现代数学基础丛书

仿微分算子引论

陈恕行 仇庆久 李成章 编

科学出版社

现代数学基础丛书

仿微分算子引论

陈恕行　仇庆久　李成章　编

科　学　出　版　社

1 9 9 0

内 容 简 介

仿微分算子是近十年中发展起来的数学理论，目前已因其在非线性偏微分方程中所取得的出色成果而引人注目. 本书从 Littlewood-Paley 分解开始，系统地阐述了仿微分算子的基本理论，其中包括仿积、仿微分、仿线性化以及仿复合等，同时，本书还介绍了该理论在研究非线性方程解的正则性与奇性传播等问题中的应用. 本书叙述详细、清楚，便于初学者阅读.

读者对象为大学数学系学生、研究生、教师和有关的科学工作者.

现代数学基础丛书

仿微分算子引论

陈恕行 仇庆久 李成章 编

责任编辑 吕 虹

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1990年 2 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1990年 2 月第一次印刷 印张：6 3/4

印数：0001—1 450 字数：173 000

ISBN 7-03-001501-0/O · 307

定价：7.50 元

序　　言

50 年代以来，偏微分方程理论的研究有了很大的发展，其中最突出的成就则是拟微分算子与 Fourier 积分算子理论的建立和发展. 由于这一理论的出现，线性问题中许多经典的问题，如可解性、唯一性与亚椭圆性等问题得到了更为深刻的阐述与统一的处理. 同时，随着这一理论的出现，也提出了诸如奇性传播等许多新的研究课题. 今天的线性偏微分方程理论与 30 年前的经典理论相比较，则是进展巨大、面目全新. 这表明线性微分算子理论已发展到了一个新的阶段.

在这三十多年中，非线性偏微分方程的理论也得到了很大的发展，但是，迄今尚没有较为统一地处理各种非线性问题的理论与方法. 近些年来，科学技术的飞速发展以及线性偏微分方程理论的不断完善，更促使人们把注意力转到非线性问题上来. 同时，人们发现现代微分算子理论在解决各种线性问题时发挥了巨大的威力，并为人们解决非线性问题提供了良好的借鉴及启示，正是这种情况促成了仿微分算子理论的产生.

70 年代末，J. M. Bony 提出了仿微分算子理论，他的目的就是试图用现代微分算子理论来研究非线性偏微分方程. 他从研究光滑性（奇性分析）着手，分析了非线性问题的实质，认识到本质的障碍在于乘积算子中那个乘子的光滑性，于是他用了一种完全不同于通常线性化的方法去处理乘积算子. 具体地说，他对函数进行 Littlewood-Paley 分解，将最简单的非线性函数——两个函数的乘积——写成两项分别关于不同因子的线性函数（称为仿积）之和，而误差与前两者相比，其光滑性更高. 以此为基础，逐步地建立对一般的非线性函数与非线性偏微分方程的线性化方法——

仿线性化．十分有意义的是：在此过程中引入的仿微分算子恰是一类具特定象征类的拟微分算子．由于在仿线性化过程中总是将奇性较高的项保留下来，所以，上述理论在讨论非线性方程解的奇性分析问题中特别有效．

J. M. Bony 接着用这一工具得到了一般完全非线性方程的椭圆正则性定理及解的奇性传播定理．其后，S. Alinhac 又引入了仿复合的概念．他发展了 J. M. Bony 的技巧，处理了两个非 C^∞ 函数的复合，即在非 C^∞ 坐标变换下的仿线性化，并将此应用于讨论非线性方程解的弱奇性(或称高正则性)的传播．

以上所提及的仿积、仿微分、仿线性化、仿复合等构成了仿微分算子理论的最基本部分．该理论的深刻思想及其在偏微分方程解的奇性分析中的出色应用，引起了许多人的重视．从调和分析的角度看，这个理论将线性问题中的 Fourier 方法推广到了非线性问题，从而将 Fourier 分析发展到了一个新的阶段． 本书试图对这一理论的基本点及其应用作一个较详细的介绍．

