上海交通大学 1982－1995 年

高等数学竞赛试题精解

李重华　孙薇荣
景继良　郑麒海　编著

上海科学普及出版社

上海交通大学 1982—1995 年

高等数学竞赛试题精解

李重华　孙薇荣
景继良　郑麒海　编著

上海科学普及出版社

(沪)新登字第 305 号

责任编辑　顾蕙兰

上海交通大学 1982—1995 年
高等数学竞赛试题精解
李重华　孙薇荣
景继良　郑麒海　编著
上海科学普及出版社出版
(上海曹杨路 500 号　邮政编码 200063)

新华书店上海发行所发行　常熟文化印刷厂印刷
开本 850×1168　1/32　印张 4　字数 106000
1996 年 6 月第 1 版　1996 年 6 月第 1 次印刷
印数 1—5000

ISBN 7-5427-1127-X/G·310　定价:7.00 元

前　言

《高等数学竞赛试题精解》一书，刊载了上海交通大学应用数学系为配合学校每年一度在一年级学生中选拔优异生而举行的高等数学竞赛试题和部分专业评选“景福奖学金”的选拔试题。自1982年以来至今已连续举办了十四次竞赛活动，大多数竞赛试题是经过编者精心构思、认真推敲而成。

本书的前半部分精选171道题目，并按教学内容进行分类编排（题目后面注明竞赛年份）；书的后半部分给出试题的分析和解答。书中题目构思巧妙、解答简明、论证严谨、实用有趣、富有启迪。

本书最后附有：上海、北京、陕西、大连等省市的大学生高等数学竞赛试卷以及北京理工大学、西安交通大学、东北大学、上海交通大学等学校的高等数学竞赛试卷，便于读者对竞赛题目作全面了解。

编者献出此书，有助于广大数学爱好者学习高等数学，进一步提高高等数学的知识水平和解题的技能技巧。书中有不妥之处，望广大读者与同仁指正。

编者

1995年12月于上海交通大学

目　录

第一章　函数、极限、连续

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且在该区间上恒有 $f(x+a)=\frac{1}{2}+\sqrt{f(x)-f^2(x)}$，其中 a 为正实数。试证：$f(x)$ 为周期函数。（1988 年）

2. (1) 对于任意二个实数 a、b，证明：

$$\max\{|a+b|,|a-b|,|b-1|\}\geqslant\frac{1}{2};$$

(2) 满足 $3x+y\leqslant 30$ 的正整数组 (x,y) 共有多少？

（1990 年景福奖）

3. 试化简函数 $y=\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}+\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ 的表达式，然后画出它的草图。（1993 年景福奖）

4. 设 $(3x-1)^6=a_0x^6+a_1x^5+\cdots+a_5x+a_6$，求 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 的值。（1992 年景福奖）

5. 设 $f(x)$ 是三次多项式，且有

$$\lim_{x\to 2a}\frac{f(x)}{x-2a}=\lim_{x\to 4a}\frac{f(x)}{x-4a}=1\quad(a\neq 0)，试求：$$

$$\lim_{x\to 3a}\frac{f(x)}{x-3a}$$

（1983 年）

6. 计算极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\{\lim\limits_{m\to\infty}[\cos(\pi n!x)]^{2m}\}$（$n$、$m$ 为自然数）。

（1983 年）

7. 设 $a_1=3, a_n=2a_{n-1}^2-1\quad(n\geqslant 2)$，试求：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^n a_1a_2\cdots a_{n-1}}$$

（1985 年）

8. (1) 设 $y_n=x_{n-1}+2x_n(n=2,3,\cdots)$，试证：当数列 $\{y_n\}$ 收敛时，$\{x_n\}$ 也收敛；

（2）设 $y_n = x_{n-1} + x_n (n = 2,3,\cdots)$，当 $\{y_n\}$ 收敛时 $\{x_n\}$ 必收敛吗？为什么？（1986 年）

9. 设数列 $\{a_n\}$ 具有下列性质：

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots ;$$

而数列 $\{b_n\}$ 由下式定义：

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \frac{1}{\sqrt{a_k}}, \quad n = 1,2,\cdots。$$

试证：数列 $\{b_n\}$ 收敛。（1988 年）

10. 设 $f(x) = \dfrac{2x + |x|}{4x - 3|x|}$，求：

（1）$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$；（2）$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$；（3）$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$；

