动量更大的态是空着的。在动量空间里被占满的态形成半径为  $p_0$  的球,它称作费米球。决定  $p_0$  的条件是:  $p < p_0$  的状态数应等于粒子数

$$p_0 = \left( \frac{3\pi^2 N}{V} \right)^{1/3}, \quad (2.1)$$

这里  $N/V$  是粒子密度。

激发态粒子按动量的分布就与上面不同了。不难看出,可以逐个将粒子从费米球内移到球外而构成各种激发态。每个这种元作用所构成的态与原来状态的差别在于:  $p > p_0$  的状态中多了一个粒子,而  $p < p_0$  的状态中多了一个“空穴”。这些  $p > p_0$  的粒子和  $p < p_0$  的空穴显然也就起着理想费米气体元激发的作用。它们具有自旋  $1/2$ , 只能成对地出现或消失,对于低激发态它们的动量值在  $p_0$  附近。这些元激发的能量最好从费米能级(即  $p_0^2/2m$ )算起。这时粒子型激发的能量从费米能级向上算,而空穴能量向下算(即粒子能量是  $\xi = \frac{p^2}{2m} - \frac{p_0^2}{2m} \approx v(p - p_0)$ ,  $v = \frac{p_0}{m}$ , 而空穴能量等于  $-\xi = -\frac{p_0^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \approx v(p_0 - p)$ )。

兰道的理论假定费米液体的低激发态与费米气体的低激发态极为相似。它也能借助自旋为  $1/2$ 、动量在  $p_0$  附近的元激发的集合来描述。兰道理论中的实质性假定是:  $p_0$  的数值与液体粒子密度的关系也由同一(2.1)式给出,即与理想气体一致(这个论断的证明见本书第四章)。和气体一样,液体内的元激发也分两类——动量大于  $p_0$  的“粒子”和动量小于  $p_0$  的“空穴”,它们只能成对地出现与消失。由此可见,“粒子”数必定等于“空穴”数。

尽管费米液体和理想费米气体的元激发十分相似,二者之间还有重要差别,它来自液体元激发的相互作用。这种相互作用的最明显的表现是存在着超流的(或超导的,如果所讨论的是金属内的电子)费米液体。不难看出,上述的费米气体的元激发谱并不导致超流。事实上,为了使费米气体激发,即形成  $p > p_0$  的“粒

子”和  $p < p_0$  的“空穴”,只需要任意小的能量。同时这个粒子空穴对的总动量却达到  $2p_0$ 。因此  $\left(\frac{\xi}{p}\right)_{\min} = 0$ , 从公式(1.18)看出

边界速度为零,故不存在超流。出现超流是因为准粒子间一定类型的相互作用使能谱根本改变。原来这种费米液体的激发能不得小于一定数值。在这种情况下,通常说,元激发谱中存在着能隙。

我们暂不研究超流费米液体(这将在第七章中详加论述),先转而探讨正常费米系统元激发的性质。

元激发间的相互作用,使得元激发概念本身只在边界动量  $p_0$  附近才有意义。前面已经指出过,只有元激发衰减远小于本身能量时,才能使用这个概念。衰减的数值或者取决于一个元激发分成几个的裂变过程,或者决定于它们之间的碰撞。如果激发能远高于液体温度,则以裂变过程为主,衰减数值正比于裂变几率。考虑到能量与动量守恒,以及“粒子”和“空穴”数目相等,不难看出裂变几率正比于  $(p - p_0)^2$ 。另一方面,激发能正比于  $(p - p_0)$ 。由此清楚看出,仅仅对于动量在  $p_0$  附近的元激发衰减才是较小的。

如果讨论温度大于零时的平衡费米液体,则“粒子”和“空穴”的平均能的数量级为  $T$ 。由于元激发遵从费米统计,其数目也和  $T$  成正比。不难看出,对于这种元激发裂变几率和散射几率是同数量

