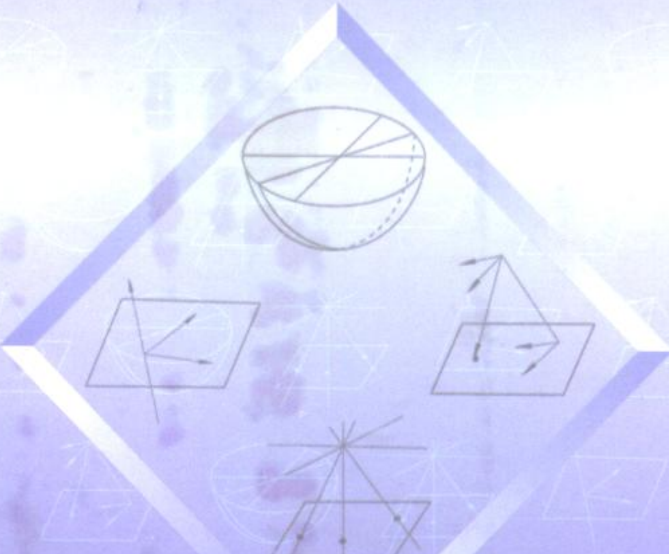
高等代数与几何

潘晏仲　李洪军



西安交通大学出版社

高等代数与几何

潘晏仲　　李洪军

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

本书内容主要包括一元多项式，矩阵理论，线性方程组理论，向量空间，内积空间，线性变换及相似标准形理论，对称双线性函数与二次型理论及其应用，仿射几何，欧氏几何理论，还介绍了代数系统与射影几何理论.

全书以现代数学的思想和语言统筹高等代数与高等几何的全部基本理论及内容，充分体现它们各自的独立性及统一性，使代数与几何有机地成为一体.

本书可作为理工科院校数学类各专业的高等代数及高等几何（含空间解析几何）教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等代数与几何 / 潘晏仲，李洪军编著 .—西安：西安交通大学出版社，1999.10
ISBN 7-5605-1121-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①潘… ②李… Ⅲ.①高等代数-高等学校-教材 ②高等几何-高等学校-教材 Ⅳ.015

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 63179 号

*

西安交通大学出版社出版发行
（西安市咸宁西路 28 号　邮政编码：710049　电话：(029)2668316）
西安向阳印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本：850 mm×1 168mm　1/32　印张：15.75　字数：402 千字
1999 年 10 月第 1 版　1999 年 10 月第 1 次印刷
印数：0 001～2 000　定价：19.00 元

前　言

随着现代数学的发展,代数与几何这两门数学学科相互渗透、紧密结合已成为一种必然趋势;随着计算机科学的飞速发展,利用几何图形进行模拟及理论猜想也是一个重要的发展趋势.面对这种形势,对理科数学的两门主要基础课——高等代数及高等几何进行课程内容与体系的改革已迫在眉睫.建立代数与几何一条线的新的课程体系,设立"高等代数与几何"课程,正是在这种形势下提出来的.这也是数学基础课与现代数学接轨的必然要求.这个新的课程体系的基本思想是:以现代数学的思想和语言去统筹高等代数与高等几何的基本理论和内容,既保持它们各自的独立性,又反映出它们之间的统一性,将这两门课程有机地组成一个整体.这样做,必将加强代数,同时也加强几何,尤其是加强几何,这也正是我们进行这两门基础课程改革的初衷.

所谓与现代数学接轨,并非指要增加现代数学的教学内容,而是数学概念和语言的现代化,是要突出数学思想和数学结构.通过"高等代数与几何"课程的学习,不仅能使学生掌握高等代数与高等几何的基本理论、内容及方法,大大提高学生的逻辑推理能力、运算能力和空间想象能力,而且将使学生体会到现代数学的思想、语言及方法,以利于后续课程的学习.这样做,必将大大提高学生的数学素质.

按照我们新的课程体系编写的这本《高等代数与几何》新教材,与传统的高等代数及高等几何教材不同,其主要特点具体地表现在以下几个方面:

1.用运算的语言及代数系统的思想去统筹"多项式代数"、"矩阵代数"、"行列式"、"向量组的线性相关性及线性方程组理论"、

“向量空间”、“线性变换”、“矩阵的特征值及相似标准形”、“内积空间”和“对称双线性函数及二次型”等这些高等代数的标准内容.