仿微分算子理论仍在不断发展之中，目前有关的研究大体可分为两类．一类是对理论的进一步探讨，例如，研究带边区域的仿微分算子、仿微分算子与 Fourier 积分算子的复合以及更精确的仿微分运算等．另一类是扩大应用的范围，如现在已有的关于奇性干扰、守恒律方程组激波解光滑性、退缩椭圆型方程解的光滑性以及各种存在性问题的讨论等等．本书作为一本入门书，不打算逐一介绍这些不断涌现的新工作，但我们希望它对于读者在学习有关成果、掌握最新动态并从事有关研究工作等方面能起到一定的促进作用．

本书共分六章：第一章简述 Littlewood-Paley 环形分解理论．第二章介绍拟微分算子的基本理论，特别是与仿微分算子理论关系密切的部分，已熟悉这方面内容的读者可跳过它而直接阅读第三章．从第三章到第五章分别阐述仿积、仿微分、仿线性化及仿复合的概念、性质及运算． 第六章介绍仿微分算子理论在非线性方程解的奇性分析中的初步应用．附录介绍了球面上的 Laplace

算子的谱的有关知识，以便于读者查阅.

南开大学数学所1985到1986偏微分方程年的学术活动，促进与支持了作者编写这本书. 借此机会我们对倡导与主持这一学术活动的陈省身先生表示衷心的感谢. 作者还特别感谢偏微分方程年组织委员会主任王柔怀先生，他对于本书的编写曾给予很大的鼓励与关心. 此外，在本书的编写与定稿过程中我们还得到过许多同志的关心与帮助，在此一并表示深切的谢意.

由于编者水平所限，在书中难免有许多错误和不妥之处，我们殷切希望读者给予批评与指正.

目　录

第一章 环形分解

在 [CM1] 中 R. Coifman 和 Y. Meyer 运用调和分析工具成功地研究了具非正则象征的拟微分算子的有界性问题. 其中一个重要的方法就是将所研究的空间进行 Littlewood-Paley 环形分解. 这种分解在研究具非光滑系数的算子的正则性问题时往往是较为有效的. J. M. Bony 在引入仿积及仿微分算子等概念并用它们研究非线性问题时也应用了这种分解. 因而在本章中我们将首先引入环形分解，并给出今后将经常需要的某些重要的函数类在环形分解下的特征性质以及有关结论.

§1. H^s 函数类的环形分解

记 $\boldsymbol{B}(0,1)\subset\mathbb{R}^n$ 为以原点为心的单位球. 取常数 $\kappa>1$，作二进环体

$$\boldsymbol{C}_j=\{\xi\in\mathbb{R}^n;\ \kappa^{-1}2^j\leqslant|\xi|\leqslant\kappa 2^{j+1}\},\ j\in\mathbb{N},\tag{1.1}$$

其中 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$，$|\xi|=\left(\sum\limits_{j=1}^n\xi_j^2\right)^{1/2}$ 且 $\mathbb{N}$ 表示所有非负整数的集合. 显然，$\boldsymbol{B}(0,1)$ 与 (1.1) 所定义的二进环体序列 $\{\boldsymbol{C}_j\}_{j=0}^\infty$ 一起覆盖了整个 $\mathbb{R}^n$；并且对于其中任一环体 $\boldsymbol{C}_j$，只有有限个环体与之相交，而这些与之相交的环体的个数不超过某个与 j 无关的常数 N_0.

另外，在环体 $\boldsymbol{C}_j$ 内，$|\xi|\sim 2^j$.

对应于上述覆盖，有如下单位分解.

