高等学校教学用書

运动稳定性理論的基础

Г. Н. 杜波兴著

高等教育出版社

高等学校教学用書

运动稳定性理論的基础

Г. Н. 杜波兴著
俞玉森 陆傳务譯

高等教育出版社

本書系根据苏联莫斯科大学出版社（Издательство московского университета）出版的杜波兴（Г. Н. Дубошин）著“运动稳定性理論的基础”（Основы теории устойчивости движения）1952年版譯出的。原書經苏联高等教育部审定为綜合大学物理数学系教学参考書。

本書由俞玉森、陆傳务共同翻譯，并由俞玉森校閱。

运动稳定性理論的基础

Г. Н. 杜波兴著

俞玉森　陆傳务譯

高等教育出版社出版北京宣武門内承思寺7号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）

京华印書局印刷　新华書店發行

統一書号13010·551　開本850×1168 1/32　印張13

字數322,000　印數0001—5,000　定價(6)￥1.50

1959年2月第1版　1959年3月北京第1次印刷

序

理論力学的近代發展及其在技术、天体力学和物理学中的各种应用，产生了很多关于运动稳定性理論的各种特殊問題。因此，在培养有关理論力学問題的各科学技术部門內进行研究的科学工作者、研究生和大学生时，研究这种理論的基础愈来愈成为必需和重要的部分了。

在專門討論这个重要問題的科学和教学文献中，我們有許多优秀的作品，其中最值得注意的是A.M.辽普諾夫的巨著“运动稳定性的一般問題”。这一有价值的作品，是著名的俄罗斯学者在六十年以前所写成的，一直到現在，它还是深刻的科学思想和富有成效的方法的取之不竭的源泉；而掌握这些思想和方法是从事研究这一部門的所有学者所不可缺少的。

然而，要研究A.M.辽普諾夫这一有价值的著作是很困难的，特別是对于不在数学領域中工作的專业人員。本書作者能想到編写这样一本关于运动稳定性理論的教科書，这是很恰当的主意。这本書能使讀者較容易掌握A.M.辽普諾夫的深刻的思想，并可作为研究他那本巨著的初步讀物。本書又对A.M.辽普諾夫所研究过的特別复杂的部分作了必要的注解和說明，并在一些个別問題中闡明了他所拟定的一般方法的应用。

这本書是作者多年教学工作的結果，据我看来，它成功地解决了作者所提出的問題：即可作为研究A.M.辽普諾夫深刻思想的参考書，也可作为研究运动稳定性一般理論的一本初步讀物。其实，本書已远远超出了作者所提出問題的范圍。

在叙述一般理論时，例如叙述現有的結果及其进一步的發展时，

特别是在其各种应用方面，作者引入很多新颖的材料。本書詳細地叙述了运动稳定性理論的近代状况，它可作为力学的这一部分的教科書。

B.B. 高路别夫教授

作者的話

本書是根据作者在国立莫斯科大学对天体力学專业四、五年級学生講授了多年的講稿修訂成的。

本書已被指定为研究运动稳定性理論初步的参考書。运动稳定性理論是由著名的俄罗斯学者亞历山大·米哈依洛維奇·辽普諾夫創立，并在他的著作“运动稳定性的一般理論”中闡明。这一著作1892年在哈尔科夫出版，到今已再版两次。

在本書正文中，为了簡便起見，我們处处称A.M.辽普諾夫的这本著作为基本著作。

A.M.辽普諾夫所創立的运动稳定性理論，不仅在天体力学的領域中，也在許多其他的应用科目中，具有很重大的意义。

因而，怪不得人們对这一理論的兴趣逐年增長，并且希望熟悉A.M.辽普諾夫在这方面的貢献的科学工作者也愈来愈多。

但是，A.M.辽普諾夫的这本著作本身，对于开始研究稳定性理論的人是很难了解的，因为它既不是教科書，也不是参考書，而是一篇專門的單行本(博士論文)，要直接研究它，只有專家才容易作到。

由于这个原因，本書的作者早就有了一个念头，想把A.M.辽普諾夫的理論初步这样叙述出来，使得所有研究这一理論的实用問題的人，或者是对这一理論有兴趣的人，都能很容易的了解它。

本書就是为了实現这一念头的一个尝試。

因为作者抱定了这样一个目的，所以本書就不是什么創作，而只能看作是为了初步認識运动稳定性理論的一本学習方法指南，或者可看作是为了閱讀和研究A.M.辽普諾夫著作的一本輔助参考書。

