数学名著译丛

几何基础

（第二版）

D. 希尔伯特 著

科学出版社

数学名著译丛

几何基础

（第二版）

科学出版社

1995

(京)新登字 092 号

内 容 简 介

本书是数学史上的一本名著，它以严格的公理化方法重新阐述了欧几里得几何学，为二十世纪数学的公理化运动开辟了道路. 本书中译本第二版是根据德文最新版即第十二版翻译的，全书包括正文、德文第七版的俄译本序言与注解，以及五个附录和五个补篇.

本书可供高等院校数学系师生、中学教师以及广大数学工作者阅读.

D. Hilbert

GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

责任编辑 张鸿林 杜小杨

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1958 年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1995 年 11 月第 二 版 印张：11

1995 年 11 月第二次印刷 字数：254 000

印数：4 000—5 360

ISBN 7-03-004512-2/O·778

定价：17.80 元

出 版 者 的 话

二十世纪数学的最显著的特征在于它的公理化，D. 希尔伯特的《几何基础》一书为这个新的方向开辟了道路．本书以严格的公理化方法重新阐述了欧几里得几何学．书中首先给出不定义的概念——点、线、平面、在……之间、一对点重合、角的重合，然后列举了欧几里得几何的公理系统，并用这些公理证明了欧几里得几何的一些基本定理，此外还证明了这些公理是独立的．可以说，本书是数学史上的一部具有划时代意义的著作．

本书第一版于 1899 年出版以后，便受到各国学术界的重视，有多种译本陆续出版．以后虽多次修订出版，使论述更加清楚，内容更加完善，但其轮廓及本质则无大变动．

我国数学界老前辈，已故傅钟孙教授曾根据第一版的英译本进行翻译，取名为《几何原理》，于 1924 年出版．解放后，我社约请江泽涵教授根据 1930 年第七版的俄译本将正文部分译出，并附俄译本的长序（裘光明译）和对正文的注解（蒋守方译）以及 1956 年第八版的一些补充，取名《几何基础》第一分册，于 1958 年出版．

希尔伯特于 1943 年去世以后，他的学生 P. 贝尔耐斯（Bernays）对第七版进行多次增补、修订，到 1977 年已出到第十二版．第十二版与第七版主要有三个不同点：第一，对正文 §8 第五组公理（连续公理）进行了改写，同时在正文其他地方也稍有变动，并增加了许多注记；第二，去掉了原来十个附录中与几何无直接关系的后五个附录；第三，P. 贝尔耐斯又在全书最后增写了五个补篇．

我社征得江泽涵教授的同意，约请朱鼎勋教授根据第十二版，对第七版的中译本进行增补、修订．由于第七版俄译本的长序是前苏联著名几何学家 П. К. 拉舍夫斯基（Рашевский）所写，对全书作了全面而又系统的介绍，这个序以及俄译本的注解对读者

均将有所帮助，故予以保留.

朱鼎勋教授在病中坚持进行此项工作，孜孜不倦，花费心血. 遗憾的是，尚差一个附录没有译出，朱教授便不幸去世了. 所余工作由陈绍菱教授完成.

本书正文部分的译稿经程其襄教授仔细校阅，俄译本的注解经张文贵同志核对，在此，谨致谢意！

科学出版社

第十版序言

希尔伯特在世时，他所著的《几何基础》的最后一版是第七版．为了表明他关于该版书的思想，在这里我们重印他所写的序言中的一段："当前我的第七版《几何基础》较前一版具有值得重视的改正与增补，部分是出自我在前一版出版后关于该学科的讲述，部分是由于其他作者在这段时期中所作的改进，从而使这本书的主要内容得以修订．关于这些问题曾得到我的学生 H. A. 斯米特(H. Arnold Schmidt) 的大力协助．他不但为我做了这些工作，并且还提供了自己的许多注记以及推论，特别是他独立地写出了附录II的新形式．因此对于他的协助，我在这里致以衷心的谢意．"

同时也参考希尔伯特全集第II卷(Gesammelten Abhandlungen, Bd. II., Berlin 1933) 第404页至第414页由 H. A. 斯米特所写的"关于希尔伯特的几何基础" (Zu Hilberts Grundlegung der Geometrie) 的简史．

在第八、第九以及第十版里并未引进本质上的新修正，对原书正文仅作少量改正及小量增补，但于最后则增加一些补篇，第七版中的附录I—附录X仅保留其中具有几何性质的附录I—附录V．