- 1) 最好利用与费米气体的相似性估计几率。讨论下述过程:动量为  $p_1(p_1 > p_0)$  的粒子和费米球内动量为  $p_2(p_2 < p_0)$  的粒子作用。结果得到两个粒子,其动量为  $p_3$  和  $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$ ;  $p_3, p_4 > p_0$ 。这样,动量为  $p_1$  的粒子“裂变”成动量为  $p_3$  和  $p_4$  的两个粒子以及动量为  $p_2$  的空穴。这一过程的总几率正比于

$$\int \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) dp_3 dp_4$$

$$p_3 < p_0, p_4 > p_0, p_4 = |p_1 + p_2 - p_3| > p_0.$$

不难看出,当  $p_1 - p_0 \ll p_0$  时,矢量  $p_3$  和  $p_4$  的模的变化范围是

$$p_0 < p_3 < p_1 + p_2 - p_0, 2p_0 - p_1 < p_4 < p_0$$

$p_1$  与  $p_2$  之间的夹角可以任意,  $p_3$  与  $p_1 + p_2$  的夹角由能量守恒条件决定,对这个角度积分就取掉了  $\delta$ -函数。剩下的积分对  $dp_3 dp_4$  在  $p_3 \approx p_4 \approx p_0$  附近取,就得到因子  $(p_1 - p_0)^2$ 。

級的,二者都正比于  $T^{2D}$ 。由此可知,只有在足够低的温度下才能用元激发描述费米液体。

利用一个基于和费米气体相似性的模型,可以使费米液体能谱的性质显得更直观些。试设想液体基态相当于准粒子的集合,它們填满了边界动量为  $p_0$  的费米球。关系式(2.1)可以解释为准粒子数目等于液体粒子数。这个模型中的元激发完全和“粒子”与“空穴”的说法一致。“粒子”和“空穴”数相等在这个模型中就表现为准粒子数守恒。如果引入准粒子分布函数  $n(p)$ ,則它的变化应满足条件

$$\int \delta n d\mathbf{p} = 0. \quad (2.2)$$

这里描述的气体模型对进一步研究费米液体的性质也是颇为方便的,但是必须记住,准粒子概念本身仅仅在费米球面附近才有意义。因此,当远离费米面的准粒子有重要作用时,从气体模型得到的一切性质都不适用于实际费米液体。

**2. 准粒子能量。**除了上述关于元激发性质的假定,兰道理论还根据另一条关于准粒子相互作用性质的假定,这就是假定此种相互作用可以借助于来自周围准粒子的作用在给定准粒子上的自洽场描述。

这时系统的能量已不等于个别准粒子能量的总和,而成为它們的分布函数的泛函。个别准粒子的能量自然要定义作总能量对分布函数的变分导数:

$$\delta E = 2 \int \epsilon \delta n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} V \quad (2.3)$$

(因子2来自对自旋投影的求和)。

从这个式子看出,  $\epsilon$  正是增加一个动量为  $\mathbf{p}$  的准粒子所引起

1) 对于近乎理想的费米气体,这两个过程实质上是同一现象,相应的几率正比于

$$\int \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4) n(\epsilon_1)(1-n(\epsilon_2))(1-n(\epsilon_3)) d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2.$$

形式上可以认为  $|\mathbf{p}_1| > p_0$  相当散射,而  $|\mathbf{p}_2| < p_0$  相当裂变。当  $\epsilon_1 \sim \mu \sim T$  时,两种情况下积分都正比于  $T^2$ 。

的系统能量变化<sup>1)</sup>。

在(2.2)和(2.3)式中假設了准粒子的分布是空間均匀的。实际上这条限制归结为:空間不均匀只能在远大于准粒子波长的距离上出現。既然我們只討論费米能級附近的元激发,其动量很接近  $p_0$ ,則相应的波长数量級为原子間距离。这样,空間均匀的要求实际上未带来任何限制。

