

数值法解摩擦学 技术问题

〔苏〕 B. B. 格利布 著

机械工业出版社

数值法解摩擦学技术问题

〔苏〕 B. B. 格利布 著

孟宪堂 宋 琦 译

吴永伟 校



机械工业出版社

全书共分八章，书中详细地研究了摩擦副的磨损及寿命预测问题的求解方法，包括网格法、有限元法，其基础是磨损过程的离散模型，依此模型编制出了计算机程序，例举了计算各类摩擦副磨损的实例，为应用数值法解磨损问题提供了基础知识。

本书可作为高等院校高年级学生、研究生和科技人员使用。

РЕШЕНИЕ
ТРИБОТЕХНИЧЕСКИХ
ЗАДАЧ
ЧИСЛЕННЫМИ
МЕТОДАМИ

В. В. ГРИБ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА 1982

* * *

数值法解摩擦学技术问题

〔苏〕 В. В. 格利布 著

孟宪堂 宋琦 译

吴永伟 校

*

责任编辑：郑 铉

封面设计：刘 代

*

机械工业出版社出版（北京阜成门外百万庄南里一号）

（北京市书刊出版业营业许可出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·新华书店经售

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ · 印张 $37 \frac{3}{8}$ · 字数 99 千字

1989年5月北京第一版·1989年5月北京第一次印刷

印数 0,001—1,530 · 定价：3.60 元

*

ISBN 7-111-00540-6/TH·86

77117.1
11

0335158

2264/07

译 序

本书共分八章，书中详细地研究了摩擦副的磨损及寿命预测问题的求解方法，包括网格法、有限元法，其基础是磨损过程的离散模型，依此模型编制出计算机程序。

列举了计算示例，为读者应用数值法解磨损问题提供了基础知识。

本书可作为高等院校高年级学生和研究生学习摩擦学课程时参考，也可供从事摩擦学研究的有关科技人员参考。

本书序言、第一、二、三章由孟宪堂译，第四、五、六、七章及附录由宋琦译，全书由吴永伟校。

序 言

提高机器的可靠性乃是确保社会经济效益，加速技术进步的重要途径之一。

在结构和机器的设计阶段为结构的可靠性奠定了基础。设计师在设计机器时，通常要对机械零件进行强度计算，其依据是认为：零件的断裂是机器报废（或事故）的主要原因。然而，最经常出现的机械事故并非是因为零件的强度不足所引起，而是由于摩擦副的磨损所致^[1]。摩擦副严重磨损，使机器的功能减退，效率降低，单件产品的能耗增加，机构的运动学关系遭到破坏，从而引起了难于事先计算的附加动载荷、振动噪声等问题。实际工作中并不是按极限磨损准则计算机器零部件的寿命，因为现有的磨损计算方法基本上只是少数研究者的成果。设计者在规定机器的预期寿命时，往往是凭借使用类似产品得来的经验。可是这种办法在研制新颖的（即无类似的）机器结构时是无能为力的。此时如把所研制的产品作为实验室试件，常常不符合所要求的可靠性指标，同时研磨试件要花费多余的时间和资金。由于缺少预测可靠性指标的计算方法，因而设计者就很难筛选出解决问题的最佳技术方案。于是设计出来的机器，或是选择了过大的强度（或可靠性）安全系数，致使结构的材料用量过大；或是它的可靠性差，这必然会增大运转过程中的维修费用。众所周知，用在修理事业上的巨额资金，目前的趋势不是减少，而是进一步增加。

鉴于上述情况，制定摩擦副磨损寿命的计算方法是极为重要的任务，该问题一经解决，就可提高机械设备的可靠性和抗磨性^[2]。

设计阶段能否确切地控制机器可靠性指标，与制定并完善其计算方法有着密切关系。

在制定用以预测摩擦副磨损寿命的计算方法时，其困难来自

两方面，即摩擦表面上有性质迥异的各种过程，以及各个过程又受多种因素（互相联系）的影响。同时后者（即自变量）本身不仅随时间而变，而且沿零件接触表面也在变化。摩擦时发生在接触表面上的复杂物理化学性质尚未充分得到研究，摩擦磨损过程具有概率性质（取决于粗糙表面的接触离散性，疲劳破坏的本性、外部作用参数、材料性质、共轭零件的原始几何学的随机性质），这些就是制定出有定论的计算方法的困难因素。