补篇中所增加的大部分内容是受 H. 弗里敦塔尔(H. Freudenthal)所写的"关于几何基础的历史"(Zur Geschichte der Grundlagen der Geometrie, 见数学的新记录 (Nieuw Archief Voor Wiskunde) (4)，第105页—第142页 (1957)) 一文的启发，特别是其中对原书阐述面积的理论及其应用所作的批评．他曾以此文题献于希尔伯特《几何基础》第八版一书．

至于补篇的内容则包含：

补篇I1里增添涉及到关联公理和顺序公理的推论，而将正文中的§3和§4加以扩充．特别指出在该处从范·德瓦尔登(van der

Waerden）的一篇文章“欧氏几何的逻辑基础”（De Logische Grundlagen der Euklidische Meetkunde，见补篇 I 1 中所引杂志）中取出一个注记．补篇 I 2 里放进了以前附录 VI 中关于实数公理的一些独立性问题．

补篇 II 给出正文比例论 § 14—§ 16 中所叙述的一个较简单的形式．

补篇 III 包含关于面积理论的若干补充探讨．

补篇 IV 1 则研究了从第五章的讨论中去掉顺序公理的可能性，补篇 IV 2 则是基于 D．凯内（D．Kijne）所给的注记，使有关作图问题的定理 65（§ 37）更加简捷．

补篇 V 1 包括希尔伯特在附录 II 中所构成的两个“非毕氏几何”的补充注记．

补篇 V 2 本质上是以前各版（从第二版开始）中附录 II 的推论的重演．他利用假定的安装公理，从较弱的合同公理导入较强的可能性，同时改正了原来的证明．

全书于适当处增加了有关近代文献的一些参考资料．

P．贝尔耐斯

1968 年 2 月于苏黎世

德文第七版的俄译本序言

希尔伯特的《几何基础》和它在本问题发展的历史中的地位*

П. К. 拉舍夫斯基

作为物理学的几何学

当我们学习几何学的时候，一开始——如同在中学里学习几何学时那样——就在我们的认识中产生了独特的思维世界，它奇特地既是现实的又是幻想的．事实上，我们关于直线、平面、几何体(例如球)等等的论述，是在给它们以完全确定的性质以后才进行的．然而具有作为我们研究对象的那种形状的东西，究竟在哪里和在什么意义下存在着呢？我们岂不是都知道，不论我们如何地磨(譬如说)一块金属板的表面，由于工具和动作本身的不可避免的偏差，我们永远不能把它磨成"理想平面"的形状．更何况不仅无法达到理想地平的形状，而且根据物质的原子结构，甚至还不可能无限制地接近它哩！事实上，当我们加强所要求的精确度时，金属板就将被分解成各别的原子，以致一般地所谓它的表面都无意义了．

而直线又是怎么样呢？或许可以认为光线是沿着理想的直线而传播的吧？然而量子力学告诉我们，光线是利用各别的介质——量子——而传播的，至于说到这种量子在运动时所走的道路，一般地也没有意义．

那末，我们在几何学里究竟研究些什么呢？难道只研究与物

---

* 此段苏步青教授也曾译过，发表在"数学通报"上——译者注．

质世界格格不入的幻想、我们想象力的创造吗？可是从日常的经验和从技术上的实验，我们就能坚定地知道，对这些幻想的对象所推导出来的法则和规律，都以不可克服的力量服从于物质的自然界；以致进行新的设计的工程师，当遭受失败时，可以怀疑其任何的假设，而决不会怀疑例如关于角柱体积的公式．

这些几何形象，看来好像是无足轻重的、非物质的、而同时却以不可克服的力量来刻画物质世界的，又好像可以认为（如同唯心主义哲学经常如此说的）是上帝按其自己的意象创造的，究竟是些什么呢？

唯物主义的宇宙观帮助我们来回答这个问题．让我们特地从粗糙的例子开始． 设在我们面前有筑在一块土地边上的一道围墙．如果我们要计算这块土地的面积，来拟定其规划等等，则在我们几何的计算里就将画出一条封闭的曲线来代替围墙，而用它所分隔成的平面片段来代替土地．这种使用几何概念来暗中顶替物质对象，其实质又何在呢？