定理 1.1 存在函数 $\psi(\xi)$，$\varphi(\xi)\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，$0\leqslant\psi,\varphi\leqslant 1$，使得

(1) $\mathrm{supp}\psi\subset\boldsymbol{B}(0,1)$，$\mathrm{supp}\varphi\subset\boldsymbol{C}_0$；

(2) $\phi(\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi(2^{-j}\xi)=1,\ \forall\xi\in\mathbf{R}^n;$ (1.2)

(3) 对任意的 $l\in\mathbf{N}$，有

$$\phi(\xi)+\sum_{j=0}^{l-1}\varphi(2^{-j}\xi)=\phi(2^{-l}\xi),\ \forall\xi\in\mathbf{R}^n.$$

证明 取 $\phi(\xi)\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，使 $\operatorname{supp}\phi\subset \boldsymbol{B}(0,1)$，且在 $|\xi|\leqslant\kappa^{-1}$ 上有 $\phi(\xi)=1$. 例如可取 $\phi(\xi)=g(|\xi|)$，此处 $g(t)\in C_c^\infty(\mathbf{R})$，$0\leqslant g(t)\leqslant 1$ 且当 $t\leqslant\kappa^{-1}$ 时，$g(t)=1$；当 $t\geqslant 1$ 时，$g(t)=0$. 于是，显然有

$$\sum_{j=0}^{\infty}\{\phi(2^{-(j+1)}\xi)-\phi(2^{-j}\xi)\}+\phi(\xi)=1.$$

这样，只须取 $\varphi(\xi)=\phi(2^{-1}\xi)-\phi(\xi)$，便知定理的结论 (1) 及 (2)成立.

又在结论(2)中用 $2^{-l}\xi$ 代替 ξ，有

$$1=\phi(2^{-l}\xi)+\sum_{j=0}^{\infty}\varphi(2^{-j-l}\xi)=\phi(2^{-l}\xi)+\sum_{j=l}^{\infty}\varphi(2^{-j}\xi),$$

所以

$$\phi(2^{-l}\xi)=1-\sum_{j=l}^{\infty}\varphi(2^{-j}\xi)=1-\left\{1-\phi(\xi)-\sum_{j=0}^{l-1}\varphi(2^{-j}\xi)\right\}$$
$$=\sum_{j=0}^{l-1}\varphi(2^{-j}\xi)+\phi(\xi).$$

这就是结论(3). 证毕.

显然上述单位分解不是唯一的.

利用这个单位分解，可以定义一个分布的环形分解如下

定义 1.1 设 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$. 称下述分解为 u 的*环形分解*(或 *Littlewood-Paley 分解*，或 *L-P 分解*)：

$$u=\sum_{j=-1}^{\infty}u_j(x),\tag{1.3}$$

其中 $u_j(x)$ 由

$$\hat{u}_{-1}(\xi) = \phi(\xi)\hat{u}(\xi),$$
$$\hat{u}_j(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi)\hat{u}(\xi),\ j = 0, 1, \cdots$$
确定,此处 $\hat{u}(\xi)$ 表示分布 u 的 Fourier 变换.

显然,$\sum \hat{u}_j(\xi)$ 在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 空间中收敛,而 Fourier 变换是 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 到 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 的同构映照,故(1.3)右端在 $\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$ 中收敛. 以后,我们对于级数的收敛性不再加以说明.

按此定义,缓增分布 u 经(1.3)分解后, 每项的谱(其 Fourier 变换的支集)都是紧集,因此每项均为整函数, 并且由于这个紧集就含在相应的二进环体之内, 故(1.3)实质上表示将分布 u 的谱按 $|\xi|$ 的二进增长阶数分解. 注意到 u 的正则性与它的谱及 $|\xi|$ 的增长情况有密切的联系, 因而能用这种分解去研究及描述分布 u 的正则性.

下面我们就来讨论当 u 属于若干重要函数类时, 它的环形分解的基本性质. 以下除非特别说明, u_{-1}, u_j 等均表示 u 在环形分解(1.3)中的相应项. 为记号简便起见,常以 $\boldsymbol{C}_{-1}$ 记 $\boldsymbol{B}(0,1)$.

本节首先讨论 Sobolev 空间 H^s 中函数的环形分解.