计算方法最终可分为解析法和数值法两大类。解析法是以公式的形式进行求解，就自变量的每一数值而言，可从公式求得相对应的函数值。当该函数定义的空间域内的某些点上，其自变量的值为已知时，就可用数值法求得函数的近似值。微分-积分法属于解析法，有限差分法（网格法）和变分-网格法（有限单元法）则属于数值法。前一种情况所得的结果是连续的，后一种则为离散的。

磨损过程，就其本质而言乃是一个扩展性的非稳态过程。因此用经典的解析法求解磨损过程的数学模型是行不通的。由于机械性质和热物理性质随温度而变，且摩擦性质还随温度，荷载以及速度变化，所以磨损过程的数学模型通常具有非线性。即使使用一维问题，所得到的解析解也具有冗长繁杂的形式，最终还得借助数值法求解。

利用数值法有可能解决摩擦副零件在磨损过程中形状不断变化这样的动态问题。它可以用来解具有二维和三维接触相互作用问题的非线性方程，同样能解有复杂边界条件的二维-三维热传导非线性方程，还能求解具有“不连续”接触的磨损问题。

随着高速电子计算机的出现，用数值法解决物理学问题和工程技术问题已经成为现实。

本书详细论述了各类摩擦副磨损寿命预测问题的数值计算方法，其中考虑到零件因磨损引起的形状变化；压力沿接触表面分布的不均匀性；摩擦过程中产生的热；零件的刚度等等。

作者在本书中没有说明数值法的逼近问题，收敛性问题，精

度问题以及稳定性问题，因为这些问题在专门文献中有详尽的论述。

上面的论述，为组织编写各类摩擦副磨损寿命计算和自动设计系统这套丛书创造了前提条件，同时还提出了材料磨损试验的实验室方法的标准化问题，其目的在于如何获取有关结构材料与润滑剂两者在各种不同组合下磨损规律的指导性资料(数据)，从而为制定上述摩擦副磨损寿命计算方法创造必需的条件。

本书提供了解该问题的一种方法。

目 录

第一章 摩擦副寿命及磨损计算方法的现状	1
1—1 基本定义	1
1—2 制定摩擦副寿命及磨损预测方法所用的理论-实验基础	2
1—3 摩擦副磨损计算方法	7
1—4 数值法解摩擦学技术问题的可能性	10
第二章 求解摩擦副磨损的数值计算方法	13
2—1 迭代循环的设计	13
2—2 磨损引起零件形状变化的动态研究	19
2—3 摩擦副的优化设计	22
2—4 确定寿命与磨损分布规律的计算方法	22
第三章 按接触表面比压分布状况求解摩擦副的磨损问题	25
3—1 刚性配偶零件的磨损	25
3—2 弹性变形配偶零件的磨损	30
3—3 有限元法在配偶零件磨损问题中的应用	43
第四章 磨损问题和摩擦热动力学问题的联合求解	50
4—1 网格法	52
4—2 有限元法	57
第五章 高运动副寿命及磨损的计算方法	62
5—1 建立算法方案	62
5—2 渐开线齿形啮合的磨损问题	64
5—3 凸轮机构的磨损问题	73
第六章 滚动支承的磨损计算	79
第七章 确定材料耐磨性的实验室试验方法	81
第八章 求解工程问题的示例	91
附录	97
附录1 计算《轴—轴套》寿命及磨损的RESUR程序	97
附录2 计算渐开线齿轮传动的磨损及寿命的EVOLV程序	98
参考文献	111

第一章 摩擦副寿命及磨损 计算方法的现状

1-1 基本定义

磨损可理解为物体在摩擦时尺寸发生变化的过程，表现形式是材料从摩擦表面脱落下来和（或）残余变形。

磨损过程可定量表达如下：

磨损速度 $\gamma = h / t$ ，其中 h ——磨损量； t ——磨损时间；

磨损率 $J = h / l$ ，其中 l ——摩擦行程。

耐磨性乃是指材料在一定摩擦条件下显示抗磨损能力的性质，且用磨损速度或磨损率的倒数这个量来评价。

接触材料的耐磨性取决于材料表层的物理-机械性质（硬度、弹性模量、屈服极限、疲劳特性等）和化学性质（与外界介质相互作用的性状由之决定），还取决于摩擦表面的微观形貌。摩擦磨损过程是在配偶表面微凸体的接触面积上进行的，所以材料磨损又受接触区的应力状态和温度以及零件相对移动速度所制约。在边界摩擦条件下，速度对磨损过程的影响，主要是通过摩擦温度而很少是通过接触的流变性起作用。