有磁場存在时,以及对于铁磁系統,分布函数应当看成作用于自旋角标的算符(密度矩阵)—— $n_{\alpha\beta}$  和  $n_{\beta\alpha}$  一样,准粒子能量也成为算符  $\epsilon_{\alpha\beta}$ 。当沒有磁場,而且系統为非铁磁的,算符  $n_{\alpha\beta}$  和  $\epsilon_{\alpha\beta}$  都正比于单位矩阵。因此在一般情形下公式(2.3)应当写成

$$\delta \left( \frac{E}{V} \right) = \sum_{\alpha, \beta} \int \epsilon_{\alpha\beta} \delta n_{\beta\alpha} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}.$$

这个表达式最好縮写为

$$\delta \left( \frac{E}{V} \right) = S p_0 \int \epsilon \delta n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}, \quad (2.4)$$

这时只須將  $\epsilon$  和  $n$  理解为相应的矩阵;符号  $S p_0$  和通常一样,表示矩阵  $\epsilon$  和  $\delta n$  乘积的对角元之和。

(2.4)式所定义的准粒子能量,使得平衡分布函数确是费米函数。为了証明这一点,最好利用熟知的熵的表达式<sup>2)</sup>

$$\frac{S}{V} = -S p_0 \int [n \ln n + (1-n) \ln(1-n)] \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.5)$$

这个式子純粹来自排列組合,它之所以适用于费米液体,是因为假定了准粒子能級分类与理想气体能級分类一致。由熵最大条件并注意粒子数和能量守恒,

$$\delta N = 0, \quad \delta E = 0,$$

可以对  $\delta n$  变分而求得分布函数

$$n(\epsilon) = n_F(\epsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{T}} + 1}. \quad (2.6)$$

1)  $n(\mathbf{p})$  是准粒子的动量分布,所以  $2 \int n(\mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$  就是单位体积内的准粒子数。

2) 与通常一样,  $S p_0 \ln n$  表示对角元  $n_{\alpha\alpha}$  的对数之和。

这里能量  $\epsilon$  是  $n$  的泛函, 所以实际上公式(2.6)是  $n(\epsilon)$  的很复杂的泛函数定义。

由于是  $n$  的泛函,  $\epsilon$  还与温度有关。这个关系可以表示如下。  $T=0$  时准粒子的平衡能量记为  $\epsilon^{(0)}(\mathbf{p})$ , 当偏离平衡不多而且温度不高时能量表达式是

$$\begin{aligned} \epsilon(\mathbf{p}, \sigma) &= \epsilon^{(0)}(\mathbf{p}, \sigma) + \delta\epsilon(\mathbf{p}, \sigma) = \\ &= \epsilon^{(0)}(\mathbf{p}, \sigma) + \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') \delta n(\mathbf{p}', \sigma') \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

这里  $\delta n = n - n_F(T=0)$ , 而算符  $f$  与两个准粒子的动量和自旋算符有关。(2.7)式的记法表示了其中各量的矩阵性质。我们已讲过,  $\epsilon$  和  $n$  是对自旋变量的矩阵。为了强调出这一点, 特地将它们写成  $\epsilon(\mathbf{p}, \sigma)$ ,  $n(\mathbf{p}, \sigma)$ , 这里  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  是熟知的泡利 (Pauli) 矩阵, 它们和准粒子自旋算符  $\mathbf{s}$  的关系是  $\mathbf{s} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}$ 。算符  $f$  既是(2.7)式左面的自旋变量的矩阵, 又是(2.7)式右面积分符号下  $\delta n$  算符的自旋变量的矩阵。(2.7)式的最详细的写法是

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \epsilon_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{p}) + \int f_{\alpha\beta; \gamma\delta}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\gamma\delta}(\mathbf{p}') \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}.$$

这个公式说明了符号  $f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma')$  的意义。

这样定义的函数  $f$  是单位体积能量对  $\delta n$  的二阶变分导数(试比较(2.7)和(2.4)), 因此它对于  $\mathbf{p}, \sigma$  和  $\mathbf{p}', \sigma'$  的置换是对称的。函数  $f$  是费米液体的很重要的特征量。我们以后(见第四章)会看到, 它与两个准粒子的零角散射振幅有关。

函数  $f$  与自旋变量的关系可一般地表示为

$$f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') = \varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') + \sigma_i \sigma'_k \zeta_{ik}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (2.8)$$

