[西德] G.哥德赫 编

张 清 张 弥 译

有限元法

在岩土力学中的应用

中国铁道出版社

有限元法在岩土力学中的应用

中国

有限元法在岩土力学中的应用

［西德］G.哥德赫　编

张清　张弥　译

中国铁道出版社

1983年·北京

内 容 简 介

本书汇集了岩土力学数值计算法论文16篇，阐述了有限元法在岩土力学中的应用，内容包括岩石力学与土力学在使用有限元法中的进展，存在问题和解决的方法。

本书可供从事土力学和岩石力学的科研人员、教学人员以及从事基础工程、地下、矿山、水利、铁路、石油、地震等工作的有关科技人员参考。

Finite Elements in Geomechanics
Edited by G.Gudehus
John Wiley & Sons, Ltd. 1977

有限元法在岩土力学中的应用
〔西德〕G.哥德赫 编
张清 张弥 译
中国铁道出版社出版
责任编辑 刘曼华
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
中国铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 1/16 印张：23.25 字数：494千
1983年3月第1版 1983年3月第1次印刷
印数：0001—4,500册 定价：2.40元

译者的话

本书是有限元法在岩土力学中应用的论文集，其中每一章都是由国际上有关的知名学者所撰写，因而它反映了原书出版时的国际水平。书中从原始数据的处理、模型的建立、有关数值方法的介绍，具体问题的分析求解，直到有关误差的分析，都作了较为全面的阐述。

在翻译本书过程中遇到的主要困难是：很多技术名词在国内没有统一的译名。以本书的书名中geomechanics一字为例，国内一般译为“地质力学”，这可能会使读者理解为属于地质学家李四光同志生前所从事的工作范围，但实际上在本书中此字的含意并非如此（见本书原序及第二章中的定义）。考虑到由于本书绝大部分内容涉及土力学与岩石力学，故将此字译为岩土力学。

本书的技术名词除尽量采用科学出版社出版的英汉数学词汇，英汉物理学词汇和英汉综合地质学词汇的译名以及目前通用的译名外，为了使同类书籍名词统一，还采用了江伯南、尹泽勇译，徐芝伦校的《有限元素法引论》中用过的译名。对于那些无法查对的译名，在书末列出汉英名词对照表供读者查阅，此外人名和地名均采用了原文。

全书经中国科学院地质研究所孙广忠副研究员审阅，部分章节曾分别由南阜勋，梁成锦，车永太同志进行审阅，特此致谢。

张　清　　张　弥

1980年于北方交通大学

序　言

在土木工程、矿山工程、工程地质以及其它工程科学中，岩土力学这个专用名词正逐渐为大家所承认。它是以研究与工程技术活动有关的那一部分地壳（宏观）位移和各种作用力为特征的。由于技术的发展，岩土力学的应用范围变得非常广泛。岩土力学比其他分支的技术力学，如水力学、弹性力学等要复杂得多，因为它涉及到有关材料特性的问题。土和岩石都属于结构和反应十分复杂的那一类物质。所以，岩土力学提出了无穷无尽的数学问题，大量的应用数学得到了运用，而且多次证明现有的应用数学方法还很不够用。

迅速发展的计算机方法已经引起了正在应用岩土力学的人们的浓厚兴趣。特别是有限元法（FEM）正一年一年地得到更加广泛的应用。它是否就是解决岩土力学中的数学问题和那些难于鉴定力学性质的问题等难题的最后手段呢？事实上并非如此。目前，热情推崇有限元法的和反对它的人数各占一半。

这种状况促进了岩土力学数值方法国际讨论会于1975年11月在Karlsruhe的召开。许多知名的专家应邀介绍了他们的最新研究成果。为了参加这次讨论，不少于150名与会者提交了摘要性的简短论文。会议的进程达到了预期的结果。

大家同意为了使这些成果报告对尽可能多的读者都能有用，又做了部分补充和审订。其结果就形成了这本书。与此平行的，会议的短论文和讨论将另行由Karlsruhe大学的土力学和岩石力学研究所作为会刊出版。

这本书主要是为从事有限元方法有一定经验的研究人员和实际工作者这两方面的读者准备的。但也会使邻近学科，诸如化学工程，金属塑性力学，地层力学或混凝土工艺学方面的专家们感兴趣。已经证明有限元法能够在理论与实践的结合上做出重要贡献。

第一章是一个技术发展水平的报告：给出了一个系统的梗概，以帮助读者对以后各章的理解。关于应力是以物理——力学概念为基础的，而对数学——数值方面谈得很少。岩石中不连续性也没有涉及。

第二章对输入数据、结构构造和应力历史作了简要说明。在这本书中，这一章描述了和工程地质的联系。第三到第十章专门讨论土力学问题。第三章用试验分析的论证，第四、五章以数值方式提出了一些新的本构定律。第六、七章包括一些基础工程中实际应用的实例，第八和第九章涉及到时间效应的一些特性。