影响摩擦副（零件配偶）磨损的因素有下列几类：材料的耐磨性；摩擦副的工况（载荷、温度、速度、摩擦状态）；外部介质（环境介质的组成情况、润滑剂、磨料是否存在以及其它）；摩擦副的结构（配偶表面的几何形状；润滑材料如何送往接触区；散热系统、密封是否存在等等）；使用操作条件（是否遵守技术保养和修理的规则与标准，机械操作人员的技术熟练程度以及其它条件）。

机器与机构的工作能力与摩擦副的状态有关。摩擦副的状态

用一组指标表征,而接触零件的形状(宏观几何学)属于主要指标之列。

摩擦副的极限状态由零件的形状变化所规定,即在此形状变化下,机构由于不能实现其预定的功能而被迫停止继续操作。机构不能实现预定功能的原因可归纳如下:零件因磨损而导致强度不足;机构工作所要求的运动精度遭到破坏;动载荷超过预定水平;机构噪声和振动超过许用值;生产率(效率)降低;操纵机构的力增大以及导致机构功能丧失的其它原因。

极限状态还可用经济指标即修复机器时所规定的消耗量来限定。按照实验和机器的使用情况,应对摩擦副的极限状态制订出机器操作和技术保养的技术定额文件。

因此,磨损问题乃是一个涉及内容广泛的综合性课题,预测摩擦副磨损与寿命的正确提法和准确性将取决于这一问题的解决。

1—2 制定摩擦副寿命及磨损预测方法 所用的理论-实验基础

摩擦磨损科学领域内理论与实验研究发展是以工业的要求(即发展新技术,并保证其优质且可靠地工作)为前提条件的。文献[3~9]已对这些研究工作的主要方面做了详细的叙述。

一、接触几何学模型 众所周知,摩擦磨损过程是在零件的真实接触面积上发生、发展的,这是由于零件表面具有复杂的表面形貌之故。文献[10~12]已经指明,摩擦副表面可以简化成一组名为波纹度的圆柱表面模型,波纹度的高度为0.05到40 μm ,波长为1到5 mm,其具体数值由加工方法及表面粗糙度等级而定。同样,表面波纹上还具有粗糙度,根据ГОСТ2789-73,它可用粗糙度等级来评定,其微观不平度的高度为0.025~1600 μm ,长度为0.0002~2.5 mm。

表面波纹度的存在,在一定条件下是形成轮廓接触面积(与表观接触面积即名义接触面积不同)的原因,而粗糙度的存在同

样是形成固体表面真实接触面积的原因。

真实接触面积取决于微凸体高度方向的形状和分布规律、材料的弹—塑性性质以及载荷状况，它可根据支承表面曲线方程 $\eta = b\varepsilon^\nu$ 计算出来，式中 $\eta = A_r/A_c$ 为真实接触面 A_r 与轮廓面积 A_c 的比值； $\varepsilon = h_c/h_{\max}$ 为微观不平度的压陷深度 h_c 与其全高 $h_{\max}$ 的比值； b ， ν 分别表示表面支承曲线的系数和幂指数，由实验方法确定。

用解析法确定出接触的微观几何学参数及零件真实接触面积乃是将摩擦磨损过程由离散特性转变为连续计算模型的基础。这种转变之所以必要，是因为制定有定论的磨损过程模型有困难，而后者是由粗糙表面作相对移动时相互作用的随机性质所引起的。

二、材料磨损过程的模型 奠定摩擦磨损预报计算法的另一重要研究方面，是建立材料磨损与其物理—化学性质、机械性质以及表层结构间的内在规律性，而其中这些性质和结构又随摩擦状态和时间而变化。

目前尽管在确定磨损规律方面作了大量的实验工作，但对材料表面在摩擦过程中的破坏机制还研究得十分不够。

磨料磨损理论能对磨损过程作最通俗的阐明，按照该理论，材料从表面脱落下来，是由于磨料颗粒锋刃或硬材料一方的微凸体切削作用的结果^[13]。金属相对砂纸作无润滑摩擦时，其磨损规律由下式计算：

$$J = \frac{Kp}{HB} \quad (1.1)$$

式中 p ——接触压力； HB ——硬度； K ——比例系数，它与磨料的形状、材料与磨料的硬度比等有关。

这种计算模型遭到非议，因为它没有说明介质的作用、配对物中高硬度一方磨损的作用。还因为在许多情况下磨损率与压强之间不存在正比关系，磨损率与硬度之间也不存在反比关系。