问题是：不论我们是用木头还是石头来造围墙，不论我们造多宽多高，不论我们是否向旁边移动了这么一厘米等等，这块土地实际上并不因之而有所改变． 由于我们所关心的只是土地本身，至于沿其边界究竟造了些什么，实际上并不起任何作用，尽可以把所有这些都撇开不管．因此，我们抛弃了作为物体的围墙的、在当前情况下对我们不重要的极大多数的性质．围墙对我们重要的那些性质——与其长度方面的延伸性有关的性质，才属于我们考虑之列，这些性质也就正是曲线在几何意义下的性质．有同样事实的各种各样的例子是不胜枚举的：当我们讨论绳子、飞驰的炮弹的路线等等时，则在一定的精确程度下，我们所必须关心的也只是它们的那样一些性质，那就是我们称为几何曲线的性质．

总之，当我们研究几何曲线时，我们同时也就研究了土地的围墙，一定长度——与粗细相比——的绳子，以及飞驰的炮弹的路线，然而对所有这些现象而言，我们并不在各方面都保留它们性质的多样性，因为它们并不具有最大的精确性，而只是就在当前的

情况下对我们重要的一维延伸性方面来加以选择，并且也只具有实用上必要的精确程度. 于是我们叫做几何曲线的性质的这些对象的共同性质就显得突出了. 这样，假如我们说曲线没有宽度，那只不过是简短地表明，围墙的宽度实际上并不影响其所包围的土地，绳子的横截面的大小与其长度相比可以略去不计，等等而已.

所有别的几何概念和命题也都有类似的意义. 它们全都反映了物质对象的性质和物质世界的法则. 它们的"理想的"特性只是表明了在物体性质的已知联系中非主要的性质之被抛弃（抽象），特别地是它们只以一定的精确程度而被考虑. 这种抽象可以用来清楚地揭露物体的共同而又深藏的性质，我们把它们叫做延伸的性质而且在几何学里加以研究. 几何法则之所以为自然界所必须，就由于它们是从自然界抽象出来的缘故.

这样一来，反映物质现实的几何真理，以简化了的和公式化了的形状，近似地重现了物质现实. 正由于抛弃了无穷多的复杂事实，才产生了几何理论的如此使人信服的严整性和合理性. 而假如是如此的话，则很自然地，就不能强求几何学[暂时谈到的总限于欧几里得（Euclid）几何学]无限制地恰当于研究物质世界：当这种研究的精确性一超过某种限度时，几何学由于其近似地反映现实的本质，就失去了作用.

为了使它重新成为有用的，我们必须依据新的实验数据使它成为更精确的，我们必须回过来捡起在抽象过程中弃之于途的那些东西.

然而在我们建立几何学时，物质现实，究竟有哪些较为显眼的方面，被抛弃掉了呢？这首先就是物质在一定的时间内所进行的运动. 很自然地，为了在几何学里避免过分的抽象，使它接近于物质现实，我们应该重新考虑物质运动的过程，而这就说明，应该把几何学放在与力学结合成的有机整体中来讨论. "纯粹的"几何学消失了.

以上所说的种种不只属于理论上的探讨，二十世纪内科学的历史发展正就是沿着这条道路前进的. 特殊相对论（1905）把空

间和时间的延伸性结合成一个不可分割的整体，而普遍相对论(1916)更把几何学和关于物质的分布和运动的普遍学说统一在一个学科之中．因此，从到现在为止我们关于几何学所说的那种观点看来，它是物理学的一部分，因而就应该与在实验基础上的物理学一起生长和发展．

然而在几何学里还有别的、数学的方面，那是我们直到现在为止有意地置之不理的．而这方面目前对于我们是最重要的，因为它正是本书所要讲述的．

作为数学的几何学

直到现在我们完全没有考虑关于几何学的逻辑结构的问题，然而也许就是它最使初学者惊讶和要求他付出最大的注意力．这自然不是偶然的：假如把几何学看作数学的分科，其本质正就在这里．

可以说，几何学是数学——这就是从其逻辑结构方面来考虑的几何学．我们力求尽量深入地来探究这一点，因为否则本书的内容在其基本的观念方面还将会是无法了解的了．为了较为具体起见，我们依然限于三维的欧几里得几何学．