如果自旋相互作用来自交换<sup>1)</sup>, 则此式第二项的形状为  $(\sigma\sigma')\zeta(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ 。

1) 通常粒子间与自旋有关的相互作用分成几类: 与全同粒子可以置换有关的交换作用; 由运动着的磁矩与电场的相对论作用导致的自旋轨道作用; 磁矩间的直接磁作用。交换作用常大大超过其它各种作用。交换作用的特点是, 它对于粒子系统总动量矩在空间的转动是不变的。标量积  $(\sigma\sigma')$  正好具有这种性质。

无磁场存在时准粒子能量与自旋无关。(2.7)式中的函数  $\epsilon^{(0)}$  只依赖于  $p$  并可按  $p - p_0$  展开:

$$\xi(p) = \epsilon^{(0)}(p) - \mu(0) = v(p - p_0), \quad (2.9)$$

这里  $\mu(0)$  是  $T=0$  时的化学势, 而  $v$  是常数。  $v$  是费米面上元激发的速度, 它可写成

$$v = \frac{p_0}{m^*}, \quad (2.10)$$

式中  $m^*$  是有效质量。兰道<sup>[1]</sup>证明,  $m^*$  和  $f$  之间存在着一定关系。

单位液体体积的动量就等于质量通量; 让我们把这个简单事实写成关系式。费米液体单位体积的动量显然等于准粒子动量, 也就是等于

$$2 \int \mathbf{p} n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}$$

另一方面, 由于假定了费米液体粒子数和准粒子数相等, 液体粒子通量就等于准粒子通量, 即

$$2 \int \mathbf{v} n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3},$$

式中  $\mathbf{v}$  为准粒子速度。质量通量密度由此式乘液体原子质量  $m$  而得。注意到  $\mathbf{v}$  按定义等于  $\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}}$ , 我们把动量与质量通量相等的条件写为

$$\int \mathbf{p} n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = m \int \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.11)$$

在(2.11)式中对  $n$  变分, 并注意到这时能量变化与  $\delta n$  的关系是(2.7)式, 后者在沒有磁场存在时(即  $n$  与  $\epsilon$  都与自旋无关)可以写成

$$\delta \epsilon = \frac{1}{2} \text{Sp}_{\sigma} \text{Sp}_{\sigma'} \int f(\mathbf{p}, \sigma; \mathbf{p}', \sigma') \delta n' \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^3}.$$

由此得到:

$$\int \frac{\mathbf{p}}{m} \delta n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} = \int \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \delta n \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} +$$



$$+ \frac{1}{2} S_{p_0} S_{p_0'} \int n \delta n' \frac{\partial}{\partial p} f(p, \sigma; p', \sigma') dp \frac{dp'}{(2\pi)^6}.$$

在第二个积分里对  $p$  作分部积分并将变量置换  $p\sigma \leftrightarrow p'\sigma'$

$$\int \frac{p}{m} \delta n \frac{dp}{(2\pi)^3} = \int \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \delta n \frac{dp}{(2\pi)^3} - \frac{1}{2} S_{p_0} S_{p_0'} \iint \delta n f(p, \sigma; p', \sigma') \frac{\partial n'}{\partial p'} \frac{dp' p'}{(2\pi)^6}.$$

由于  $\delta n$  的任意性,由此立即得出:

$$\frac{p}{m} = \frac{\partial \epsilon}{\partial p} - \frac{1}{2} S_{p_0} S_{p_0'} \int f(p, \sigma; p', \sigma') \frac{\partial n'}{\partial p'} \frac{dp'}{(2\pi)^3}.$$

$T=0$  时能量  $\epsilon$  在费米面附近有如(2.9)式,而  $\frac{\partial n'}{\partial p'} \approx -\frac{p'}{p'} \times \delta(p' - p_0)$ . 注意液体是各向同性的,因而  $f$  只与  $p$  和  $p'$  间的夹角  $\chi$  有关,我们得到

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{m} - \frac{p_0}{2(2\pi)^3} S_{p_0} S_{p_0'} \int f(\chi) \cos \chi d\Omega, \quad (2.12)$$

其中  $f(\chi)$  是  $f$  在  $|p| = |p'| = p_0$  时的值。(2.12)式中按矢量  $p'$  的方向积分. 这个关系式给出了液体原子质量与准粒子有效质量的联系. 除了很小的修正项外,它对于足够低的温度也还成立.