类似公式 (1.1) 的算式曾在文献[14, 15]中作了推荐，书中用接触表面间存在粘着力来解释磨损过程的物理本质。

按照摩擦接点形式,对接触表面微观不平度的相互作用进行分类,并提出固体疲劳磨损理论,就能阐明很多磨损规律〔6〕。按照该理论,磨损过程可看成是由于接触表面微观不平度(微凸体)的多次变形造成表面分散作用,进而硬化,最后导致破坏〔10〕。周围介质的物理吸附及化学吸附作用加剧了这种破坏过程,使塑性变形(位错积累)易于发生,进而导致表层材料的脆性破坏。表层在破坏萌发期间可能发生各种不同的物理-化学过程,这种情况与疲劳磨损本质的概念不但不矛盾,反而能证实它们,因为,按通常的理解,疲劳时材料中亦会发生类似的变化。

疲劳理论的基本方程是在下述基础上建立起来的:首先提出材料表层因对方表面微凸体使之多次重复变形而引起破坏的模型,然后将该模型推广到整个微凸体上,而后者在表面上的分布服从于支承表面曲线方程。现将疲劳磨损的基本方程推导如下〔17〕:

$$J = h / l = \Delta V / (A_c l) = i_s A_r / A_c \quad (1.2)$$

式中 h ——磨损层厚度; l ——摩擦行程; A_r 、 A_c ——分别为真实接触面积和轮廓接触面积; $i_s = \Delta v / (d A_r)$ ——比磨损率,即当行程为 d 时材料磨损量 Δv 与真实接触面积之比, d 为接触斑点直径。

材料变形体积 V 与对方被压陷的轮廓相等即

$$V = \int_0^{h_c} A_r dh = \int_0^{h_c} A_c b \left(\frac{h}{h_{max}} \right)^{\nu} dh = A_r \frac{h_c}{\nu + 1}$$

式中符号 h_c 为最大不平度压陷深度。

现在用符号 n 表示引起单个摩擦接点体积破坏的作用循环次数,可以获得 $\Delta v = V / n$ 以及相应的比磨损率 $i_s = h_c / [(\nu + 1) \times dn]$ 。

材料破坏时的循环次数,取决于摩擦接点的破坏形式。

在微切削条件下,通过一次作用,材料便由表面上脱落下来,因此磨损率方程则具有公式(1.1)的形式。

弹性接触时的磨损率公式为〔17〕

$$J = C_1 \left(\frac{K_1 f}{C_2 \sigma_0} \right)^t \left(\frac{E}{1 - \mu^2} \right)^{t - \beta t - 1} p^{\beta t + 1} \quad (1.3)$$

塑性接触时的磨损率公式为〔18〕

$$J = C_3 \left(C_4 \frac{1 + kf}{1 - kf} \right)^t \left(\frac{1}{HB} \right)^{1 + (t+1)(2\nu)} \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \right)^t p^{1 + (t+1)(2\nu)} \quad (1.4)$$

式中 C_1 至 C_4 ——表面形貌的参数； $\beta = 1/(2\nu + 1)$ ； ν ——表面支承曲线的幂指数； E ——弹性模量； HB ——硬度； μ ——泊桑比； σ_0 ——屈服极限； ε_0 ——断裂伸长率； t ——反映材料疲劳性质的系数； f ——摩擦系数； K ——摩擦系数与接触点处实际应力间的比例系数。