首先，很明显的是，几何学并非简单地是各自具有独立的意义的一些命题的全体．几何学的命题交织成逻辑相关的密网．更精确地，这就是说，不利用直觉地显然的、从经验得来的几何形象的性质，而只应用形式逻辑的法则，一个命题可以用纯逻辑的方法从别的命题推导出来．例如，从命题“每一个长方形都有相等的对角线”和“每一个正方形都是长方形”推出，“每一个正方形都有相等的对角线”．为了作出这个结论，完全不必须设想附有对角线的正方形；甚至可以不知道这种“正方形”和“长方形”是些什么，而“有相等的对角线”又指的什么．不管这些术语被给予什么意义，这论断重现了形式逻辑中所讨论的一种类型的三段论法，以致它总是正确的．

自然会发生这样的问题：几何学中这种类型的形式逻辑相关

性的整个系统，有什么办法可以概括无遗和使其易于被接受，而不仅在个别的例子上指出它们呢？

给这个问题以回答的是几何学的公理结构．它的目的是在几何理论里得出依靠形式逻辑论断的最大可能．当然，因为形式逻辑只能教人如何从已经知道的命题推导出新的命题，所以形式逻辑决不能无中生有．因此，至少必须随便怎么样地取一些几何命题作为真实的，然后试着从它们用纯逻辑论断的步骤推导出所有其余的命题来．

如果这个目的被达到了，则用纯逻辑的步骤（不引用几何的直觉）可以从而推导出所有其余命题的那些几何命题，就被称为公理，而从它们逻辑地推得的命题，则被称为定理．

很自然地，这时还应该尽量使得公理的数量是尽可能地少，因而也就使得在建立几何学时最大可能的工作落到形式逻辑论断一方面．事实是，只有这种情况才以最好的方式揭露了逻辑关系的全部内容和阐明了几何学的逻辑结构．

概括以上所叙述的，*作为物理学的几何学是研究物体的延伸性质的．它的命题可以而且应该用实验的方法来检验；像物理学的所有命题一样，它们只是抽象地体现了物质世界，因而只是近似地真实的．*

作为数学的几何学所关心的只是其命题之间的逻辑相关性，更精确地说，它所研究的是从若干个命题（公理）逻辑地推导出所有其余的命题．因此，作为数学的几何学的命题的真实性只能说是有条件的，即在该命题实际上是从公理推导出来的这种意义之下．

我们看到，关于几何学的这两种观点有实质上的不同，而且不管它们在实物范围里是如何地相合，几何学发展的实情，在一种情况下与在另一种情况下相比，起着不同的作用．虽然作为物理学的几何学在现实中发生，它还是实质上运用了数学上的几何学的逻辑方式；而数学上的几何学，主要是在直接或者间接从物理学领域出发的动机影响之下发展起来的．

当然，假如这样地来理解这种对立：作为物理学的几何学研究的是物质世界，而作为数学的几何学则归之于“纯精神的”创作的范围，那就完全错误了．人类思维的内容和形式归根到底还是完全由物质世界所决定的，形式逻辑的法则本身之所以能以这样的威力强迫我们接受，就在于它是多次重复的实际经验的反映．

作为物理学的几何学和作为数学的几何学的明白的划分——自然不在于提出它们的先后上，而在于实际研究的意义上——乃是十九世纪末叶到二十世纪开端时科学上的巨大而有原则性的成就．这成就是对这样的事实而言的，实质上背道而驰的两种观点的共存阻碍了彼此的发展．而在今天几乎已经是不言而喻的这种划分，绝不是通过捷径而得到的．它是作为科学思想的长期而复杂的发展的总结而得到的，在这发展中希尔伯特的《几何基础》占有显著的地位．下面我们就要用极简短的概述，来阐明这个发展中对于我们的目的最为重要的一些因素．

欧几里得的《几何原本》

欧几里得(公元前 300 年前后)的《几何原本》以下列方式包含着几何学原理的系统的叙述，它总结了到那时为止的大约三个世纪来希腊本土的数学的发展．从那时起几乎直到现代为止,《几何原本》被认为是科学的严密的论述体裁的模范;没有任何人曾经找到过对它作根本修改的理由,而我们的中学教本,直到今天，在基本上还是欧几里得的《几何原本》的加工修改版．

造成这事实的原因是：欧几里得运用了当时认为是从前面的命题推出后面的命题的严密推理的方法，以特殊的精巧和完善——自然是从当时的科学水平来看的——展开了几何学的逻辑结构．当然，要是说欧几里得曾经坚持几何学公理结构的决定性的观点,未免过分夸大．但是他无疑地有过这种倾向．实际上,在该书的开头就列举了十四个基本的命题(其中五个叫做公设,九个叫做公理),它们都是所有以后的命题的前提，而且是作为该书的基础的．然而要按纯逻辑的步骤来展开几何学，这些命题是远远不

够用的，而且在以后的证明中，欧几里得在运用真正的逻辑论断之外，同时还经常运用直觉的看法. 欧几里得所给出的很多定义——也恰好是最基本的——完全不是在逻辑的意义下的定义，而只是几何形象的直觉的描述：例如“线有长度没有宽度”等等. 要从这种定义严密逻辑地来引出任何推论是不可能的，而且在以后的论断中，它只能是如何运用直觉观念的一些说明而已.