第十章联系到岩石力学，而岩石力学则是第十一章到第十四章的主题。

第十和第十一章集中研究不连续面的有限元方法的技巧。

第十二和第十三章论证了弹-塑性有限元法在岩石洞室中的应用。

裂隙岩石的渗流是第十四章的主题。

在不同的章节即第三、八和第十章中讨论到数值误差的来源。第十五章额外地又对误差的来源作了系统的概括，并论证了输出数据的整理也是误差的一大来源。

虽然讨论会不局限于有限元方法，但再一次证明在数值方法中有限元法是占优势的。另一个有希望的方法（对某些应用方面）是积分方程法，也就是边界单元法，它和有限元法有

联系，所以在本书的第十六章中予以阐述。

最后一章内容可以防止对有限元法的过高估价。可以清楚地看出，较多的使用数学分析可以有很大的经济价值，显然，有限元法绝不能代替现场和试验室的量测，或工程师的直观知识，但可以认为，有限元法对量测工作还是有相当大的促进作用。

目　录

第一章　有限元法与岩土力学之间的相互影响——述评

1.1 引　　言

岩土力学与有限元法近来在发展上，二者互相影响。毫无疑问，土力学和岩石力学给从事数值计算的数学家们提出了大量的难题。反之，利用计算机的各种计算方法迅速发展，也推动了岩土力学的发展。在现阶段，还不可能准确地评价这两个专题之间的相互影响，因此，本文仅仅企图系统地说明上述两个方面现有的发展状态。鉴于这两个领域都非常广泛，本文只能提供一个纲要，读者将从后续的章节中部分地补充所需要的内容。作者并不认为本书包罗了全部有关的内容。

我们在这里按照热力学的准则* 把岩土力学中具有代表性的边值问题进行分类，以便确定我们所讨论的主题。根据这种方法，在表1—1中按照它们的耗散率分成了四类。虽然某些循环过程并不严格符合我们的分类方案，但我们还是把它们包括了进去。我们企图根据变分原理推导力学的和数值的公式。计划另外出版一本书籍介绍有关的物理基础并解释这些原理。虽然这些变分原理并不是必不可少的，但它们对于有限元法来说，却是非常有用的。大量已有的公式和某些新的公式都是由此导出的。然而，读者不要希望能有一种通用的理论，正如人们预料的那样，干摩擦（还有其它现象）并不符合热力学的概念。

在1.2节到1.5节中详细地介绍了这四种分类的内容。我们假设读者具有连续介质力学的基本知识，并对有限元法有一定的了解。在表1—1中，所处理的问题的复杂程度按由左至右而大大增加，能够解决实际问题的程度也是自左到右，自上而下的排列。这种能否解决问题的程度表明我们自己所面临的困难。在后面每一节中都包括了一个简短的小结。

在1.6节讨论了输入的数据。在这方面与应用力学其他的分支不同，岩土力学有其特殊之处。天然岩土体的状况是过去地质过程的产物。通常我们不知道这些过去的情况，并且不可能完全弄清楚这些情况。

至于对数值计算的要求方面，1.7节中提出的为数不多的意见应该够用了。有不少内容丰富的书籍介绍空间和时间有限化的问题。只是需要注意：岩土力学中，几乎所有最重要的数值分析的准则——收敛、稳定和经济性——只能按经验来确定。

在本章的最后一节，把有限元计算结果与土力学大型的或小比例尺试验结果进行对照。这种核对是必要的，因为推导力学公式或进行数值计算，都可能出现错误。有限元法最好能用这种实验进行核对，经核对的计算结果常需随之进行修改或校正。在某些情况下，进行校核以后，计算结果因其不切实际而不得不抛弃不用。

* 作者从热力学的角度，即从理性力学（Rational Mechanics）出发述评岩土力学数值方法问题，其原因可参看“钱学森，现代力学—1978年全国力学规划会议上的发言”，《力学与实践》1979—1期，p.7。——译者注。

表1—1 岩土力学边值问题的述评

耗散率			
零平衡状态	稳态过程	渐减稳定转换	渐增非稳定转换
弹性* 似弹性*+ 有限制条件的弹性*+	弹性振动*+ 势能流* 塑性流+‡ 粘塑性流+‡	瞬变振动*+ 扩散* 固结* 弹性理想塑性变形*+ 塑性硬化+‡ 蠕变—松弛+‡ 广义耦合‡	塑性破裂+‡ 塑性软化+‡ 脆性破坏+‡ 液化+‡

注：有限元法发展情况：

* 有限元解法存在并在实际工作中应用；

+ 有限元解法已有，并应用在科学研究中；

‡ 有限元法正在准备应用于科学研究中。

1.2 平衡状态*

从热力学（在这里毋宁说是热静力学）的角度，可以认为平衡状态具有以下特性，即：具体一组状态变量**满足与材料类型有关的物态方程，并且符合与材料无关的守恒定律。与这种情况相当的是：状态变量的吉布斯函数***在平衡状态下有驻值。

上述说明在数学上可表示如下：

$$\delta G_t=\delta\int_B G_B dB=\delta\left\{\int_S G_S dS+\int_V G_V dV\right\}=0 \tag{1—1}$$

即该系统全吉布斯函数G_t，对状态变量的一阶变分为零。我们假设以整个体积积分（下标B）构成的全吉布斯函数G_t有足够的连续性，这个积分又可以分为一个面积分部分（下标S）和一个体积分部分（下标V），并以相应的单位值G_B，G_S，G_V表示之。（1—1）式是一个平衡条件最普遍的表达式。G_S项中包含（所谓的自然）边界条件。