费米液体的比热通过  $m^*$  表示,其公式和普通费米气体一样. 事实上我们从(2.3)式就可以得出单位体积的比热

$$C_V = \left( \frac{\partial(E/V)}{\partial T} \right)_{N,V} = 2 \int \epsilon \left( \frac{\partial n}{\partial T} \right)_N \frac{dp}{(2\pi)^3}, \quad (2.13)$$

不难证明,如果在积分中将  $\epsilon$  换成  $\epsilon^{(0)}$ , 相对误差的数量级为  $[T/\mu(\theta)]^2$ . 这样,在对  $T$  的线性近似下我们就得到了普通的气体公式

$$C_V = \frac{1}{3} m^* p_0 T. \quad (2.14)$$

低温下的熵也由同样的公式表达<sup>1)</sup>.

1) 可以利用(2.13)式从比热的实验数据求  $m^*$ . 根据(2.1)式,动量  $p_0$  由液体密度决定. 对液体 He<sup>3</sup> 可得(见[13,14]):

$$p_0 = 0.76 \cdot 10^8 \text{ (厘米)}^{-1}, \quad m^* = 2m_{\text{He}^3}.$$

3. 声波. 和在玻色液体中一样,声波在费米液体中的传播也有许多特点(虽然是另一些不同于玻色液体中的特点). 如果讨论频率一定的声波,则当温度不太低时,它的传播遵从普通的流体力学规律. 声的衰减这时正比于元激发的碰撞时间  $\tau$ . 温度降低,碰撞几率也减少,它正比于费米分布表面延展宽度的平方,因此碰撞时间将按  $T^{-2}$  律增长. 在  $\tau \sim \frac{1}{\omega}$  的温度下,声波就不能传播了.

但是继续降低温度时,又出现了传播声波的可能性. 然而一般说来,它具有另一速度,而且也不再是简单的疏密波. 兰道<sup>[12]</sup>预言了这个现象,并称之为“零声”. 由于确定声的本质时,重要的只是  $\omega$  和  $\tau$  的关系,这两种声可以分别表述为低频声( $\omega\tau \ll 1$ )和高频声( $\omega\tau \gg 1$ ).

温度不太低,条件  $\omega\tau \ll 1$  成立时,声速和平常情况一样决定于压缩率. 可以证明,它和函数  $f$  有本质性联系<sup>[11]</sup>. 压缩率通过化学势对粒子数的导数  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$  表达最为方便. 因为化学势仅与  $\frac{N}{V}$  有关,故得

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = -\frac{V^2}{N^2} \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{1}{N} \frac{\partial P}{\partial \left( \frac{N}{V} \right)} \quad (2.15)$$

( $P$ ——压力). 由此得出  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$  与  $u^2$  的关系:

$$u^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\partial P}{\partial \left( \frac{mN}{V} \right)} = \frac{1}{m} N \frac{\partial \mu}{\partial N}. \quad (2.16)$$

导数  $\frac{\partial \mu}{\partial N}$  的算法如下. 因为  $\mu \approx \epsilon(p_0)$ , 所以  $p_0$  的变化和函数  $\epsilon(p)$  本身形状的变化都导致  $\mu$  的改变:

$$\delta \mu = \frac{1}{2} S_{p_0} S_{p_0'} \int f \delta n' \frac{dp'}{(2\pi)^3} + \frac{\partial \epsilon^{(0)}(p_0)}{\partial p_0} \delta p_0. \quad (2.17)$$

(我们考虑无磁场的情况). 由(2.1)式得  $\delta N$  与  $\delta p_0$  的关系

$$\delta N = \frac{1}{\pi^2} p_0^2 \delta p_0 V.$$