2. 向量空间是一种数学结构.在这种思想下,我们提出仿射空间和欧氏空间.强调仿射几何与欧氏几何的区别,充分认识 $\mathbf{R}^n$ 这个符号的深刻内涵.与传统的教材不同,我们首次引入“二重向量”这一重要概念,使我们可以在没有度量的情况下,讨论仿射空间的“平面”问题.这对学生以后接触到“流形”理论具有决定性的、观念上的影响.这是强调几何的结构思想,充分体现几何的独立性,同时又体现了代数与几何的统一性.

3. 强调“线性变换”的语言,而并非“矩阵”的语言,强调“对称双线性函数”的概念,而并非二次型.对称双线性函数在现代数学中,尤其在现代几何学中,起着举足轻重的作用,它又是多重线性代数理论的基础.我们首先引入对称双线性函数这个具有整体性的概念,而将二次型作为在一定基底下的局部坐标表示.这些内容本身是代数的,但又有深刻的几何背景及几何应用,所以它们又是几何的.体现出代数与几何的统一性.

4. 作为二次型的应用,提出二次曲面及其分类这一几何内容.体现了代数与几何的紧密结合.

5. 建立线性变换的“谱”理论,引入广义特征向量、广义特征子空间等概念,采用空间分解这一几何方法,非常简洁、清晰且完整地解决了矩阵的相似标准形问题.这是利用几何理论及方法去解决代数问题的一个典型范例,体现了代数与几何的紧密结合.

6. 突出变换群的思想.在全书的最后一章,我们用简洁的语言和较短的篇幅,概括地介绍了射影几何的基本思想及内容.从而将加深学生对于高等代数及解析几何的进一步理解,以此结束全书.

7. 除了最后一章外,每章都配有充足的、难易适当的习题.在一些章习题的后半部还配备了具有一定难度和综合性的习题,用“ * ”号隔开,供习题课教师选用及学生练习用.

8. 全书文字朴素、语言通俗、流畅.强调结构思想并非具体操

作.易于理解和接受,便于学生自学.

本教材是我们建立高等代数与几何一条线的新课程体系的一次尝试.教材中有一些概念及处理方法是我们首次提出来的,是在传统的同类教材中所没有的.虽然我们经过几届的教学实践,但错误及不妥之处在所难免,敬请各位专家、同行及读者不吝赐教.

本教材的编写及出版得到我校"面向21世纪教学内容与体系改革"项目经费资助.对于我校教务处及校出版社对此教材的出版的鼎力支持,表示衷心的感谢.

编　者

1998年10月

目　　录

第 1 章　多项式代数

1.1　集合　映射　等价关系 …………………………… (1)
1.2　运算　数域 ……………………………………… (8)
1.3　一元多项式及其运算………………………………… (14)
1.4　最大公因式　不可约多项式………………………… (20)
1.5　多项式的因式分解　重因式………………………… (27)
1.6　**C,R,Q** 数域上的多项式 ………………………… (34)
习题 …………………………………………………… (43)

第 2 章　矩阵代数

2.1　线性方程组的消元法………………………………… (49)
2.2　矩阵及其运算………………………………………… (55)
2.3　可逆矩阵……………………………………………… (63)
2.4　初等矩阵……………………………………………… (66)
2.5　分块矩阵……………………………………………… (73)
习题 …………………………………………………… (79)

第 3 章　方阵行列式

3.1　排列及其逆序数……………………………………… (88)
3.2　方阵行列式的定义…………………………………… (91)
3.3　方阵行列式的性质…………………………………… (94)
3.4　方阵行列式按一行(列)展开………………………… (99)
3.5　方阵行列式的应用 ………………………………… (106)

习题……………………………………………………………………（109）

第 4 章　线性方程组
4.1　向量组的线性相关性 ……………………………………（115）
4.2　最大线性无关组与秩 ……………………………………（121）
4.3　矩阵的秩及秩标准形 ……………………………………（125）
4.4　线性方程组 ………………………………………………（132）
习题……………………………………………………………………（142）

第 5 章　代数系统
5.1　代数系统 …………………………………………………（150）
5.2　群　子群　同构 …………………………………………（151）
5.3　环与域 ……………………………………………………（159）
5.4　多项式代数与矩阵代数 …………………………………（165）
习题……………………………………………………………………（168）