可以对状态变量规定显式的或隐式的附加条件，而这些条件在任何情况下应是完整的。任务在于求得平衡状态下状态变量的数值。正常情况下，这是一个适定问题，即保证解的存在和唯一性，并且当输入的数据有不大的变动时，所得解的变化也很小****。在这里不涉及状态变量在某个具体时间内到达平衡状态的变化过程或其以后的变化过程。

我们以岩土力学的实例来解释这些抽象的说明。在这里，我们假定利用有限元进行分

* 这里的平衡状态是从热力学角度提出的，它与力学平衡状态有所不同。参见王竹溪著《热力学》（人民教育出版社，1962年，15页；

** 这里是指描述物体平衡状态的变量，它们包括几何变量，力学变量，电磁变量和化学变量四类。参见同上书17页；

*** 参见同上书122页。

**** 在数学上，边界条件和初始条件合称为定解条件，数学物理方程本身（不连带定解条件）叫做泛定方程。定解条件提出具体问题，泛定方程提供解决问题的依据，作为一个整体，叫做定解问题。

从实际中来的定解问题还要回到实际中去，回答实际所提出的问题。这就要求定解问题是适定的，即：

（1）有解；

（2）解是唯一的；

（3）解是稳定的。

就是说，如果定解条件的数值有细微的改变，解的值也只作细微的改变。

见梁昆淼著《数学物理方法》（第二版），1978，p.148.　——译者注

析。状态变量可以假设为应力和应变。要求的结果假设是一个隧道空间四周围岩的位移及应力（图1—1）。

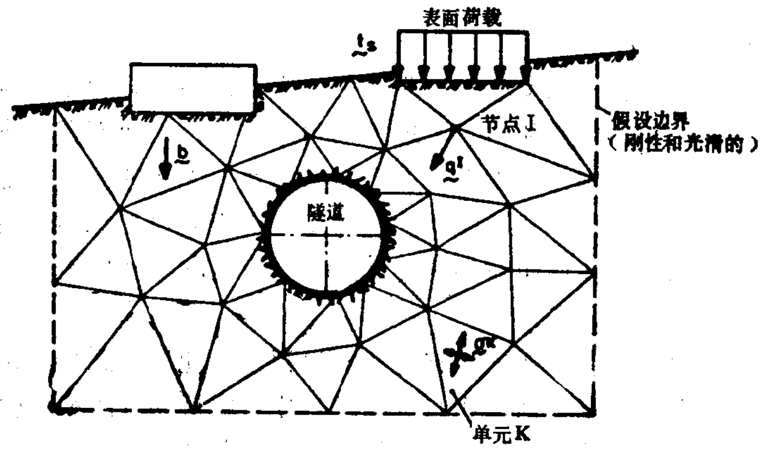

图1—1　隧道开挖后围岩的平衡状态（一组有限的状态变量）

选择一种网格和适当的单元形函数，可以得到一组有限的状态变量。在这里不必追究有限化的热力学背景。采用广泛使用的位移法，节点位移q是状态变量。有了弹性材料特性矩阵D，体力b和边界应力t_s（假设是保守力），则可建立单位吉布斯函数：

$$G_V = 1/2\varepsilon D\varepsilon - bu$$

$$\qquad (1-2)$$

$$G_S = -t_S u$$

位移u与应变ε按通常的关系式求得。

转换成节点位移并利用（1.1）式的变分原理，对有限变量q取变分，得到人们熟悉的有限元方程。位移边界条件可以看作为显式的附加条件，密度常数可以看作进一步的附加条件，但它不是显式。

还可以利用余功（热函），对应力取变分，以代替（1—2）式。这是不太常用的力法。

人们已经清楚地了解有限元法的某些优点和不足之处。不规则的几何形状，各式各样的荷载和不同的材料特性等，原则上都不难计算。虽然侧面和下部边界是任意确定的，但由此产生的误差，通常仍然可以限制得很小，所进行的对比计算已经证明了这一点。

从力学角度看，这是个非常适定的问题，因此，数值计算工作上能够取得成功并不出人意料。令人遗憾的是，这样的解对于岩土力学来说，却不那么适用。上述的平衡状态仅仅发生在非常坚固、裂隙极少的岩石里，而在这种情况下，进行详细的计算则是多余的。但是，在大多数实际遇到的情况（如图1—1所示的那种情况）中，还存在着某些其他条件。

本节的目的是进一步集中地说明一种计算公式，它是按实际要求加以修正过的，但这种计算公式仍然可以认为是计算平衡问题的方法。状态变量的数目可以扩大，物态方程可以进一步适合岩石和土的特性，而且可以引入附加的限制条件。

如果这种修改符合热静力学的原理，问题仍然是一个适定问题，但它的实用价值并不一定很高。例如把温度和含水量可以做为附加状态变量引入图1—1的情况中去。在平衡状态下，热力势能和吸水势能仍然维持不变（不存在流动条件）；一个理论上可以是正确的，具有具体外部边界的解，但在解决实际问题上却并不必要。

假如认为弹性比能是应变的非二次函数，可以推导出合理的非线性材料定律。位移方程也变成数值上不好求解的非线性方程。这种方法对性质像橡胶类的物质是有用的，如果土和岩石表现出非线性的性态，实验证明它们就不再是弹性材料了。采用非二次函数的弹性比能来代表岩土性态的作法只是一个从岩土力学理论上感兴趣的问题。