定义 1.2 设 $s \in \mathbf{R}, u(x) \in \mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$, 若 $\langle\xi\rangle^s\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbf{R}^n)$[1], 则称 $u(x) \in H^s(\mathbf{R}^n)$, 且它有模

$$\|u\|_s = \left\{\int \langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi\right\}^{1/2}. \tag{1.4}$$

当 $s = 0$ 时 $H^0 = L^2$, 它的模用 $\|\cdot\|_0$ 表示.

显然,如果把(1.4)看作是由内积

$$(u, v)_s = \int \langle\xi\rangle^{2s}\hat{u}(\xi)\overline{\hat{v}(\xi)}d\xi$$

诱导的,则可看出 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 是一个 Hilbert 空间.

定理 1.2 若 $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$, $s \in \mathbf{R}$, 它有环形分解(1.3),则存在正常数 c_j 及 C,使得

$$\|u_j\|_0 \leqslant c_j 2^{-js},\ j = -1, 0, 1, \cdots \tag{1.5}$$

且

---

1) 本书中用 $\langle\xi\rangle$ 表示 $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$, 用 $d\xi$ 表示 $(2\pi)^{-n}d\xi$.

$$\left(\sum_{j=-1}^{\infty} c_j^2\right)^{1/2} \leqslant C\|u\|_s. \tag{1.6}$$

证明 先设 $i \geqslant 0$，

$$2^{2js}\|u_j\|_0^2 = 2^{2js}\int |\varphi(2^{-j}\xi)|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

$$= \int [2^{2js}\langle\xi\rangle^{-2s}] \cdot [\varphi(2^{-j}\xi)]^2\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

注意到上述积分在 C_j 上进行，故存在仅与 s，κ 有关的常数 d，d'，使得

$$d \leqslant 2^{2js}\langle\xi\rangle^{-2s} \leqslant d'.$$

另一方面，显然 $[\varphi(2^{-j}\xi)]^2 \leqslant \varphi(2^{-j}\xi)$，所以

$$2^{2js}\|u_j\|_0^2 \leqslant d' \cdot \int \varphi(2^{-j}\xi)\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

上式右边的积分是一个依赖于 j 的常数. 记

$$c_j^2 = d' \cdot \int \varphi(2^{-j}\xi)\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \tag{1.7}$$

由 $\phi(\xi)$ 的性质知上述讨论对 $j=-1$ 也成立，即

$$2^{-2s}\|u_{-1}\|_0^2 \leqslant d' \cdot \int \phi(\xi)\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \text{（记为 } c_{-1}^2\text{）},$$

与(1.7)相结合即得

$$\sum_{j=-1}^{\infty} c_j^2 = d' \cdot \int\left[\sum_{j=0}^{\infty} \varphi(2^{-j}\xi) + \phi(\xi)\right]\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi \leqslant C^2\|u\|_s^2.$$

证毕.

注 条件(1.5)，(1.6)也可以联合写成

$$\sum_{j=-1}^{\infty} 4^{js}\|u_j\|_0^2 < \infty. \tag{1.8}$$

上述定理之逆也是成立的，即我们还可证明下面更为一般的结论.

定理 1.3 设 $s \in \mathbf{R}$，若 $L^2(\mathbf{R}^n)$ 中的函数列 $\{u_j;\ j=-1, 0, 1, \cdots\}$ 具有如下性质：

(1) $\operatorname{supp}\hat{u}_j \subset C_j$，$j=-1, 0, 1, \cdots$；

(2) $\|u_j\|_0 \leqslant c_j \cdot 2^{-js}$，且 $\sum\limits_{j=-1} c_j^2 \leqslant M^2$， (1.9)

则 $u=\sum_{j=-1}^{\infty} u_j \in H^s(\mathbf{R}^n)$，且存在与 u，M 无关的常数 C，使得

$$\|u\|_s \leqslant CM. \tag{1.10}$$

证明 由 C_j 的定义知，存在与 j，k 无关的正整数 N，使得当 $|j-k|>N$ 时，$C_j \cap C_k=\varnothing$. 这就是说，在二进环体序列 $\{C_j\}$ 中每个二进环体 C_j 至多与另外 $2N$ 个二进环体相交，而 N 与 j 无关，于是