第 6 章　向量空间
6.1　向量空间的定义及例 ……………………………………（172）
6.2　子空间 ……………………………………………………（178）
6.3　基与维数 …………………………………………………（183）
6.4　坐标与坐标变换　同构 …………………………………（189）
习题……………………………………………………………………（196）

第 7 章　仿射几何
7.1　仿射空间　仿射坐标系 …………………………………（201）
7.2　直线及其参数方程 ………………………………………（205）
7.3　二重向量 …………………………………………………（208）
7.4　空间中的平面 ……………………………………………（222）
7.5　直线 平面的位置关系……………………………………（226）

7.6　仿射坐标变换与空间的定向 …………………… (232)
习题……………………………………………………… (238)

第 8 章　欧氏空间与欧氏几何
8.1　欧氏空间 ………………………………………… (242)
8.2　标准正交基　正交阵 ………………………… (249)
8.3　3-维欧氏空间中的向量代数 …………………… (258)
8.4　直线与平面的度量关系　空间的正交分解 …… (265)
习题……………………………………………………… (274)

第 9 章　线性变换
9.1　线性变换的定义及其运算　对偶空间 ………… (278)
9.2　线性变换的矩阵 ………………………………… (284)
9.3　线性变换的零空间与象空间 …………………… (295)
9.4　不变子空间 ……………………………………… (298)
9.5　正交变换与仿射变换 …………………………… (301)
习题……………………………………………………… (312)

第 10 章　矩阵的相似标准形
10.1　矩阵的特征值…………………………………… (316)
10.2　对角化与空间的分解…………………………… (323)
10.3　实对称阵及其对角化…………………………… (330)
10.4　矩阵的若当标准形……………………………… (334)
习题……………………………………………………… (337)

第 11 章　对称双线性型和二次曲面
11.1　对称双线性型与二次型………………………… (341)
11.2　对称矩阵与二次型的标准形…………………… (351)
11.3　正定性　正交变换下的二次型………………… (360)

11.4 特殊曲面与方程…………………………………… (366)
11.5 标准形式的二次曲面…………………………… (375)
11.6 一般二次曲面的化简…………………………… (387)
习题………………………………………………………… (395)

第 12 章 若当标准形

12.1 线性变换的特征值与特征向量………………… (401)
12.2 广义特征向量与空间的分解…………………… (404)
12.3 若当标准形……………………………………… (411)
习题………………………………………………………… (424)

第 13 章 内积空间

13.1 内积空间的定义 酉空间……………………… (429)
13.2 酉空间的直交分解……………………………… (438)
13.3 酉空间上的线性变换…………………………… (441)
13.4 投影变换………………………………………… (447)
13.5 酉变换 酉阵…………………………………… (454)
13.6 埃尔米特二次型………………………………… (459)
习题………………………………………………………… (462)

第 14 章 射影几何

14.1 线素几何和射影平面…………………………… (466)
14.2 射影变换 射影二次曲线……………………… (473)
14.3 德萨格与帕勃士定理 平面对偶原则………… (480)
14.4 变换群与几何…………………………………… (486)

参考文献

第 1 章　多项式代数

1.1　集合　映射　等价关系

如果说数学是所有自然科学的基础，那么代数就是基础的基础．事实上，代数是数学的语言，数学的很多分支理论都要用代数的语言来表述、来计算．能用代数语言来表述的理论几乎都是成熟而优美的理论，且都处于数学的中心地位．本书将要讲述的是最基本、最常用的一些代数知识，包括一元多项式代数、矩阵代数、向量代数、解析几何与射影几何等，它们都已深入到了数学的各个分支甚至工程技术领域，是我们必须掌握的基础知识．

我们首先介绍一些必备的基本概念．

集合

集合是数学上不加定义的原始概念．通常我们把**集合**理解为一些具有共同特征的事物的全体．例如，一班学生、自然数的全体、实数的全体、有理数的全体和平面上所有点的全体等都是集合的例子．组成集合的事物叫做集合的**元素**．当组成集合的元素为有限个时称此集合为**有限集**，否则称为**无限集**．

我们用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示元素．用 $a\in A$ 表示 a 是 A 中的元素，用 $a\notin A$ 表示 a 不是 A 中的元素．

例如，通常用 $\mathbf{Q}$ 表示有理数集，用 $\mathbf{R}$ 表示实数集．则 $\frac{5}{3},6\in\mathbf{Q}$；$\frac{5}{3},6,\sqrt{2},\pi\in\mathbf{R}$；但 $\sqrt{2},\pi\notin\mathbf{Q}$．

设 A,B 是两个集合，如果 A **的每一个元素都是** B **的元素**，那

么就说 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subset B$. 例如，$\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

一个集合可能有很多个子集. 对任何集合 A，显然有 $A\subset A$. 我们用$\varnothing$表示**空集**，并约定对任何集合 A，有 $\varnothing\subset A$. 下列事实也是明显的：若 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$；$A\subset B$ 且 $B\subset A$，当且仅当 $A=B$.