至于所谓似弹性材料定理则与之不同，这些定理在岩土力学的有限元分析中获得了特别广泛的应用。对于那些不考虑变形速度影响的材料，在单调应力加载过程中，变形是应力的

普通函数（反之，应力也是变形的普通函数）。如果采用这种作法，这样的定理与线弹性不同，它只是在具体的应力途径中才是正确的。有很多影响很大的因素在这里常常被忽略而未加考虑，如：

（1）若模拟发生在地质体中的应力途径，只能在试验室中进行试验；

（2）似弹性体材料定理不是物态方程，因此不存在热静力学的平衡问题；

（3）特别是不再有稳态吉布斯函数，无法进一步讨论解的唯一性和其存在的问题；

（4）有限化的位移方程通常不再由变分原理导出，而且它不再是对称的了。

很明显，我们面对的不再是一个适定问题：在岩土力学中这种情况应该承认是一种正常状态。

假如使用者需要对这种方法加以评价，他能得到什么结论呢？从这里以及后面讨论的有限元法中，可以看到，我们可以把它分为解析的方法和经验的方法。

解析的方法应该尽可能地接近适定问题的公式。如果取似弹性的本构定理，推导的公式不能再属于一个平衡问题。

这样就必须采用一个转换过程（表1—1第三列），例如，转化成一种弹塑性的公式。这些将在1.4节详细介绍。

经验的方法更容易为人理解，但决不是毫无困难。允许把问题转化成为不是精确肯定的情况（有限元适用于这种情况），常常要求假设有一个普遍的连续条件。自相矛盾（假设不一致）地推导公式是不允许的。下面对于似弹性本构定理的平衡问题做一些解释。位移方程通常需要借助于虚功原理而不按变分原理求得，由于其非线性性质，求数值解需要进行迭代。核对的方法是：选择一些单元，把求得的应力-应变途径与那些根据正常本构定理算出的应力途径进行对比。若按事先规定的精度，其偏差不大的话，根据前面我们所做的连续假定，解的误差也应该很小。关于这方面的情况将在1.4节及本书第三章中详细介绍。

在校核中，可能发现某些局部地方出现的应力，从物理角度来看是不合理的。这就形成另外一种可能的方法用来修改平衡问题公式的推导：即增加一个附加条件，使应力σ在任何地方都遵守下列强度条件：

$$F(\sigma)\leqslant 0 \qquad (1—3)$$

既然上式不是一个方程式，而是一个不等式，因此，我们不再是在处理一个按热力学推导的平衡问题。很明确，它不能肯定有解，可能存在奇异点。（1—3）式的条件作为一个方程式来用（至少在一个单元上），通常就不存在解的唯一性，因为这个条件并没有涉及任何一点关于极限平衡状态下的应力-应变性态。由此，只有那些在静力学上允许的解，即在任何地方不违背平衡条件，又不违背强度条件的解才是应该采用的解。我们详细研究两种处理这种问题的方法。

无张力条件可以做为适用于岩石的（1—3）式条件方程的特例：

$$\max\sigma\leqslant 0 \qquad (1—3a)$$

若按分步增量加载进行计算，对于后继的增量，可以略去不计那些最大应力$\max\sigma=0$的区域（就像我们计算开挖过程那样）。由于每次迭代都是求解弹性问题，所以在那些仍在承担荷载的区域，仍然具有应力和位移的唯一性。无张力区可以想像成为存在裂隙的地段。这只是一种解释而已。真正的裂隙的大小和范围并不与此发生关系，它只服从于附加的本构定理。

Mohr-Coulomb型式的剪切破坏条件：

$$\max|\tau| - \tau_0(\sigma) \leqslant 0 \tag{1—3 b}$$

特别适用于岩石和土壤。我们知道，在剪切破坏区并不发生开裂，因此，不可避免的要在这些区域引入附加条件。Wittke及其合作者（见本书第十三章）假设在极限剪切应力的表面（称作滑移面）上作用的法向应力维持某一数值不变，这个数值是根据不考虑强度条件〔（1—3 b）式〕的弹性解得来的。把那些弹性的特征应力场进行叠加，即可查明在任何一点是否都符合强度条件〔（1—3 b）式〕。只要在小变形的条件下，相容场的叠加仍然得到一个相容场。由此我们得到一个相容的应变场。由于静力学允许的应力场是把不同的特征应力场进行叠加而来的，因此它不具有唯一性。

看来又有两种方法可供采用。解析法使我们得到表1—1第三列和第四列所列的内容。若给强度条件增加一个流动定理能获得应力和位移的唯一解。这样的公式是弹-塑性的。根据破坏理论，可以构成静力学允许的应力场，而不考虑其变形（运动学）上的相容性，并且可以得到在这种状态下的稳定性的数据。至于经验的方法，将在1—7节进一步加以讨论。由于不能再利用连续性的假定（正如似弹性法一样），使得经验法的应用受到阻碍。在一旦出现极限平衡状态的区域，不能再希望获得近似于正确的解。在这种情况下，讨论误差的标准也是不可能的了。