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n}\langle\xi\rangle^{2s}\left|\sum_{j=-1}^{\infty}\hat{u}_j(\xi)\right|^2 d\xi &\leqslant \sum_{l=-1}^{\infty}\int_{C_l}\langle\xi\rangle^{2s}\left|\sum_{j=-1}^{\infty}\hat{u}_j(\xi)\right|^2 d\xi \\
&=\sum_{l=-1}^{\infty}\int_{C_l}\langle\xi\rangle^{2s}\left|\sum_{j=l-N}^{l+N}\hat{u}_j(\xi)\right|^2 d\xi \\
&\leqslant C_N\sum_{l=-1}^{\infty}\left[\sum_{j=l-N}^{l+N}\int_{C_j}\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}_j(\xi)|^2 d\xi\right] \\
&\leqslant C_N(N+1)\sum_{l=-1}^{\infty}\int_{C_l}\langle\xi\rangle^{2s}|\hat{u}_l(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned}$$

又由定理 1.2 中的证明，在 C_l 上，$\langle\xi\rangle^{2s}\leqslant d^{-1}2^{2ls}$. 故由上式得

$$\begin{aligned}
(2\pi)^n\|u\|_s^2 &\leqslant N\cdot d^{-1}\cdot C_N\sum_{l=-1}^{\infty}\int_{C_l}|\hat{u}_l(\xi)|^2 d\xi\cdot 2^{2ls} \\
&\leqslant N\cdot d^{-1}\cdot C_N\sum_{l=-1}^{\infty}2^{2ls}\|u_l\|_0^2\leqslant N\cdot d^{-1}\cdot C_N\cdot M^2.
\end{aligned}$$

取 $C=((2\pi)^{-n}\cdot N\cdot d^{-1}\cdot C_N)^{1/2}$ 即得(1.10)式. 证毕.

注 对于 $u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，定理 1.2 和定理 1.3 表明 $u\in H^s(\mathbf{R}^n)$，$s\in\mathbf{R}$ 的充要条件是它的环形分解 $\sum_{j=-1}^{\infty}u_j$ 满足(1.9). 此时再由(1.6)及(1.10)知，$u(x)$ 在 $H^s(\mathbf{R}^n)$ 中的模等价于

$$\left\{\sum_{j=-1}^{\infty}2^{2js}\|u_j\|_0^2\right\}^{1/2}. \tag{1.11}$$

对于最常见的 $s>0$ 的情形，我们还可建立如下的更进一步的命题.

定理 1.4 设 $s>0$，$u\in\mathscr{S}'(\mathbf{R}^n)$，则下述论断是等价的:

(1) $u \in H^s(\mathbf{R}^n)$;

(2) u 可分解为 $u = \sum_{j=-1}^{\infty} u_j$，其中 u_j 满足

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}\hat{u}_j \subset B(0, \kappa 2^j),\ \kappa > 1, \\ &\|u_j\|_0 \leqslant c_j \cdot 2^{-js} \text{ 且 } \sum_{j=-1}^{\infty} c_j^2 < \infty; \end{aligned} \tag{1.12}$$

(3) 存在自然数 $m > s$，使得 u 可分解为 $u = \sum_{j=-1}^{\infty} u_j$，$u_j \in C^m$，且对 $|\lambda| \leqslant m$ 有

$$\|D^\lambda u_j\|_0 \leqslant c_{j\lambda} \cdot 2^{-js+j|\lambda|}, \quad \sum_{j=-1}^{\infty} c_{j\lambda}^2 < \infty. \tag{1.13}$$

