青年数学叢書

复数和保角映象

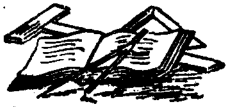
馬庫希維奇著

中国青年出版社

青年数学叢書

複数和保角映象

馬庫希維奇著
高　徹　譯



中國青年出版社
1957年·北京

內 容 提 要

本書从实数的几何表示講起，逐步引出复数和它的一些最簡單的函数。叙述采取几何形式，把复数看作有向綫段，把函数看作映象，并且处处結合到实际应用。讀者只要具有高中数学知識，即使对复数的性質不大熟悉，也可以接受。

复数和保角映象

〔苏〕馬庫希維奇著
高 彻 譯

*

中国青年出版社出
（北京东四12条老君堂11号）
北京市書刊出版業营業許可証出字第036号
中国青年出版社印刷厂印刷
新华書店总經售

*

787×1092 1/32　1 3/4 印張　26,000 字
1957 年 4 月北京第 1 版　1957 年 4 月北京第 1 次印刷
印數 1—20,000

統一書号：13009·117

定价(8)一角九分

序

这本小册子把复数和它的一些最簡單的函数(包括儒科夫斯基函数和它在飞机翼型構造上的应用)介紹給讀者．敍述采取几何形式．把复数看作有向綫段，把函数看作映象．为要引导讀者这样来理解复数，我們就从实数和它的运算的几何解釋开始講起．这本小册子是根据作者为九年級和十年級同学作演講的稿子写成的．幷不要求讀者先熟悉复数．

作　者

А. И. МАРКУШЕВИЧ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
ГОСТЕХИЗДАТ
МОСКВА, 1954

青年数学叢書

複数和保角映象

馬庫希維奇著
高 徹 譯

中國青年出版社
1957年·北京

序

这本小册子把复数和它的一些最簡單的函数(包括儒科夫斯基函数和它在飞机翼型構造上的应用)介紹給讀者. 敍述采取几何形式. 把复数看作有向綫段,把函数看作映象. 为要引导讀者这样来理解复数,我們就从实数和它的运算的几何解釋开始講起. 这本小册子是根据作者为九年級和十年級同学作演講的稿子写成的. 并不要求讀者先熟悉复数.

作　者

А. И. МАРКУШЕВИЧ
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И
КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ
ГОСТЕХИЗДАТ
МОСКВА, 1954

1. 在作实数的几何表示时，我們采用了数軸，也就是采用一条直綫，在这条直綫上給定一点 A（就是坐标的原点），表示数目 0，又給定另一点 B，表示数目 $+1$（图 1）。

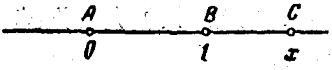


图 1.

我們把从 A 到 B 的方向看作数軸的正方向，把綫段 AB 看作長度的單位。用任何綫段 AC 来表示某一个实数 x，它的絕对值等于这个綫段的長。如果 C 和 A 不相重合（也就是說，如果数 x 不等于 0），那末当从 A 到 C 的方向和軸的正方向一致时，x 是正的，当这方向和軸的正方向相反时，x 是負的。

2. 我們把数軸上的任何綫段都看作有向綫段——直綫上的向量。我們在每个向量上都分别出始点和終点，就用从始点到終点的方向作为向量的方向。写出向量要用兩个字母：在前面位置的是始点，在后面位置的是終点。每一个向量，不管它的始点是在什么地方（不一定要在 A 点），都表示某一个实数，它的絕对值等于向量的長度。当向量的方向和軸的正方向一致时，这个数是正数，当它的方向和軸的正方向相反时，这个数是負数。例如，向量 AB（始点是 A，終点是 B）表示数目 $+1$，而向量 BA（始点是 B，終点是 A）就表示数目

-1.

3. 向量的方向也可以用它和軸的正方向之間的交角来决定。要是向量的方向和軸的正方向一致，我們就認为这个角等于0°。要是它和軸的正方向相反，我們就認为这个角等于180°(或$-180°$)。設x是一个任意实数；如果$x \neq 0$，那末表示这个数的向量和軸的正方向之間的交角叫做数x的幅角。很明显，正数的幅角等于0°，負数的幅角等于180°(或$-180°$)。数x的幅角記作：$\operatorname{Arg} x$(Arg是拉丁字argumentum的前三个字母，argumentum在这里可譯作記号或符号)。数0不是用向量来表示，而是用点来表示的。虽然以后我們会把点看作向量的特殊情形——長度是零的向量，但是在这种情形，我們既不能談論它的方向，也不能談論它和数軸的交角；因此，数0就不会有任何幅角。