（4）$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$；（5）$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$。（1991 年）

11. 设 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1} \cdot x_n}, \quad n = 1,2,\cdots$，求：$\lim\limits_{x \to \infty} x_n$（1991 年）

12. 设数列 $\{x_n\}$ 为：

$$x_1 = \sqrt{7}, \quad x_1 = \sqrt{7 - \sqrt{7}}, \quad x_{n+2} = \sqrt{7 - \sqrt{7 + x_n}}$$

证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求出它的极限。（1992 年）

13. 设数列 $\{a_n\}$ 由下式给出：$a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = (\sqrt{2})^{a_n} (n = 1,2,\cdots)$，证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛。（1994 年）

14. $f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}, x \geqslant 0$，求极限：$\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$

（1995 年）

15. 设 $x_1 = \dfrac{a}{2}, x_{n+1} = \dfrac{a + x_n^2}{2} (n = 1,2,\cdots)$，其中 $0 < a < 1$。证明：数列 $\{x_n\}$ 收敛。并求 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$（1991 年景福奖）

16. 如图 1 所示，$AB + BC = AD$，当 AB 与 AC 的夹角 θ 变化

时，点 C 在 AD 上移动，求 $\lim\limits_{\theta\to\infty}\dfrac{CD}{\theta^2}$

（1991 年景福奖）

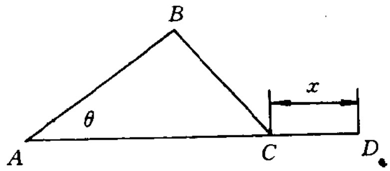

图 1

17. 设 $0 < a_1 < 2$，且 $(2-a_n)a_{n+1} = 1(n=1,2,\cdots)$。

证明：数列 $\{a_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ （1994 年景福奖）

18. 求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+2\sin\theta)(x+\cos\theta)}-x\right]$$ （1992 年景福奖）

19. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且 $f(0)=f(1)=0$，试证对任意一个实数 $l(0<l<1)$，必存在 $x_0(0\leqslant x_0<1)$，使 $f(x_0)=f(x_0+l)$ （1982 年）

20. 设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的连续函数。试证：对一切 x 满足 $f(2x)=f(x)e^x$ 的充要条件为 $f(x)=f(0)e^X$ （1986 年）

21. 下列命题若成立，请给出证明，否则举出反例。

(1) 若 $f(x)(x\in(-\infty,+\infty))$ 在 $x=0$ 处连续，则存在 $\delta>0$，$f(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 中也连续；

(2) 若 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta_1,x_0+\delta)(\delta>0)$ 中连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=A$（有限），则 $f'(x_0)$ 存在；

(3) 若 $f(x)(x\in[a,b])$ 在 $x_0\in(a,b)$ 上取得极小值，则存在 $\delta>0$，使 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 单调降，$f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 单调升。 （1986 年）

22. 设 $f(x)=\left[\dfrac{1}{1+|x|}\right]$，其中 $[t]$ 表示不超过 t 的最大整数，求函数 $f(x)$ 的间断点，并说明其所属类型。 （1992 年）

23. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且对于 $x>0$ 满足 $f(x)=f(x^2)$，试证：$f(x)$ 为常数。 （1990 年景福奖）

第二章　导数与微分

24.（1）设 $f(x)=25$，试求 $f[f'(x)]$

（2）设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，试求 $f'[f(x)]$　　（1983 年）

25. 设过曲线 $\begin{cases} x=\cos^n t \\ y=\sin^n t \end{cases}$

上的点的切线与两坐标轴交于点 P 和 Q。试问 n 为何值时，线段 PQ 的长度是一个与 t 无关的常数，并求这时的 $|PQ|$。（1984 年）

26. 设对任意 x、y 有 $f(xy)=f(x)+f(y)$，且 $f'(1)=a$，试证：当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\dfrac{a}{x}$　　（1984 年）

27. 设 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处连续，试求函数 $f(x)=x\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处的微分。　　（1985 年）

28. 设计一个地面控制的自动降落系统，需把接近跑道的降落路线设计为一条三次抛物线（如图 2）。设开始下降的高度为 h，O 点为着地点，垂直方向的加速度最大绝对值为 $\dfrac{g}{10}$，水平方向飞行速度为常数 u。试求允许下降点 x_0 的最小值。