证明 定理 1.2 说明由(1)可得(2)。

现在来证明从(2)可得(3)。取 $\theta(\xi) \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，使之在 $B(0, 2\kappa)$ 上为 1。记 $\check{\theta}(x)$ 为 $\theta(\xi)$ 的 Fourier 逆变换。因为在 $B(0, \kappa 2^{j+1})$ 上有 $\theta(2^{-j}\xi) = 1$，所以由(1.12)知

$$\hat{u}_j(\xi) = \hat{u}_j(\xi)\theta(2^{-j}\xi).$$

从而

$$\begin{aligned} u_j(x) &= u_j(x) * 2^{jn}\check{\theta}(2^j x), \\ D^\lambda u_j(x) &= u_j(x) * 2^{j(n+|\lambda|)}\check{\theta}^{(\lambda)}(2^j x). \end{aligned}$$

利用 Young 不等式[1)]，有

$$\begin{aligned} \|D^\lambda u_j\|_0 &\leqslant \|u_j\|_0 \cdot 2^{j|\lambda|} \int 2^{jn} |\check{\theta}^{(\lambda)}(2^j x)| dx \\ &= \|u_j\|_0 \cdot 2^{j|\lambda|} \int |\check{\theta}^{(\lambda)}(t)| dt \leqslant M_\lambda 2^{j|\lambda|} \|u_j\|_0. \end{aligned}$$

再将(1.12)代入上式即得(1.13)。

最后我们证明由(3)可推得(1)。

设(3)成立，故 $\hat{u} = \sum_{j=-1}^{\infty} \hat{u}_j$，且

---

1) Young 不等式：若 $f \in L^p$，$g \in L^q$，$1 \leqslant p, q \leqslant \infty$，则 $f * g \in L^r$，$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$，$1 \leqslant r \leqslant \infty$，且 $\|f * g\|_{L^r} \leqslant \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^q}$。

$$\sum_{j=-1}^{\infty} 2^{2js}\|u_j\|_0^2 \leqslant M_1, \quad \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{2j(s-m)} \cdot \|u_j\|_m^2 \leqslant M_2.$$

由不等式 $\left|\sum_j a_j\right|^2 \leqslant \left(\sum_j \frac{1}{b_j}\right)\left(\sum_j b_j|a_j|^2\right), b_j > 0, j=-1,0,1,\cdots$,可知对任意正整数$N$

$$\left|\sum_{j\leqslant N} \hat{u}_j\right|^2 \leqslant \left(\sum_{j\leqslant N} v_j^{-1}\right)\left(\sum_{j\leqslant N} v_j|\hat{u}_j|^2\right),$$

此处取 $v_j(\xi) = 2^{2sj}[1 + 2^{-2jm}\langle\xi\rangle^{2m}]$.

注意到对任意一个 ξ,存在自然数 $j_0 = j_0(\xi)$ 使得 $2^{j_0} \leqslant \langle\xi\rangle < 2^{j_0+1}$, 于是

$$\begin{aligned}\sum_j v_j^{-1}(\xi) &= \sum_{j\leqslant j_0} v_j^{-1}(\xi) + \sum_{j>j_0} v_j^{-1}(\xi)\\ &\leqslant \sum_{j\leqslant j_0} 2^{2j(m-s)}\langle\xi\rangle^{-2m} + \sum_{j>j_0} 2^{-2js}\\ &\leqslant C_1[2^{2(j_0+1)(m-s)}\langle\xi\rangle^{-2m} + 2^{-2j_0s}]\\ &\leqslant C\langle\xi\rangle^{-2s},\end{aligned}$$

此处常数C与ξ无关. 因此

$$\langle\xi\rangle^{2s}\left|\sum_{j\leqslant N} \hat{u}_j(\xi)\right|^2 \leqslant C\sum_{j\leqslant N} 2^{2js}[1 + 2^{-2jm}\langle\xi\rangle^{2m}] \cdot |\hat{u}_j(\xi)|^2,$$