4. 我們現在来討論实数运算的几何解釋。在这里，应当談談加法和乘法的解釋，从这里就很容易轉到逆运算——减法和除法的解釋。設c_1和c_2是兩个实数，AB_1和AB_2是表示它們的向量。我們現在来寻找一条規則，根据这条規則，在知道向量AB_1和AB_2以后，就可以作出表示和数c_1+c_2或乘积c_1c_2的向量。要想得到表示和数的向量AC，应該把表示第一項的向量AB_1怎样办呢？

容易証明，在任何情形，要想得到表示和数的向量，只須在向量AB_1的終点放上一个就長和方向来說都和向量AB_2一致的向量B_1C就可以了；向量AC也就是我們所求的向量(图2)。

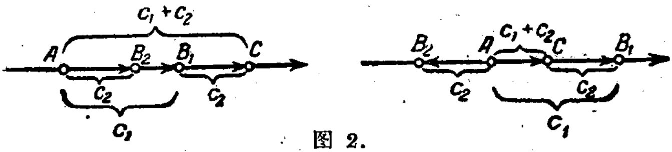


图 2.

5. 現在来討論乘法. 如果其中有一个因子等于 0，那末积就等于 0；在这种情形，表示乘积的向量縮成只有一个点. 現在假定沒有一个因子等于 0. 这时候乘积 c_1c_2 的絕对值[①]就等于 $|c_1|\cdot|c_2|$，也就是 c_1 和 c_2 的絕对值的积. 因此，表示乘积的向量 AD 的長，就等于表示因子的向量 AB_1 和 AB_2 的長的乘积. 乘积 c_1c_2 的符号，当 $c_2>0$ 时，和 c_1 的符号一致；当 $c_2<0$ 时，和 c_1 的符号相反. 換句話說，AD 的方向，当 $\operatorname{Arg} c_2=0°$（也就是 $c_2>0$）时，和 AB_1 的方向一致；当 $\operatorname{Arg} c_2=180°$（也就是 $c_2<0$）时，和 AB_1 的方向相反. 現在，我們就不难回答这样的問題：要想从表示因子 c_1 的向量 AB_1 得出表示乘积 c_1c_2 $(c_1\neq 0, c_2\neq 0)$ 的向量 AD，应当怎样办呢？要想得出向量 AD，就应当用 $|c_2|$ 去乘 AB_1 的長（不改变向量 AB_1 的方向），然后把已經改变了的向量轉一个角，这个角等于 c_2 的幅角（就是說，如果 $c_2>0$，轉 $0°$；如果 $c_2<0$，就轉 $180°$）；得

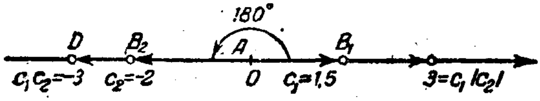


图 3.

---

① 一数 c 的絕对值記作 $|c|$. 例如，$|5|=5$，$|-3|=3$，$|0|=0$.

到的向量就表示乘积．在图 3 上，用例子 ($c_1=1.5$，$c_2=-2$) 来說明了这条規則．

6．我們已經把直綫上的每一个向量同这个向量表示的数联系起来了．現在我們来討論平面上的各种向量，并且把它們也一个一个同它們表示的数联系起来．用这种方法得到的数——复数，是一种比实数更帶有普遍性質的数．实数只是复数的一种特殊情形，正如同整数是有理数的一种特殊情形、有理数是实数的一种特殊情形一样．

我們从这样开始：在我們要討論的向量所在的平面上，引兩条互相垂直的直綫——兩条具有公共原点 A 的数軸 Ax 和 Ay，又設綫段 AB 是表示單位長度（图 4）．这样，在軸 Ax 上或和軸 Ax 平行的任何一个向量，仍旧可以看成是实数的几何形象（几何表示）．例如向量 AB 和 $A'B'$，它們的長都等于一个單位，并且方向和 Ax 的正方向相同，它們都表示数目 1；向量 CD，長等于 2，方向和 Ax 的正方向相反，它就表示数目 -2．不在 Ax 上，又不跟这个軸平行的向量，例如 AE 和 FG，不表示任何实数．这种向量我們說它們表示的是虛数．長短相等、互相平行而且方向一致的向量，表示同一个虛数；而長短不等、方向不同的向量，就表示不同的虛数．在这里，我們多少是搶先了一点，因为，还不知道虛数是什么，就已經在談

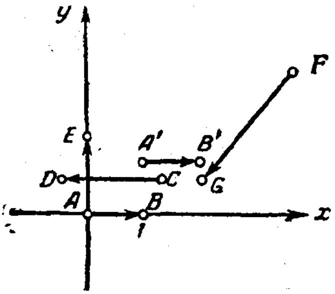


图 4.