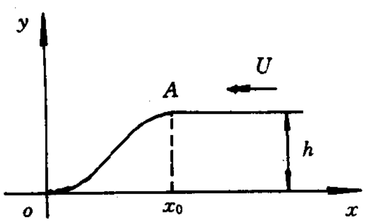

图 2

（1985 年）

29. 设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是实数，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，试证：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leqslant 1$$　（1986 年）

30. 设函数 f 定义在整个实数轴 R 上，若 g 是任一（实系数）多项式，则 $f[g(x)]=g[f(x)]$ 对一切 $x\in R$ 成立。试求函数 f。

（1987 年）

31. 试说明：为什么图 3 中所画的图形是不可能的。（1989 年）

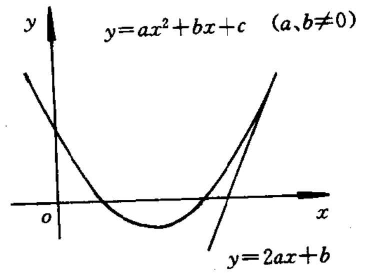

图 3

32. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 有定义，且 $f'(0)$ 存在，又对于 x，y，恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$，求 $f(x)$。（1990 年）

33. 设 $P(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^2}{n!}$，证明：方程 $P(x)=0$ 没有重根。（1993 年）

34. 设 $x_n=\frac{1}{n+a}+\frac{1}{n+1+a}+\cdots+\frac{1}{n+n+a}$，其中 $a>-1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$（1990 年景福奖）

35. 试用自变量变换：$x=\sin t$ 变换方程：

$$(1-x^2)y''-xy'+a^2y=0 \quad (a \text{ 为实常数})。$$

（1995 年景福奖）

第三章　多元函数微分

36. $f(x,y,z)=\sin[x\sin(y\sin z)]$，试求 f_x、f_y、f_z。(1983 年)

37. 设 $z=f(x,y)$，$x=\varphi(y,z)$，试求$\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$。　(1983 年)

38. 设 $x+y^2=u$，$y+z^2=v$，$x^2+z=w$，试求$\dfrac{\partial x}{\partial u}$及$\dfrac{\partial x}{\partial v}$。

(1984 年)

39. 设 $F(x,y)$ 是二次齐次函数，试证：

$$x^2\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2F$$

(1985 年)

40. 设 $f(x,y,z)$ 为 n 次齐次函数，试证：

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f(x,y,z)$$
$$=n(n-1)f(x,y,z)$$

(1986 年)

41. 本题中两题任选一题：

(1) 试证：曲面 $z=x+f(y-z)$ 的所有切平面恒与一定直线平行(其中 f 可微)；

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$，试证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$　(1987 年)

42. 设 f 可微，试证：曲面

$$f\left(\frac{y-b}{x-a},\frac{z-c}{x-a}\right)=0$$

的所有切平面通过一定点。　(1988 年)

43. 试证：可微函数 $z=f(x,y)$ 是 $ax+by(ab\neq 0)$ 的函数的充要条件为 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$　(1989 年)

第四章　中值定理、单调性、极值

44. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有三阶连续导数，且在等式 $f(x+h)=f(x)+hf'(x+\theta h)\ (0<\theta<1)$ 中 θ 与 h 无关。试证 $f(x)$ 必定是一次或二次函数。　　(1983 年)

45. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$f(a)=f(b)=0$。试证：对任意常数 k，在 (a,b) 内存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=kf(\xi)$

(1984 年)

46. 设函数 $f(x)$、$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且 $g'(x)\neq 0$，试证在 (a,b) 内存在一点 c，使

$$\frac{f(a)-f(c)}{g(c)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(1985 年)

47. (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{1986}}{n^{\alpha}-(n-1)^{\alpha}}$ 为异于零的有限数，试求 α 及此极限值；

(2) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{3}$，其中 $f(x)$ 有连续二阶导数，试求 $f(0)$、$f'(0)$、$f''(0)$，并计算

$$\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$$

(1986 年)

48. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$。试证：在 $[0,1]$ 上存在 x_1、x_2，使

$$\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$$

(1986 年)

49. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中有三阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$（有限），$\lim\limits_{x\to\infty}f'''(x)=0$。试证：