集合之间有两个基本的运算并和交. 设 A,B 是两个集合，由 A 的一切元素和 B 的一切元素合起来的全体组成的集合叫做 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$；由 A 与 B 的公共元素的全体组成的集合叫做 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$.

根据定义，我们有：

$$x\in A\cup B\Leftrightarrow x\in A \text{ 或 } x\in B$$

$$x\in A\cap B\Leftrightarrow x\in A \text{ 且 } x\in B$$

显然，$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$；$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$. 还有下列事实成立：

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$$

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

最后，我们介绍构造新集合的一种方法——叉积的概念. 设 A,B 是两个集合，A 中元素 $x\in A$ 和 B 中元素 $y\in B$ 的**有序对** (x,y) 的全体所组成的集合称为 A 与 B 的**叉积**，记作 $A\times B$. 用符号表示为

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A,y\in B\}$$

例如，用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，则 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 就表示二元有序数组的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{R}\}$，通常记 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}$. 若 A,B,C 是集合，则可以进行二次叉积 $(A\times B)\times C$，例如，$\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$. 有限多个集合的叉积也可以同样地定义.

在有了一一对应的概念(见定义 1.4)之后，我们将认为

$$(A\times B)\times C=A\times B\times C$$

其中，$A\times B\times C=\{(x,y,z)\mid x\in A,\ y\in B,\ z\in C\}$.

因为它们都表示了三元有序对的全体. 特别地，我们记

$\mathbf{R}^3=\mathbf{R}^2\times\mathbf{R}$. 一般来说,记

$$\mathbf{R}^n=\overbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}^{n\text{ 个}}=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n\}$$

$\mathbf{R}^n$ 表示了 n 元有序数组的全体.

映射

映射的概念是用来建立两个集合之间的对应关系的.

定义 1.1 设 A,B 是两个集合,如果通过一个确定的法则,使得对于 A 中的每一个元素 x,都有 B 中唯一确定的元素 y 与它对应,那么这个法则就称为是 A 到 B 的一个**映射**.

通常用字母 $f,g,h,\cdots$ 表示映射,并记作 $f:A\to B$. 在映射 f 下,与 $x\in A$ 相对应的元素 $y\in B$ 叫做元素 x 在 f 下的**象**,记作 $y=f(x)$.

为清晰表示映射的具体对应关系,可以在 $f:A\to B$ 下再注明元素的对应关系 $x\mapsto y$,写成

$$\begin{aligned}f:A&\to B\\ x&\mapsto y=f(x)\end{aligned}$$

例如,
$$\begin{aligned}f:\mathbf{R}&\to\mathbf{R}\\ x&\mapsto y=x^2\end{aligned}$$

就表示了 f 是 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,其中对应法则是:对 $\mathbf{R}$ 中任一元素 x,有 $\mathbf{R}$ 中元素 $y=x^2$ 与之对应.

设 $f:A\to B$ 是一个映射,B 中那些是 A 中元素在 f 下的象的元素的全体是 B 的一个子集. 记作 Imf 或 $f(A)$,称为 A 在 f 下的**象**.

$$Imf=\{y\in B\mid \text{存在 } x\in A,\text{使 } y=f(x)\}$$

定义 1.2 设 $f:A\to B$ 是一个映射. 如果 $Imf=B$,就称 f 是从 A **到** B **上**的映射,或称 f 是一个**满射**.

根据定义,$f:A\to B$ 是一个满射 $\Leftrightarrow\forall y\in B,\exists x\in A$,使得

$y=f(x)$.

定义 1.3 设 $f:A\to B$ 是一个映射.如果对于 A 中任意两个元素 x_1 和 x_2,只要 $x_1\neq x_2$,就有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,那么就称 f 是 A 到 B 的一个**单射**.