利用方程式 (1.1)、(1.3)、(1.4) 就可将分散在各实际接触斑点上的磨损过程转换成轮廓接触表面的连续变化过程。

疲劳磨损的理论方程已在金属磨损〔18、19〕、聚合材料磨损〔20〕、工业橡胶制品磨损〔21、22〕、自润滑材料磨损〔23〕这些事例上得到了验证。

文献〔20〕应用热波动破坏理论〔24〕的基本原理，提出了聚合材料疲劳磨损率的计算方程：

$$J = J_0 \exp \left(1 - \frac{U_0 - \gamma f p}{R\theta} \right)$$

式中 U_0 ——活化能； γ ——表示材料结构的常数； f ——摩擦系数； p ——比压； $R\theta$ ——热运动能。

把疲劳磨损规律和热活化破坏原理综合加以考察，就能从固体破坏的统一立场出发处理有关的磨损问题〔25〕。

摩擦表面上所发生的过程的多样性，是从不同观点提出各种磨损模型的前提。文献〔26〕提出了“必须累积一定的内能储备”才能使磨粒脱落的见解。文献〔27〕认为摩擦表面中产生的派生组织及其脆性破坏起了主要作用，文中强调了，正常磨损时，派生组织的形成与破坏必须达到平衡。文献〔28、30〕的作者们认为表面氧化是磨损的主要原因。另外一些文献〔31、32〕则坚持疲劳磨

损的观点。

对材料薄表层的物理-机械性质进行全面研究，能大大促进磨损规律的确立〔8, 35, 39〕。

虽然我们未对磨损机制的全部观点及见解进行分析，然而应该指出，无论材料表层在摩擦时的性状具有怎样的总体特征，磨损始终是有其固有规律的破坏过程。

三、材料摩擦副磨损的实验研究 在磨损理论发展的同时，机器摩擦磨损的实验研究也得到了发展。在机械制造实践中，人们使用着理想化了的摩擦磨损实验系统。

首先在试验机上进行材料的磨损实验，以评定材料的耐磨性。实验目的是：选出结构材料及润滑材料的最佳组合；确定材料耐磨性与材料最简单的物理-机械性能之间的关系，以便于有目的地研制具有预定性能的材料；确定材料磨损与工况参数（温度、比压等）之间的内在关系。

第二阶段（最终阶段）对机器本身进行操作试验，其目的是确定机器的可靠性指标以及各种不同组件和装置的相互影响。

实验研究对工业来说有着重大的意义。

同时还应指出，由于许多磨损试验机的结构各不相同，而且又没有统一的实验方法，因而得出有关结构材料摩擦磨损的实验结果多数不相一致，这就增加了解决实验室试验问题的困难。通常第二、第三阶段的劳动资金，时间的消耗是很大的，这与建立实验基础及进行试验有关。这种情况导致新技术应用周期的加长。最后阶段表现出的缺点涉及到机器结构要作重大改造。

四、确定接触表面工况参数的解析方法 现代机器和设备中的摩擦副大都在范围很宽的温度及负载下工作，在此范围内材料表现出多种不同的摩擦特性。

零件接触区域中材料的应力状态取决于材料的物理性质、零件的轮廓形状以及外载荷，而这些参数在机器运转过程中并不是一个恒定的常数。为了解决零件接触正应力状态的计算问题，广泛应用了弹性理论、蠕变理论〔51~59〕的数学方法，以及在理论

中所用的条件和假设。假定在所研究的区域内连续接触，这就可以把固体力学的方法应用于摩擦副中去。文献[60, 61]在建立粘着变形摩擦理论时，就在单个真实接触斑点区域内应用了连续性的假设。在接触强度、胶合、磨损和弹性流体动压润滑理论等问题中，连续性的假设扩展到了零件的轮廓接触面积[62]。同样，鉴于零件在摩擦副中相互接触作用这类特殊性，故又提出了计入表面磨损的弹塑性理论问题[63~69, 70]。

至于机械零件内温度场的分布以及摩擦表面的平均温度，如边界条件已知，则可以通过求解配偶零件在接触表面上具有热源的热传导问题而获得。

求解热传导问题的经典方法，在制动器、摩擦离合器、嵌入式离合器及滑动轴承等的计算中业已获得应用[69~78]。文献[79~85]研究了如何计算实际接触斑点处产生的温度。

1—3 摩擦副磨损计算方法

一、目前已知的各种方法 零件接合面的磨损（简称接点磨损）可以看作是反映机器使用性能下降的几何学特征，文献[86]曾引用了这一概念。接点磨损用零件间相互位置的变化来表征。文中建议接点按零件在磨损过程中可能接近的性质以及受磨表面的形状加以分类。文献[66~88]推荐的计算方法，其实质就是：在磨损表面连续接触、零件为刚性且已知各接触点的磨损矢量方向的条件下，确定出摩擦表面的压力分布图。零件因磨损而引起的接近量，就是根据已知的材料磨损规律以及压力分布图而进行计算的。