这样一来，在《几何原本》里，决不能认为已经有了现代意义的原则性的公理法构造，而且在任何一处也不能认为已经有了这种公理法构造的实地的实现. 然而，这方面的倾向则不仅存在着，而且在后来还继续有所发展. 这可以从欧几里得著作的许多评论者的工作中看到，它们并没有提出论述方面的实质上的修正，而常常是渴望在几何学底下导入更为稳固的基石，以便使它更为完善. 这些企图都是遵循着增加公理个数的这条道路的. 从几何学的逻辑结构说，公理的不足是大家感觉到的. 甚至直到今天我们也不能知道，究竟哪些公理和公设确实是由欧几里得提出的，而哪些公理则是由后继者补充的. 可是与《几何原本》相比，这些企图并未表现出新的、原则上更高的观点，而且变成了一种摸索. 甚至在这些企图正确地接触到一些必须弥补的缺陷时，它们也被隐藏在同样的逻辑地不合理的方式之中.

几何基础问题的真正发展，没有走上欧几里得公理系统和证明的辑逻改善的正路，却是通过一连串的尝试，奇怪地在欧几里得完全正确的地方来进行修正. 这里我们指的是欧几里得第五公设的历史.

欧几里得的第五公设和非欧几里得几何的发现

欧几里得最后的第五公设说：“每当一条直线与另外两条直线相交，在它一侧作成的两个同侧内角的和小于 $2d$ 时，这另外两条直线就在同侧内角的和小于 $2d$ 的那一侧相交.”这个公设在欧几里得的系统里占有特殊的地位：它比较晚地显示出它的作用. 欧几里得的前 28 个命题的证明并未用到它. 这事实很自然地引

起了一种想法，以为一般地说这公设或许是多余的，可以作为定理来证明的．以致在实际上，欧几里得著作的许多评论者，在超过两千年的长时期中，曾想给出这种证明，还常常自认为达到了目的（而某些孤陋寡闻的僻好者到现在还在继续着这种尝试）．

所有这些证明，从我们今天的观点看来都是不对的，都是由于不加证明地假定了某个与第五公设等价的命题．这种命题的例子如下：在锐角一边上的垂直线和倾斜线永远相交；通过角内的每个点至少可以作一条直线与其两边相交；平面上不相交的直线不能无限制地彼此远离；不存在长度的绝对单位，即这样的线段，它能依据其特殊的几何性质，与其他长度的线段有所区别（如同在各种各样的角之中的直角一样）；至少存在着两个相似的三角形，等等．

证明者把这些命题中的某一个看作是显然真实的，指出第五公设的否定与它矛盾，然后就认为达到了自己的目的．然而，假如以为我们在这里碰到的事实具有粗浅的逻辑上的大错误，那就错了．事实上，在几何学现代的公理法叙述出现——这直到十九世纪末叶才达到——以前，对于如何辨别几何学中的严密的证明和不严密的证明，一般地说并无完全清楚的准绳．在所有这些证明中，一般都多次地引用了直觉性，而且并未说明这些引用究竟在什么限度内可以被认为是合理的．因此在一定程度上，第五公设的每个证明者会自以为他的假设是合理的，而且他已经证明了第五公设．直到现在才知道所有这些证明都是站不住脚的．它被卓越的天才所迅速猜测到的时候，比它被无可反驳地确定下来的时候要来得早些．

无论如何，在各种各样证明的尝试的累积下，与第五公设等价的命题的范围越来越扩大，其中的一部分已经在上面列举过．变成清楚了的是：第五公设的否定将招致所有这些命题的否定，即招致整整一系列“不可思议的”、“荒诞不经的”推论，然而在其中完全不能找到直接的逻辑的矛盾．为了寻找这种矛盾，在十八世纪里已经有一些学者，从第五公设不成立这个命题出发，颇为深入地

展开了一些推论[萨凯里(Saccheri),1733;伦勃脱(Lambert),1788].实质上这已经是非欧几里得几何的初步，然而这些工作的作者并没有达到这种认识[1].