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}f''(x)=0$$

(1986 年)

50. 试比较 e^{π} 和 π^{e} 的大小。　　(1987 年)

51. 设 $0<x_i<\pi(i=1,2,\cdots,n)$，且令

$x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，证明：

$$\left(\frac{\sin x_1}{x_1}\right)\left(\frac{\sin x_2}{x_2}\right)\cdots\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)\leqslant\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \qquad (1989\text{年})$$

52. 证明：当 $0<x<1$ 时，

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x} \qquad (1991\text{年})$$

53. 设 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|\leqslant 1$，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$。证明在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f(\xi)+f''(\xi)=0$ (1991 年)

54. 设 $x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)(0\leqslant a\leqslant 1)$，求证：数列 $\{x_n\}$ 必收敛。(1993 年)

55. 如图 4 所示，在两条平行线之间有一长为 l 的定直线 AB，从定点 C 出发作直线 CD，并与直线 AB 相交于 P 点，问 P 点在什么位置时，使得 ΔACP 与 ΔBDP 的面积之和取最小值。(1993 年)

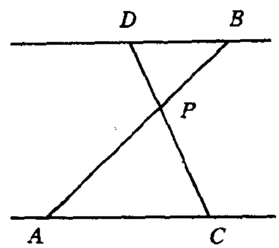

图 4

56. 证明：$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}<e\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$，其中 n 为自然数，e 为自然对数的底。(1993 年)

57. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 二阶可导，$f(a)=f(b)=0$，$|f''(x)|\leqslant 4$，求证：$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{(b-a)^2}{2}$ (1995 年)

58. 求一个次数最低的多项式，使它在 $x=-1$ 处取得极大值 12，在 $x=2$ 处取得极小值 -15。(1990 年景福奖)

59. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，且 $f'(x)>f(x)$，$f(0)\cdot f(1)<0$，试证：方程 $f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有且仅有一实根。

(1990 年景福奖)

60. 设 $f(x)$ 是定义在 (a,b) 内的单调增函数，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存

在，$x_0 \in (a,b)$。试证：$f(x)$ 在点 x_0 处连续。　　(1990 年景福奖)

61. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二次可微，且 $f(0)=f(1)=0$，证明：存在 $\xi \in (0,1)$，使

$$\xi^2 f''(\xi) + 4\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$$ (1990 年景福奖)

62. a 为何值时，方程 $ax = \ln x (a > 0)$ 有二相异实根？

(1990 年景福奖)

63. 设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且 $f(a)=f(b)$。证明：在(a,b)内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi) > 0$。　　(1990 年景福奖)

64. 设 a、b 为正实数，试证：

$$a^a b^b \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b}$$ (1990 年景福奖)

65. 证明不等式：$e^{-x} + \sin x < 1 + \dfrac{x^2}{2}, x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$。

(1993 年景福奖)

66. 设函数 $f(x) = \dfrac{1}{4}x^4 + \dfrac{a}{3}x^3 + \dfrac{b}{2}x^2 + 2x + 1$ 在 $x = -2$ 处取得极值，又另一点 ξ 为它的驻点，但非极值点。试求常数 a,b。

(1993 年景福奖)

67. 设正值函数 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$内二阶可导，且 $f''(x) \leqslant 0$，试证：对于 $x \in [0,+\infty)$，$f'(x) \geqslant 0$　　(1993 年景福奖)

68. 设 $x > 0$，且 $0 < \alpha < 1$，证明：$x^\alpha - \alpha x \leqslant 1 - \alpha$

(1994 年景福奖)

69. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上二次可导，且 $f''(x) \neq 0$，$f(a) = f(b) = 0$。试用微分中值定理证明：

(1) 对于 $x \in (a,b)$：$f(x) \neq 0$

(2) 存在 $\xi \in (a,b)$：$f'(\xi) = f(\xi)$　　(1995 年景福奖)

第五章　一元函数积分

70. 设 $f''(x)$ 在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)=0$。试证：

$$\int_a^b |f''(x)|\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)| \qquad (1982\text{年})$$

71. 设 $y=f(x)=\int_1^x \sin(\sin t)\mathrm{d}t$，试求 $\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}\right|_{y=0}$，其中 f^{-1} 是 f 的反函数。（1983 年）