材料的磨损规律可以在试验机上通过实验加以确定，抑或用解析法例如用疲劳磨损理论的基本方程求得[90, 19]。这样就制订出了橡胶工业制品[17, 21, 22]、凸轮机构[91]、滚动轴承[92]的磨损计算方法。在其后计算摩擦副的磨损与寿命时，文献[6, 69, 93~97]又详细讨论了试验机上得到的材料磨损试验结果如何应用的问题。基于材料耐磨性指标方面的实验室数据而形成

8

的预测摩擦副磨损及寿命的解析方法，可以大大缩短新技术的开发和应用于生产的时间。

文献[98~101]提出了轴-套接点的磨损计算方法，其中考虑了有关参数在磨损过程中沿接触表面的变化。文献根据材料在滚子摩擦试验机上的实验结果，制订了齿轮磨损计算方法。而文献[69, 73, 103, 141]应用了材料耐热性实验结果，制订了制动器和摩擦离合器的磨损计算方法。

在美国，国际商业机器公司（IBM）制订了机器零件设计时的磨损预测方法[105]。文中根据不超过“零”磨损的最大切向应力与零件接合面相互作用次数间的经验关系，得到了有关材料耐磨性的初步资料。

文献[106]详细分析了机器零件的磨损计算方法。现将其中共同性假设归纳如下：

1. 认为轮廓表面呈连续接触，这就可以在计算中应用弹塑性力学和热传导等经典理论的基本原理。
2. 计算时不考虑零件在磨损过程中发生的形状变化。
3. 认为参与摩擦的材料体积性质是各向同性的，且在摩擦过程中保持不变。
4. 把磨损视为肯定的过程，即可以用磨损率与各因素间的确定函数关系来表征。

文献[107]中注意到了摩擦副磨损计算方法的统计学性质，文中明确提出了计及零件形状在磨损过程中不断变化的接触问题。

二、评定磨损过程的概率方法 首先影响磨损过程发展速度的，是在机器运转过程中变化幅度很大的摩擦副工况参数。其次，磨损速度还取决于材料的物理-机械性质和摩擦表面的微观几何性质，而后两者还在标准和技术条件所规定的范围内摆动。再次，磨损也与配偶零件在装配时按公差配合制度所规定的宏观几何性质有关。最后，磨损速度还受到机器内各摩擦副的相互影响，也与使用条件、机器操作人员技术熟练程度等等有关。上述

几类影响因素在使用中又可能有各种不同的组合。因此，摩擦副的磨损速度与寿命乃是一个随机量。

实际上在机器运转过程中，即使是同一台机器中的同一种零件，其磨损和寿命的数值也具有很大的离散性。上述这些原因就是人们对现有的各种摩擦副磨损与寿命计算方法不抱乐观态度的原因所在[108, 109]。

基于以统计学实验数据评价磨损与寿命的概率观点，从所获信息的可靠性来看，具有一定的优越性。然而，实验设备的研制、进行实验以及分析所得结果，都要花费大量的劳力和资金。更主要的问题还在于，这种方法在设计新结构时不便采用。正如许多学者[110]所指出的那样，这种评定磨损指标的方法在预测新型机器结构的磨损与寿命时难于解决磨损过程的控制问题。

摩擦副磨损与寿命具有概率性质，并不意味着磨损与各因素间不存在因果关系，目前发展起来的磨损理论以及大量的实验研究，将有助于确立这种关系。

计算数学（计算概率与统计学）领域内新方向的发展[111]，就可在不久的将来创造出摩擦副磨损的计算统计学模型。

确定摩擦副磨损与寿命的现有计算方法与实验统计学方法，两者的对立情况将逐渐丧失其基础。一方面，随着我们对磨损规律认识的深化以及数学方法的完善，计算方面也将不断地完善起来，另一方面，实验统计学数据还可以修正这些模型。

三、基于相似理论和量纲分析的模型实验方法 文献[69, 112, 113]在解决摩擦学技术问题时就应用了相似理论和量纲分析。应该指出，这种方法用来研究具有同一物理性质的实物和现象，是完全正确的。

如果所讨论的过程，能用微分方程、积分方程或积分-微分方程来描述，且边界条件为已知的话，那么就要严格限制相似判据的选择和判据方程的构成。当不存在这种方程时，若假定过程发展（客体性状）所依据的参数和变数是事先知道的，且参变数间呈幂函数关系，就可采用量纲分析法。于是模型实验法应该基