早在1823年，伟大的俄国几何学家 Н. И. 罗巴契夫斯基(Лобачевский, 1792—1856)，已经明白地认识到证明平行公设的企图的没有价值[2]. 不久他就有了一种想法，认为第五公设的否定一般地并不引出任何的矛盾，反而促使新的非欧几里得几何体系的诞生. 他第一个公开地发表了非欧几里得几何的系统的叙述. 1826年2月11日在喀山大学数学物理系的会议上，他陈述了自己的发现的要点，到1829年，他在“喀山大学通报”上发表了论文“关于几何的本原”，其中包含了非欧几里得几何的详细的叙述. 稍晚一些获得非欧几里得几何的有约翰·鲍雅义 (Johann Bolyai, 1802—1860)，他在1832年发表了他的结果. 从高斯(Gauss, 1777—1855)逝世后才刊行的他的通信录中看到，高斯已经知道非欧几里得几何的大概. 可是，由于怕不被人了解和遭受嘲笑，他始终没有勇气公开地宣布这一点. 毫无顾忌地在俄国(1826)和在国外(1840)发表了他的结果的 Н. И. 罗巴契夫斯基，理应据有发现非欧几里得几何的绝对的优先权. 然而非欧几里得几何的创造者当其在世时并未被人理解. 直到60年代，罗巴契夫斯基的工作才为数学界所公认，而且在颇大的程度上乃是决定十九世纪数学思想全貌的转折点[3].

非欧几里得几何学在关于几何基础的问题里的意义

非欧几里得几何学直接地包括些什么内容呢? 原来在几何学里可以抛弃第五公设，而采用这样的假设：在平面上通过取在一条直线外的每一个点，有无穷多条直线不与这直线相交. 尽管这

---

1) 第五公设的历史在“Н.И. 罗巴契夫斯基全集”第一卷中 В.Ф. 卡岗 (Каган)的论文里有所叙述.

2) 看他的著作《几何学》.

3) 从较广的历史远景中来看罗巴契夫斯基的生活和创造途径，在 В. Ф. 卡岗的书《罗巴契夫斯基传》里有所说明.

假设看来如此明显地不合情理，从它却能无限制地引出推论和证明定理而不造成逻辑的矛盾．结果就产生了新的非欧几里得几何学．固然，这几何学中的许多定理，我们从直觉的观点看来，在很多方面比原来的假设还要不合情理，而且有一些简直是骇人听闻的．可是在逻辑上，叙述依然是没有毛病的．

单是这种情况已经表明几何学的逻辑结构对于几何的直觉有一定的独立性，表明几何学的逻辑展开在某种程度上可以独立地甚至与来自物理实验的直觉观念相违地进行．但是事情的另一方面有更大的意义，那是高斯所已经注意到的．那就是说，很自然地发生这样的问题：如果两种几何——欧几里得的和非欧几里得的——都是在逻辑上毫无毛病地被建立起来了，那末，又怎么说明在物质世界中应该只有一种是正确的呢(或者说得更确切些，怎么说明其中一种应该比另一种更好地反映了延伸性呢)？ 这个问题的提出，直接地就引向在本文开头谈过的作为物理学的几何学和作为数学的几何学的那种区别．

事实上，如果当作现实世界的延伸性的知识来选取几何学，则数学自然可以向几何学建议各种各样方案的选择(科学的进一步的发展对罗巴契夫斯基的非欧几里得几何学作了别的一些更进一步的推广)．如何在这些方案中作最好的选择，必须通过物理实验来解决，在这意义下几何学变成了物理学真正的一部分．然而，在只存在单独一个欧几里得几何时，那自然会认为它是自然界所绝对必须的了．如果这种看法不克服，则在物理学中的如像相对论的发现那样巨大的进步，就变成不可能的了．

其次，明白地，即使认为我们的直觉观念给我们的是完全确定的指示，它还是不能同时对应于彼此有实质区别的所有几何学．所以我们只好保留一条出路：在作为数学的几何学的领域内，有可能更完全地利用命题的逻辑关系，而且在其上面奠定展开几何系统的基础．这说明，我们要过渡到上面描述过的公理法的观点．让我们来指出，在历史上为了实现这个目的，在经历过的途径上曾有哪一些最重要的标志．