现在把判断有限元是否适用于求解平衡状态的有关重点，加以小结如下：

完全符合热静力学的平衡问题能够很容易的计算出来，但其实用价值不大。岩石与土的性态最好用似弹性材料定律或附加的强度条件来表示，或者把这二者联合起来共同表示岩石与土的性态。但这种作法的代价是会给所得解答带来一些不易校核出来的误差。求解平衡问题时，如何从理论解析上加以改进，留在后面再进行介绍。

1.3 稳态过程

稳态振动与稳态迁移过程具有如下的相似性：单位时间或一个周期内产生的熵不变。根据这一事实，有限元法中就有与处理平衡问题相类似的作法。一个稳态迁移过程可以看成是流动平衡。可以推导出具体的变分原理。虽然完全的稳态过程在实际问题中很难遇到，但可以把它看作是某种过程的近似状态。

首先，我们研究列于图1—2（选自Haupt（1977）的文章）上的稳态振动。为了分辨振动面，想像它是一个固体的墙，我们就能得到一个用复数表示的平衡问题，在这里用复数表示有很多方便。

使问题复杂化的地方有：

（1）把地质体划分成方格，提供了实际上并不存在的特征长度，由此导致出现人为的特殊频率和虚假的弥散现象；

（2）武断地确定外部边界，使得计算结果在很大的范围内变动，从而超出允许精度。用弹簧和阻尼器代表半无限空间，没有能达到充分协调一致的结果；

（3）决定动力激发的边界动力条件存在着争论，是否应该在这种虚假的边界上假设应力和位移值？

由于计算机的限制，企图用增加单元数量的方法解决这些问题，一再遭到了失败。可以考虑把半无限空间的理论分析和它联系起来，这就是边界元法（见本书第16章），它是一种有希望的解决方案。

由于在岩土力学的实际问题中，动力问题占有重要地位，人们寄希望于有限元法。采用有限元的优越之处在于它的物理基础非常可靠。与岩土力学的其它方面不同，在稳态振动中推荐使用线弹性的材料定理。当然它永远也不会严格地符合线弹性材料，但目前仍然缺乏一种既是经济可行的，又为半无限空间理论所充分论证的有限化的方法。

现在来研究迁移过程，这些过程遵守动量守恒、质量守恒和能量守恒定律。根据Lebon和Lambermont（1973）的建议，用变分原理能够代换守恒定理，这一变分原理与（1—1）式热静力学的平衡条件相当，可以写成：

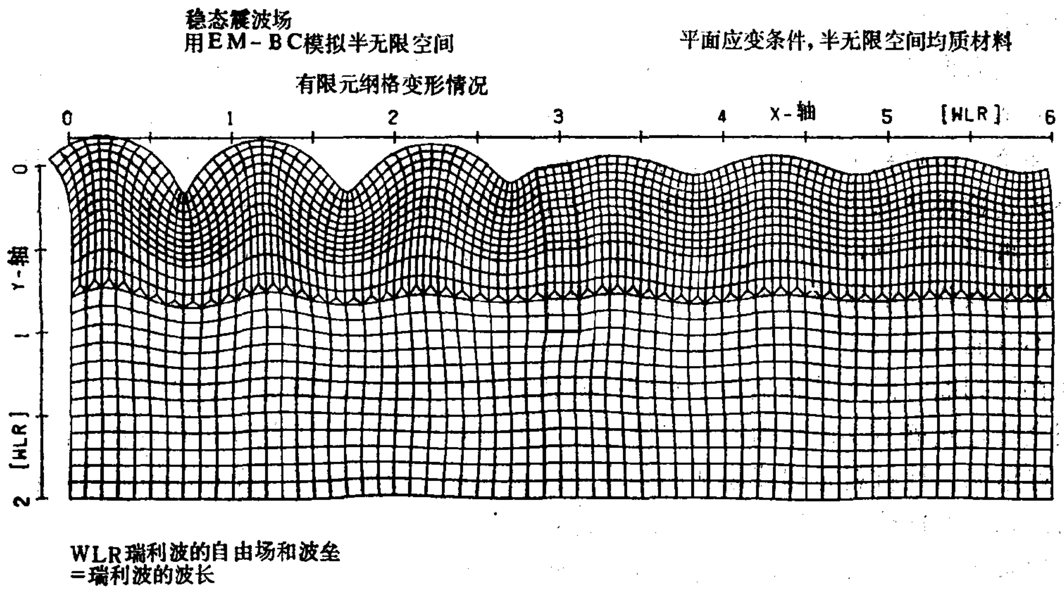

图1－2　自由场瑞利波和波垒——根据Haupt（1976）（WLR＝瑞利波长）

$$\delta\int_B(\dot{G}-D)\,dB=\delta\left\{\int_V(\mathbf{v}\,grad G_V-D_V)\,dV+\int_S(\dot{G}_S-D_S)\right\}dS=0 \qquad (1-4)$$

式中　G是吉布斯函数，与（1－1）式中意义相同；符号D代表与不可逆流动有关的作用力的势能耗散；势能的体积部分D_V决定于材料的类型和流动的类型，并且由此而决定过程的分类。