72. 计算　$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x$　（1983 年）

73. 计算　$\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$　（1983 年）

74. 计算　$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$　（1983 年）

75. 试求积分：$\int_{-2}^3 \min(|x|,x^2)\mathrm{d}x$　（1983 年）

76. 设 $F(x)=\sin\left[\int_0^x \sin\left(\int_0^y \sin^3 t\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\right]$，试求 $F'(x)$。

（1983 年）

77. 计算　$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x)^{\sqrt{3}}}{(\sin x)^{\sqrt{3}}+(\cos x)^{\sqrt{3}}}\mathrm{d}x$　（1983 年）

78. 设可微函数 $f(x)$ 在 $x>0$ 上有定义，其反函数为 $g(x)$，且满足：$\int_1^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}(x^{\frac{3}{2}}-8)$，试求 $f(x)$。（1983 年）

79. 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(e^t)\mathrm{d}t$，试证：$e^x|f(x)|\leqslant 2$　（1983 年）

80. 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上具有连续导数，且 $f(1)-f(0)=1$，试证：$\int_0^1[f'(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant 1$　（1983 年）

81. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上具有连续导函数 $f'(x)$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^n f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{b-a}{2}[f(a)-f(b)]$$ （1983 年）

82. 对于 $x \geqslant 0$，试证函数 $f(x) = \int_0^x (t-t^2)\sin^{2n} t\,dt$ 的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$，其中 n 为正整数。 （1984 年）

83. 试证：$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)\,dx > 0$ （1984 年）

84. 计算下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}$ （α 为实数）

(2) $\int \frac{dx}{x-3y}$，其中 $x = y(x-y)^2$

(3) $\int_0^1 \frac{x^a - x^b}{\ln x} dx\ (a>0, b>0)$ （1985 年）

85. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导，且它的反函数为 $g(x)$。若 $\int_1^{f(x)} g(t)\,dt = x^3 - 1$，试求 $f(x)$。 （1986 年）

86. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，且 $0 < f'(x) \leqslant 1$，$f(0)=0$，试证：$\left[\int_0^1 f(t)\,dt\right]^2 \leqslant \int_0^1 [f(t)]^3\,dt$ （1986 年）

87. 试证：$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$，并由此计算：

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)} dx$$ （1986 年）

88. 试求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 1986x}{\sin x} dx$ （1986 年）

89. 设 $A_n = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-1)]\,dx$，

$$B_n = \int_0^1 x(x+1)(x+2)\cdots[x+(n-1)]\,dx。$$

(1) 试证：$A_n = (-1)^n(B_n - nB_{n-1})$，$n \geqslant 2$；

(2) 试用 A_n 表示 B_n。 （1986 年）

90. 试求：

$$I = \int_{-\pi}^{5\pi} (\cos x\cos 2x\cos 4x + \sin x\sin 2x\sin 4x)\,dx$$ （1987 年）

91. 设 $f(x)=4\int_0^x \cos^3 t\mathrm{d}t$，试证：

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant 3^{n-1}+3$$ （1987 年）

92. 设 $f(0)=1, f'(x)=\frac{1}{e^x+|f(x)|}(x \geqslant 0)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$。试证：$\sqrt{2} \leqslant a \leqslant 1+\ln 2$ （1987 年）

93. 试证：

$$\ln \sqrt{2n+1} < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\mathrm{d}x \leqslant 1+\ln \sqrt{2n-1},$$

其中 n 为自然数。 （1987 年）

94. 已知抛物线 $y=x-x^2$，过原点引两直线，使抛物线与 x 轴所包围图形的面积被该二直线三等分，试求这两直线的方程。

（1988 年）

95. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$，证明：在 $[a,b]$ 上存在一点 ξ，使

$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$ （1988 年）

96. 设 n 为正整数，试求：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$ （1989 年）

97. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可微，且 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在 ξ，使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$ （1989 年）

98. 已知 $y'(x)=\operatorname{arctg}(x-1)^2$ 及 $y(0)=0$，试计算

$$I=\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$$ （1989 年）

99. 证明下列不等式：

(1) $1 \leqslant \dfrac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\mathrm{d}x}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\mathrm{d}x} \leqslant 1+\dfrac{1}{2n}$ （n 为自然数）；

(2) 试用定积分定义证明：若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $f(x)>0$，则 $\ln\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 \ln f(x)\mathrm{d}x$ （1990 年）