論它們的形象了；然而在生活里，往往也是先認識形象，然后再認識本質的。

上面我們已經指出，实数的运算可以用表示这些实数的向量的运算来代替。同样情形，虛数的运算，我們也可以用表示它們的向量的运算来代替。我們不重新发明运算規則，却把已經找到的实数加法和乘法的几何运算規則保留了下来。不同的只是，在实数是用直綫 Ax 上的向量（或者平行于这条直綫的向量）来表示，而虛数却用平面上不在 Ax 上、也不和 Ax 平行的向量来表示。

7. 在往下討論以前，我們要着重指出，实数（我們已經熟識了）和虛数（我們才只就"图象"知道它）都叫做复数（"复"字是复合的意思）。

对照起来，我們想到，有理数和无理数在合起来討論的时候，也要求一个公共的名称：实数。

现在来討論复数的加法。我們假定实数加法的規則仍旧有效。設 AB_1 和 AB_2 是兩个向量，分別表示兩个复数 c_1 和 c_2；要作出表示它們的和 c_1+c_2 的向量，我們从向量 AB_1 的終点引向量 B_1C，長短和方向都跟向量 AB_2 一致；

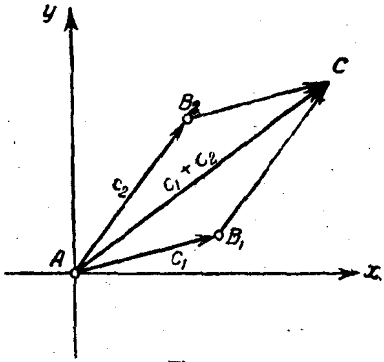


图 5.

連接 AB_1 的始点跟 B_1C 的終点的向量 AC，也就是所求的向

量(图5)。

在这里新的一点是：我們把这条規則运用到了复数(在平面上表示出来的任何向量)的加法，而以前却只是运用在实数(在直綫上表示出的向量)上。

如果运用这条規則来作和数 c_2+c_1 (加項交換了位置)的图形，那末就要从表示 c_2 的向量 AB_2 的終点引一个向量，它的長短和方向都跟表示 c_1 的向量 AB_1 一致。显而易見，我們得出了同一点 C (在图5上我們得到了一个平行四边形)，因此，和数 c_2+c_1 跟和数 c_1+c_2 是由同一个向量 AC 来表示的。換句話說，从加法規則可以推出交換律的成立：

$$c_2+c_1=c_1+c_2.$$

很容易証明，結合律也成立：

$$(c_1+c_2)+c_3=c_1+(c_2+c_3).$$

所有必要的作图都画在图6上。显而易見，把 c_3 (CD) 加上 c_1+c_2 (AC)，正跟把 c_2+c_3 (B_1D) 加上 $c_1(AB_1)$ 一样，我們得

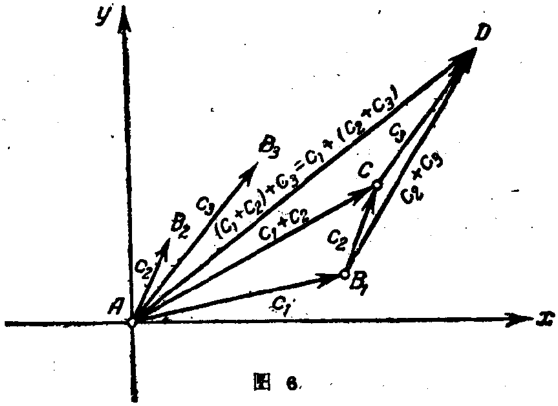


图 6.

出了同一个向量 AD。

8. 在轉到乘法以前，我們先把絕对值和幅角的概念搬用到复数上来。

設向量 AB 表示复数 c。向量 AB 的長就叫做 c 的絕对值，而 c 的幅角就是軸 Ax 的正方向和向量 AB 的交角。这个角可以就反时針运动的方向計算，这时候它具有正值，或者沿时針运动的方向計算，这时候它具有負值；此外，还可以随便把它加上360°的任何整数倍。

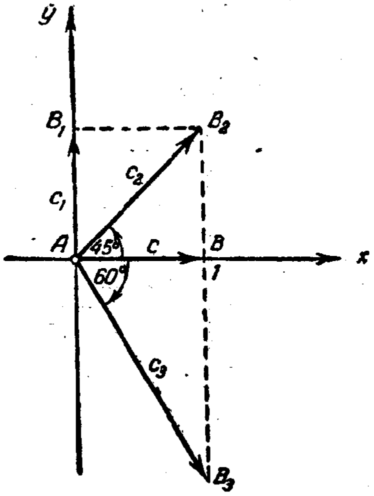


图 7.