可以对下列诸变数取变分：

速度v，以求得线性动量守恒定律；

化学势能，以求得质量守恒定律；

温度，以求得能量守恒定律。

有两种主要形式的稳态流，从数学上可表示成为：势能耗散D_V决定于矢量移动率或者决定于张量应变率：

$$\dot{\varepsilon}:=1/2(grad\mathbf{v}+grad^T\mathbf{v})$$

位势流是第一种类型中最重要的一种，D_V是一个标量势能ϕ的梯度的二次型：

$$D_V=1/2a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j} \qquad (1-5)$$

根据热力学，$a_{ij}=a_{ji}$。通过1－4式，只对标量势能取变分，（1.5）式给出人们熟悉的表达式：

$$\delta\left\{-\int_V 1/2a_{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\frac{\partial\phi}{\partial x_j}dV+\int_S n_i v_{iS}\phi\,dS\right\}=0 \qquad (1-6)$$

上式等于质量守恒定律。表面积的项须包括表面法线n_i和速度v_{is}。

在岩土力学中，这个公式特别适用于地下水流动以及适用于电传导或热传导，它是线性的适定问题，因而在数值计算上取得成功是在意料之中的。

另外，位势流的有限元法不在本章中介绍。在本节里，我们的兴趣只在于它与其他边值问题的比较。

稳态塑性流中，势能耗散D_V定义如下：

$$\sigma=\partial D_V/\partial\dot{\varepsilon} \tag{1—7}$$

但它不是二次型（这一点将在后面进一步阐明），而是高度的非线性。应力应满足流动条件（1—3）式，由于稳态条件，不可能出现应变硬化或软化的现象，弹性应变率变为零，并且流动是等容的（$\dot{\varepsilon}_{kk}=0$）。根据流动定理，应变率决定于应力：

$$\dot{\varepsilon}=\dot{\lambda}\partial Q/\partial\sigma \tag{1—8}$$

塑性势能Q可以与（1—3）式强度条件下的流函数F重合，也可以不重合。前一种流动定律是相关*流动定律。正因子λ暂时待定，这是由于（1—8）式只描述了材料局部滑移的机理。在流动区域的边界上应力或速度都要有适当的分布。遗憾的是，它与位势流不同，存在定理在这里不适用，这就是为什么边界条件不得不按推测来求得的原因。

这种边值问题会在实际的锻压工作中遇到，在岩土力学中则是不多见的。在使用有限元时所遇到的困难可以用地下井流为例来加以说明(图1—3)（这一实例，即因上述原因还没有完全计算出来）。为简化起见，我们将研究各向同性材料的轴对称问题。根据（1—8）式流动定理可以算出一个共轴的σ和$\dot{\varepsilon}$，同时维持体积不变。我们分成两种情况来应用流动条件：a）只有粘结力和b）只有摩擦力。

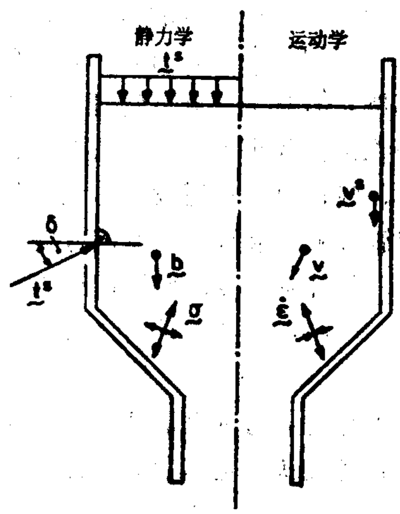

图1—3　一种地质材料的稳定变径流：主要位置。

a）v.Mises-流动条件。个体单元的线性速度场（C=粘结力）的势能耗散可由下式计算：

$$D_V=\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot C\cdot\sqrt{tr(\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon})} \tag{1—9}$$

由此得出：

$$\sigma=\partial D_V/\partial\dot{\varepsilon}=\sqrt{\frac{8}{3}}\cdot C\cdot\dot{\varepsilon}/\sqrt{tr(\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon})} \tag{1—10}$$

上式中的应力满足流动条件及相关的流动定律。

$$\dot{G}_t=\int_V \mathbf{v}\mathbf{b}dV+\int_S \mathbf{t}_s\mathbf{v}dS \tag{1—11}$$

得出相应的面力$\mathbf{b}$和$\mathbf{t}_s$以及在体积不变的情况下全吉布斯函数的变化率。没有一个材料因素

* 原文为*associated*，也有称之为“相适用的”流动定律的，见“土的弹塑性应力—应变模型理论”〈岩土力学〉中国科学院武汉岩土力学研究所，1979.2.p.29。

——译者注

出现在$\dot{G}_t$中，这成为稳态迁移过程的一个特点。

有限化形式的变分原理（1—4式）导出一个节点速度的非线性方程组。由此明显地使计算复杂化了。尽管如此，它仍然可以认为是一个适定问题。

b）摩擦条件：它的流动条件的最简单的数学表达式为：

$$F(\sigma):=S_{ij}S_{ij}-k\sigma_{kk} \qquad (1—12)$$

式中的$S_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$，代表应力偏量，而$k$代表摩擦系数。

$$\dot{\varepsilon}_{ij}=\dot{\lambda}S_{ij} \qquad (1—13)$$

是一个合乎理论的流动定律，根据它可以推导势能耗散为：

$$D_V=\sqrt{\frac{8}{3}}\,k\sigma_{kk}\sqrt{t_r(\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon})} \qquad (1—14)$$