例如,
$$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}\qquad g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$
$$x\mapsto x^2,\qquad x\mapsto x^3$$
则 f 是一个既非单射又非满射的映射,g 是一个既单射又满射的映射.

设 $f:A\to B,g:A\to B$ 都是 A 到 B 的映射.如果 $\forall x\in A$,都有 $f(x)=g(x)$,那么就说映射 f 与 g 是相等的,记作 $f=g$.例如,$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},x\mapsto|x|;g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},x\mapsto\sqrt{x^2}$,则 $f=g$.

设 $f:A\to B,g:B\to C$ 是两个映射.那么,$\forall x\in A,f(x)\in B$,因而 $g(f(x))\in C$.从而 $\forall x\in A$,有唯一确定的 C 中的元素 $g(f(x))$与之对应.按照定义,这就得到了一个 A 到 C 的映射.这个映射是由 $f:A\to B,g:B\to C$ 确定的,称为 f 与 g 的**合成**或称积,记作 $g\circ f:A\to C$.
$$\forall x\in A,\quad g\circ f(x)=g(f(x)).$$
例如,$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},x\mapsto x^2;g:\mathbf{R}\to\mathbf{R},x\mapsto\sin x$ 则 f 与 g 的合成 $g\circ f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$为 $x\mapsto\sin x^2$.

映射的合成可以重复进行,对于三个映射:
$$f:A\to B,\quad g:B\to C,\quad h:C\to D$$
则合成映射 $h\circ(g\circ f)$和$(h\circ g)\circ f$ 都是A 到D 的映射.简单证明可以看出
$$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

定义 1.4 设 $f:A\to B$ 是一个映射,若 f 既是满射又是单射,就说 f 是A 到B **上的 1—1 映射**,(简称**一一对应**).

对任何集合 $A,i_A:A\to A;x\mapsto x$ 显然是一个一一对应,称为

A 的**恒等映射**.有时也记为 I_A.

显然对任何映射 $f:A\to B$,有 $f\circ i_A=f, i_B\circ f=f$.

定理 1.1 令 $f:A\to B$ 的一个映射.那么下列条件是等价的:

(1) f 是 A 到 B 上的 1—1 映射.

(2) 存在映射 $g:B\to A$,使得

$$g\circ f=i_A,\qquad f\circ g=i_B$$

证明(1)⇒(2):假定(1)成立.因为 f 是满射,$\forall y\in B$,有 $x\in A$,使得 $f(x)=y$.又因为 f 是单射,这个 x 是由 y 唯一确定的.如果规定 $g:B\to A, y\mapsto x$,满足 $f(x)=y$,那么这样就得到了 B 到 A 的一个映射 $g:B\to A$.

$\forall x\in A$,设 $f(x)=y\in B$,我们有

$$g\circ f(x)=g(f(x))=g(y)=x$$

所以 $g\circ f=i_A$.

$\forall y\in B$,设 $g(y)=x\in A$,据定义 $f(x)=y$.

$$f\circ g(y)=f(g(y))=f(x)=y$$

所以 $f\circ g=i_B$.这就证明了(1)⇒(2).

(2)⇒(1):假定(2)成立.

$\forall y\in B$,令 $g(y)=x\in A$,由于 $f\circ g=i_B$,

$$f(x)=f(g(y))=f\circ g(y)=i_B(y)=y$$

所以 f 是满射.

$\forall x_1,x_2\in A$,而 $f(x_1)=f(x_2)$.由 $g\circ f=i_A$,

$$x_1=i_A(x_1)=g\circ f(x_1)=g\circ f(x_2)=i_A(x_2)=x_2$$

所以 f 是单射.这就证明了(2)⇒(1). ▎[①]

满足定理条件(2)的映射 $g:B\to A$ 称为映射 $f:A\to B$ 的**逆映射**.我们注意逆映射是由 $f:A\to B$ 唯一确定的,这一点的证明是标准的代数证明:

---

① 注:▎为 Halmos 竖记号,表示证明结束.