跟实数一样，数目 c 的絕对值和幅角分别記作：$|c|$ 和 $\operatorname{Arg} c$。和实数的情况比較起来，不同的是：虛数的幅角不等于 0° 和 ±180°，而实数(不等于 0 的)的幅角可以是 0°(如果它是正数)或 ±180°(如果它是負数)。

在图7上画了向量 AB、AB_1、AB_2 和 AB_3，它們分别表示复数 c、c_1、c_2 和 c_3。讀者很容易証明下面的式子成立：

$$|c|=|c_1|=1,\quad |c_2|=\sqrt{2},\quad |c_3|=2;$$

$$\operatorname{Arg} c=0^\circ,\ \operatorname{Arg} c_1=90^\circ,$$

$$\operatorname{Arg} c_2=45^\circ,\ \operatorname{Arg} c_3=-60^\circ\ (\text{或 } 300^\circ).$$

9. 在引进复数的絕对值和幅角这兩个概念以后，我們就可以来談复数的乘法規則了。在字面上，它和相应的实数乘法規則是一致的：要用复数 c_2 去乘复数 c_1 ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$)，就必須把 $|c_2|$ 去乘表示 c_1 的向量的長(不变更这向量的方向)，然后把已經改变了的向量繞 A 点轉一个角，这个角等于 c_2 的幅角；得到的向量就表示乘积 c_1c_2。例如，乘积 c_1c_2 是用向量 AD 表示的(图 8)，而乘积 c_2c_3 是用向量 AE 表示的(图 9)：

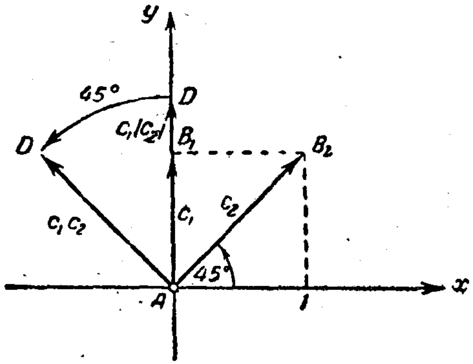


图 8.

对于乘法規則，还必須加上一点，就是当其中有一个因子等于零的时候，乘积也等于零。

如果把乘法規則运用在乘积 c_2c_1 (因子次序改变了)，那末，就应該把表示 c_2 的向量的長改变 $|c_1|$ 倍，并且把已經改变的向量繞 A 点轉一个角，这个角等于 c_1 的幅角。显而易見，得到的結果和乘积 c_1c_2 一样：在这兩种情况，得到的向量的長都是 $|c_1|\cdot|c_2|$，而 Ax 和这个向量的交角都等于 $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2$。

于是，
$$c_1c_2 = c_2c_1,$$
这就是說，对于复数乘法，交換律是成立的。

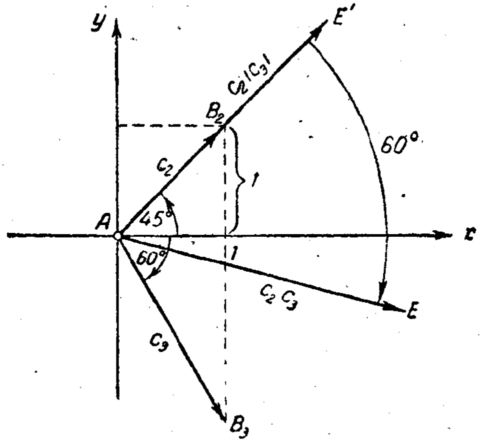


图 9.

同样地，結合律也成立：

$$(c_1c_2)c_3=c_1(c_2c_3).$$

事实上，所討論的这兩个乘积，都是由同一个向量表示的；这向量的長是 $|c_1|\cdot|c_2|\cdot|c_3|$，$Ax$ 軸和它的交角等于 $\mathrm{Arg}c_1+\mathrm{Arg}c_2+\mathrm{Arg}c_3$.