与（1—9）式对照，（1—14）式中出现了平均应力σ_{kk}。由此可以说明其复杂性增加了，这是因为有了干摩擦的关系：

为了建立速度场，首先要建立平均应力场。这只有在具有适当（平面或球对称的）边界条件的所谓静定问题中才可能做到，而上述地下井流问题并不包括在内。所以，它通常不是一个适定问题。有时会遇到从物理上毫无根据地就假设为稳态流的事例。一个有关的例子是脉动变径流，到目前为止还没有方法求解。因此，企图依靠有限元求解具有摩擦材料中稳态塑性流问题，在目前不会取得任何结果。

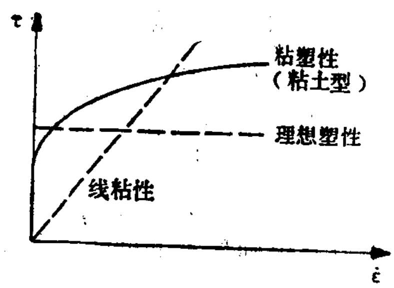

图1—4 一种粘塑性材料的应力—应变速率特性曲线。

对照（1—10）式可以看到，粘塑流中的应力与$\dot{\varepsilon}$值有关。在一般的τ与$\dot{\varepsilon}$的关系图中，图1—4所表示的过程是具有代表性的。为对比起见，把线性粘性流和理想塑性流同时画在图上（后者被认为是高度非线性的）。根据最新的研究（见本书第三章），证明在粘土中存在下列形式的关系式：

$$\tau=\tau_0(\dot{\varepsilon}_0)+\sigma_e\theta\log(\dot{\varepsilon}/\dot{\varepsilon}_0) \qquad (1—15)$$

式中的$\dot{\varepsilon}_0$是任意确定的参考应变率，τ_0是决定于$\dot{\varepsilon}_0$的剪应力的塑性部分（若$\dot{\varepsilon}\rightarrow 0$，可能为零），$\sigma_e$相当于孔隙比为$e$时的应力，而$\theta$代表一个粘滞性参数。现在，正确的势能耗散除了求得塑性项外，还可以求得一个粘滞性项，即：

$$D_V=D^P+D^V=\sqrt{\frac{8}{3}\tau_0 t_r(\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon})}$$

$$+\sqrt{\frac{8}{3}}\,\sigma_e\theta\,\frac{\sqrt{t_r(\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon})}}{\dot{\varepsilon}_0}\left\{\log\frac{\sqrt{t_r(\dot{\varepsilon}\dot{\varepsilon})}}{\dot{\varepsilon}_0}-1\right\} \qquad (1—16)$$

按照（1—10）式那样进行微分，从D_V可以导出（1—15）式那样的普遍式，即它表示（而且必须是）σ因$\dot{\varepsilon}$而变的势能。

现在再研究岩土力学的另一个例子（图1—5）。我们研究横跨桩的粘土类土壤的流动问题。它是基础工程的重要问题，属于计算桩承受土作用的侧向力的问题。外侧的边界是假想的，但距离桩有足够的距离，这样假设的边界不会带来过大的误差。根据有限元法，它的

计算方法为（还不能提出计算结果）：构成v场，此时体积维持不变并且单元按线性分布（通过补偿函数）。把（1—11）和（1—16）式代入变分原理（1—4式），得到一个节点速度的非线性方程组。这种问题属于适定问题，但在计算上并不那么容易求解。

现在把稳态过程小结如下：除带有干摩擦的某些系统外，稳态流问题可以按热力学原理正确的推导公式。因此，有限元是一个有力的工具。在非二次型的势能情况下，由于非线性的关系，在计算上会发生困难。在引入假设的有限边界条件来处理稳态振动问题时，必须特别小心。

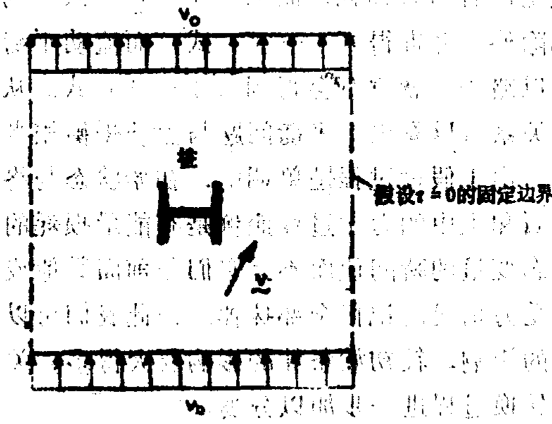

图1—5 横跨一个桩的软土稳态流。

1.4 稳 定 转 换

我们把表1—1的第三列归纳成为转换，它不会导致破坏。根据动力耗散的不同把它们加以分类，通常动力耗散是随时间而减小的。它们不是稳态的，即状态变量在时间过程中其数值发生变化。采用转换的名称是因为在过程的开始和终结都能出现一个平衡或是一个流动平衡。即使这种状态在岩土力学的实际问题中很少遇到，但仍然应该把它作为一种重要的状态用来作为参考，因为有很多求解平衡的方法可供选择（其中也包括有限元的应用），而这些计算方法并不是在所有情况下都正确，需要加以判断。