对上式两边关于ξ积分,并令 $N\to\infty$, 可得 $u\in H^s$, 且

$$\|u\|_s^2 \leqslant C(M_1 + M_2). \text{ 证毕.}$$

注 由证明过程易知,结论(3)可修改为要求分解式 $\sum_{j=-1}^{\infty} u_j$ 中的 u_j 满足如下条件: 存在实数 $s_0 > s$, 使得 $u_j \in H^{s_0}(\mathbf{R}^n)$, 且

$$\sum_{j=-1}^{\infty} 2^{2js}\|u_j\|_0^2 \leqslant M_1, \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{j(s-s_0)}\|u_j\|_{s_0}^2 \leqslant M_2.$$

以上我们给出了 $\mathbf{R}^n$ 上的 H^s 函数类在环形分解下的特征性质. 类似地可以考虑在局部及微局部意义下 H^s 中元素在环形分解下的性质. 下面就来讨论这个问题.

定义 1.3 设 $s\in\mathbf{R}$, $x_0\in\mathbf{R}^n$, $(x_0, \xi_0)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$, $u\in\mathscr{S}'$.

(1) 所谓 $u\in H^s_{x_0}$ 是指：存在 $\varphi(x)\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，它在 x_0 附近为 1，使得 $\varphi u\in H^s(\mathbf{R}^n)$.

此时我们也称 u 在 x_0 点局部地属于 H^s；

(2) 所谓 $u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$ 是指：u 可分解为 $u=u_1+u_2$，其中 $u_1\in H^s_{x_0}$，$u_2\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$，且 $(x_0,\xi_0)\notin WF(u_2)$[1].

此时我们也称 u 在 (x_0,ξ_0) 点微局部地属于 H^s.

设 U 为开锥．若对任何 $(x,\xi)\in U$，都有 $u\in H^s_{(x,\xi)}$，则记 $u\in H^s_U$.

注 由波前集的定义知，$u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$ 等价于：存在一个于 x_0 附近为 1 的 $\varphi(x)\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ 及在 ξ_0 的一个锥邻域内为 1 的正齐零次 $\phi(\xi)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$，使得

$$\phi(D)(\varphi u)(x)\in H^s(\mathbf{R}^n). \tag{1.14}$$

因此，$(\varphi u)(x)$ 的 Fourier 变换在 ξ_0 的一个锥邻域内等于一个 H^s 中元素的 Fourier 变换．故 $u\in H^s_{(x_0,\xi_0)}$ 意味着 $u(x)$ 在 x_0 点附近于 ξ_0 方向是属于 H^s 的.

显然，若 $u\in H^s_{x_0}$，则对任一 $\xi\in\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 有 $u\in H^s_{(x_0,\xi)}$. 若 $u\in H^s(\mathbf{R}^n)$，则对任一 $x\in\mathbf{R}^n$ 有 $u\in H^s_x$.

定理 1.5 设 $s,s'\in\mathbf{R}$，且 $s'\geqslant s$，则下面的论断是等价的.

(1) $u\in H^s_{x_0}\cap H^{s'}_{(x_0,\xi_0)}$；

(2) 存在 $\varphi(x)\in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$，它在 x_0 附近为 1，且存在 ξ_0 的一个锥邻域 Γ，使得

$$\varphi u=\sum_{j=-1}^{\infty}v_j'+\sum_{j=-1}^{\infty}v_j'', \tag{1.15}$$

其中

$$\|v_j'\|_0\leqslant c_j2^{-js'},\ \operatorname{supp}\hat{v}_j'\subset \boldsymbol{C}_j,$$

---

1) $WF(u_2)$ 是分布 u_2 的波前集，它的定义如下．分布 u 的波前集 $WF(u)$ 是 $\Omega\times\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 中这样的集合：$(x_0,\xi_0)\notin WF(u)$ 的充要条件是存在 x_0 的邻域 U 及 ξ_0 的锥邻域 V，使得对任意 $\varphi\in C_c^\infty(U)$ 及任意 N，存在常数 C_N，使得在 V 中 $|\widehat{(\varphi u)}(\xi)|\leqslant C_N(1+|\xi|)^{-N}$ 成立．关于波前集的性质，例如可参见[Qi1]，[QC1]等.