最后，我們来証明分配律成立：

$$(c_1+c_2)c_3=c_1c_3+c_2c_3.$$

在图 10 上，向量 AB 表示和数 c_1+c_2；如果保持 AB_1 和 AB_2 的方向不变，把三角形 AB_1B 各边的長乘以 $|c_3|$，就得到三角形 AK_1L_1，它和三角形 AB_1B 相似。这个三角形由向量 AK_1、K_1L_1、AL_1 作成，这三个向量是从向量 c_1、c_2 和 (c_1+c_2) 把各边的長都变更 $|c_3|$ 倍（方向不变）得到的。現在把三角形 AK_1L_1 繞 A 点轉 $\mathrm{Arg}\,c_3$ 度角；就得到三角形 AKL。按乘法

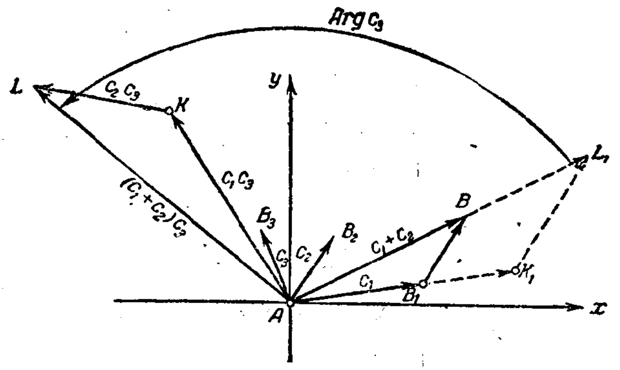


图 10.

规則，向量 AK 是表示 c_1c_3，KL 是表示 c_2c_3，AL 是表示 $(c_1+c_2)c_3$。按加法規則，从这个三角形可以得到：

$$c_1c_3+c_2c_3=(c_1+c_2)c_3,$$

这也就是要証明的。

10. 减法和除法运算，在定义上就是加法和乘法的逆运算。这就是說，如果有复数 c_1、c_2 和 d，而 $c_1=c_2+d$，也就是 c_1 是 c_2 跟 d 的和，那末我們就可以把 d 叫做 c_1 跟 c_2 的差，写作 $d=c_1-c_2$。把 c_2、d 和 c_1 之間的这种关系用图表示出来（图11），我們就可以看到，如果把 B_2 点（表示减数的向量的終点）和 B_1 点（表示被减数的向量的終点）用一向量連接起来，并且把前一点作为該向量的始点，后一点作为該向量的

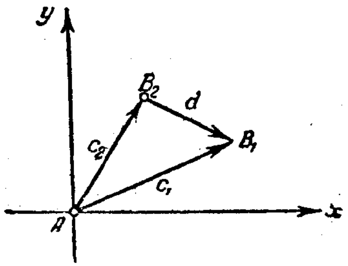


图 11.

終点，就得到了表示差 c_1-c_2 的向量。

同理，如果有复数 c_1、$c_2(c_2\neq 0)$ 和 r，$c_1=c_2r$，也就是說，如果 c_1 是 c_2 和 r 的积(图 12)，我們就把 r 叫做 c_1 和 c_2 的商，写作 $r=c_1\div c_2$ 或 $r=\frac{c_1}{c_2}$。

从这里可以推知，$|r|$——表示 r 的向量的長——是 $\frac{|c_1|}{|c_2|}$，$\operatorname{Arg} r$ 等于角 B_2AB_1，这个角是按照从 AB_2 到 AB_1 方向計算的(在图12上，这个方向是顺时針旋轉的，因而这角应該看作負角)。

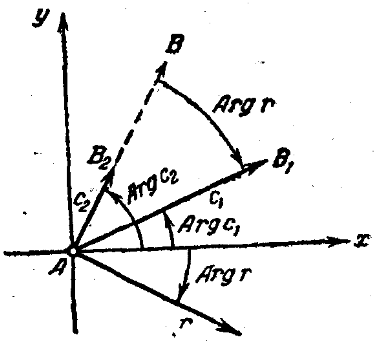


图 12.

我們来注意一些特殊情形。如果 c_1 和 c_2 是由平行而且方向一致的向量来表示的，那末角 B_2AB_1 等于 $0°$，因而 $\operatorname{Arg} r=0°$，也就是 r 是一个正的实數。如果 c_1 和 c_2 是由平行但方向相反的向量来表示的，那末角 B_2AB_1 等于 $180°$，r 是一个負的实数。

总結起来，可以說，复数的加法和乘法跟实数的情形一样，适合于交换律、結合律和分配律；而減法和除法也跟实数的情形一样，在定义上就是加法和乘法的逆运算。因此，代数学中适合于实数的一切运算規則和公式，根据运算的定义和提到的規則，对于复数也应当保持有效。例如：

$$(c_1+c_2)(c_1-c_2)=c_1{}^2-c_2{}^2,$$

$$(c_1+c_2)^2=c_1{}^2+2c_1c_2+c_2{}^2,$$