由于循环过程不完全符合热力学的内容，我们首先研究循环过程。某些应用有限元的特殊之处将在本书第九章中加以说明。除1—3节在稳态振动中已经介绍的内容外，时间的有限化问题遇到很多困难。对线弹性系统来说，至少可能从理论分析上得出一个最佳的有限化的方法。岩土力学的非线弹性系统的瞬变振动属于那些从理论分析上很难处理的过程，目前还不适合采用有限元来处理。

表1—1第三列所列的单一过程有某些共同的特点，这些将要预先加以解释。Lebon和Lambermont（1973）为线性化学系统推导的变分原理看来可以用于岩土力学：

$$\delta_f \int_t \int_B (\dot{G} - D)\, dB\, dt = 0 \qquad (1—17)$$

G与D的符号意义与前相同，即吉布斯函数和势能耗散。符号δ_f的意思代表条件变分，即当变分过程中，$\partial G/\partial t$对状态变量变化率的关系以及G的线性矢量算子对状态变量梯度的关系都维持不变。附有这种限制条件，使（1—17）式的Euler-Lagrange方程变成线性动量、质量和能量的守衡定律。

与平衡和流动平衡不同，（1—17）式通常并不意味着具体的积分对真实过程有驻值。由于条件变分可以引起某些误差，为稳妥起见，建议按每种特殊情况来确定其Euler—Lagrange方程。Desai（1972）提出一个形式上与（1—17）式相似的条件变分用于岩土力学的有限元法。在数值计算方面和热力学方面，仔细慎重地利用条件变分是明智的。

（1—1）式关于平衡的变分原理和（1—4）式关于流动平衡的变分原理，都作为特例包括在（1—17）式之中。平衡问题：从一种平衡状态向另一种状态作拟静力的转换时，

假定没有动力损耗；而从（1—17）式中的$\int_t \dot{G}\,dt=G$可以进行积分（若有不合理的参考值则除外）并推得（1—1）式。而流动平衡则由于稳态的存在，（1—17）式中对t的积分可以略去，就立刻会得到（1—4）式。从（1—1）、（1—4）和（1—17）式的联系关系可以看出：平衡问题与流动平衡相当于转换过程的极限状态。

由于假设过程是单调的，初始状态与终端状态给于转换过程很大影响。技术上感兴趣的岩石和土中的力学过程照例是有能量损耗的。与那种特殊简单的稳态耗散过程有关的，只是状态变量的瞬间值而不是它们与前面数值或将来达到的数值之间的差值。也就是说可以把过去受力情况的记忆全部抹掉。由此我们可以归结为：许多岩土力学过程的终端条件对计算结果的影响，较初始条件的影响要大得多，关于这一点可参看第三章。我们将根据材料的特性把转换过程进一步加以分类。

在线性扩散过程中，迁移变化率表现为标量势能。我们用化学扩散说明（1—17）式的变分原理与已知方程之间的关系。为简化起见，只考虑一个空间变量x和一种化学混 合物。

唯一独立的状态变量是化学浓度C。若略去重心速度v不计，则导出随化学浓度变化的吉布斯函数和动力耗散如下：

$$G_V=-\frac{1}{2}kc^2 \qquad D_V=\frac{1}{2}d\left(\frac{\partial c}{\partial x}\right)^2 \tag{1—18}$$

上式中有两个材料常数k和d，前者说明化学能量的部分，后者说明动力耗散。

变分原理（式1—17）取如下特殊形式：

$$\delta_t\int_t\int_V\left(\frac{\partial G_V}{\partial t}-D_V\right)dV\,dt \tag{1—19}$$

式中只对化学势能C取变分而维持$\partial C/\partial t$为常数。这样的条件变分导出了Euler-Lagrange方程式：

$$-k\frac{\partial c}{\partial t}+d\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}=0 \tag{1—20}$$

这是人们熟悉的扩散方程。上述作法可以直接推广到三维中去。

现在可以按两种方法进行有限元法公式的推导，这两种推导方法对所有的转换过程都适用，它们是：用时间有限差分的方法或是用对时间依赖关系取变分的方法。前一种方法经常使用（参看本书第八、九章），但由此可能产生的误差不易确定。而后一种方法会出现一些重大的形式上的困难，故尔很少采用。

化学扩散可以借助于有限元很好地加以计算，但它对于岩土力学并不特别适用。必须随时想到（1—17）式的变分原理以及其有限的变换形式对于其他的一些扩散过程，如不饱和的孔隙流、膨胀、热传导、电渗透以及这些过程的联合作用等都是有用的。由于所有这些过程都服从势能定理，因而有限元具有很有利的前景。在土壤物理中，一些必要的本构参量已经为人们充分了解了。

多孔—弹性的底层土壤的固结属于这种转换过程，它的求解方法已为岩土力学完善地解决了。为使之更便于理解，在这里只研究其一维过程。在这种情况下，其压力高度h决定于高度z与孔隙压力u。（$h=z+u/r_w$）此压力高度是唯一的标量势能（形式上相当于化学势能）。假如按固结理论的惯例，不计水的可压缩性和速度对孔隙基质的作用，则可以得到：

$$G_V=-\frac{1}{2E_S}(\sigma')^2 \qquad D_V=\frac{1}{2}k\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \tag{1—21}$$