反设 $f:A\to B$ 有两个逆映射 $g_1,g_2:B\to A$. 即 g_1,g_2 满足

$$g_1\circ f=i_A,\qquad g_2\circ f=i_A$$

$$f\circ g_1=i_B,\qquad f\circ g_2=i_B$$

则

$$\begin{aligned}g_1&=g_1\circ i_B=g_1\circ(f\circ g_2)\\&=(g_1\circ f)\circ g_2=i_A\circ g_2=g_2\end{aligned}$$

由于 $f:A\to B$ 的逆映射的唯一性,我们就把 f 的逆映射记作 $f^{-1}:B\to A$. 我们有

$$f^{-1}\circ f=i_A,\qquad f\circ f^{-1}=i_B$$

显然,$f:A\to B$ 与 $f^{-1}:B\to A$ 互为逆映射,即

$$(f^{-1})^{-1}=f$$

等价关系

"关系"一词是指同一集合上元素间的关系. 用现代的语言,所**谓集合 A 的一个关系是指叉积 $A\times A$ 的一个子集 $R\subset A\times A$**. 对 A 中两个元素 $x,y\in A$,若 $(x,y)\in R$,就说 x 与 y 有关系,记为 xRy 或 $x\sim y$.

我们在数学中常用的是所谓等价关系.

定义 1.5 设 A 是一个集合,A 上一个关系 $R\subset A\times A$ 称为是**等价关系**,如果 R 满足

(1) $\forall x\in A,(x,x)\in R$;

(2) 若 $(x,y)\in R$,则 $(y,x)\in R$;

(3) 若 $(x,y)\in R$ 且 $(y,z)\in R$,则 $(x,z)\in R$.

$\forall x,y\in A$,若 xRy,就称 x 与 y **等价**. 定义中的性质(1),(2),(3)分别为自反性、对称性和传递性.

我们用叉积 $A\times A$ 的子集来理解等价关系,但也可以下列形式定义 A 上的一个等价关系:$\forall x,y\in A$,等价关系 $\sim$ 定义为

"$x\sim y\Leftrightarrow x$ 与 y 具有某一共同性质"

上面说的自反性,对称性和传递性变为:

(1) $\forall x\in A,x\sim x$;

(2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x$;

(3) $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

我们举例说明如下.

例 1.1 令 $\mathbf{Z}$ 表示所有整数组成的集合, p 是任一个固定的正整数,在 $\mathbf{Z}$ 上定义一个等价关系 $\sim$: $\forall m, n \in \mathbf{Z}$

$$m \sim n \Leftrightarrow m = n (\mathrm{mod}\ p)$$

性质(1),(2)自然满足,只证性质(3):若 $m \sim n$ 且 $n \sim l$,即 $m - n = 0\ (\mathrm{mod}\ p)$, $n - l = 0 (\mathrm{mod}\ p)$则 $m - l = (m - n) + (n - l) = 0\ (\mathrm{mod}\ p)$,所以 $m \sim l$.这就证明了 $\sim$ 是 $\mathbf{Z}$ 上一个等价关系.

例 1.2 在实数集 $\mathbf{R}$ 上定义一个等价关系 $\sim$ 如下: $\forall x, y \in \mathbf{R}$,

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{存在 } k > 0, \text{使 } y = kx$$

性质(1): $\forall x \in \mathbf{R}$,取 $k = 1$,则 $x \sim x$.

性质(2):若 $x \sim y$,即存在 $k > 0$,使 $y = kx$.则取 $\frac{1}{k} > 0$,有 $x = \frac{1}{k} y$,从而 $y \sim x$.

性质(3):若 $x \sim y, y \sim z$,即存在 $k_1, k_2 > 0$,使 $y = k_1 x$, $z = k_2 y$,取 $k = k_1 k_2 > 0$,则 $z = (k_1 k_2) x$,从而 $x \sim z$.

这就证明了 $\sim$ 是 $\mathbf{R}$ 上一个等价关系.

设 R 是集合 A 上一个等价关系.设 $x \in A$,则 A 中与 x 等价的元素的全体组成 A 的一个子集.这个子集称为 x 所在的**等价类**,记为 $[x]$ 或 $\overline{x}$.

$$\overline{x} = [x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

对 A 的任意两个等价类 $[x]$ 和 $[y]$,或者 $[x] = [y]$,这时 $x \sim y$, 或者 $[x] \cap [y] = \varnothing$.这一点可由对称性和传递性看出来.因此,等价关系把 A **分为一些不相重迭的等价类的并集**.

例如,在例 1.1 中, $\mathbf{Z}$ 被分为 p 个等价类

$$[0], [1], [2], \cdots, [p-1]$$