因此，本書仅仅对A.M.辽普諾夫基本著作中的某些部分叙述得

尽可能詳細些，这些部分，我們認为是从事系統地研究运动稳定性理論时应該开始研究的。

由于这样，本書不包括 A. M. 辽普諾夫基本著作中被認为对初学者最难懂的各部分，也不包括苏維埃时代苏联各学者对 A. M. 辽普諾夫理論所作的各种补充資料。

如前所述，本書仅仅是为了研究 A. M. 辽普諾夫基本著作的参考書。共分成七章。

第一章介紹了 A. M. 辽普諾夫在基本著作中所提到的基本概念及定义。凡可以用簡單的例子来說明的，都作了詳細的討論；同时也提供了作出那些基本微分方程的方法，这些微分方程 A. M. 辽普諾夫称为"被扰动运动的方程"。

第二章所考察的是 A. M. 辽普諾夫对被扰动运动的微分方程的基本积分方法，即借助于按所求函数的初值的乘冪所排成的无穷級数来求积分的方法。

这一章对以后各章而言，本来不是必需的，而我們之所以把它列入本書中，主要是考虑到在很多实用問題中所遇見的微分方程，有許多要应用 A. M. 辽普諾夫的方法来求近似积分。

第三章是本書最重要的一章，里面說到所謂 A. M. 辽普諾夫"第二方法"的基础。这种方法能够用最有效的方式来解决很多关于运动稳定性理論的实际問題。

第四章所叙述的是，当一次近似方程为常系数的綫性方程时稳定性問題的解法。

作者称这种情形的未被扰动运动为"在一次近似中駐定的运动"，因为 A. M. 辽普諾夫在他的著作中有关的地方曾指出过：他对駐定的运动所証明过的許多定理，甚至当高次項的系数与时間有关时，也仍然是成立的。

第五章是关于駐定运动的稳定性問題的两种基本的奇异情况。在

这一章中叙述了 A. M. 辽普諾夫基本著作中的一些結果。

第六章研究被扰动运动的正規形式的微分方程的周期解。A. M. 辽普諾夫所創立的周期解的理論，除了与稳定性的理論有密切联系外，并且在許多应用方面也有独立的用处。

第七章也就是最末一章所研究的是关于非駐定运动稳定性問題的若干情况，即当一次近似方程为带有变系数的綫性微分方程組时的情况。

这是一个对近代应用方面非常重要的問題，我們不可能作充分完备的說明；因为在 A. M. 辽普諾夫的基本著作中，这一問題仅仅是对周期运动作过詳細的研究。非駐定运动稳定性問題的一般理論（基于示性数的方法）还未曾被著名的学者弄到可以用来解决实际問題的地步。

这些就是本書的內容。我們希望它对于初步熟悉 A. M. 辽普諾夫所創立的运动稳定性理論会有所帮助。

当我們叙述 A. M. 辽普諾夫的理論时，我們尽可能保留著名的俄罗斯学者叙述的格式，并且采用 A. M. 辽普諾夫所用过的全部术語。

在个別地方，我們直接仿照 A. M. 辽普諾夫的叙述法，以便使讀者对偉大学者那种正确的格式和語言有所認識。

应該指出的是，仿照 A. M. 辽普諾夫的格式，我們尽量避免在叙述中引用外来語，甚至在近代苏維埃出版物中所慣用的外来語我們也尽可能地用相当的俄語代替。

最后，承蒙苏联科学院 B. B. 高路別夫通訊院士，H. Г. 契太叶夫通訊院士及 Г. H. 斯維尼可夫教授对本書提出了很多宝貴的意見，并作了指示。作者对他們致以深切的謝意。

在編写本書时我們曾用到下列各書：

A. M. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения（运动稳定性的一般問題），Издание ОНТИ, 1935, 2-е издание, 1950.

В. И. Смирнов. Курс высшей математики(高等数学教程⊖), Гостехиздат, 1949.

Г. К. Суслов. Теоретическая механика (理論力学), Гостехиздат, 1944.

В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений (微分方程教程⊖), Гос. 1950.

И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (常微分方程論講义⊖), Гос. 1947.

В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений (微分方程解析理論講义), Гостехиздат, 1950.

В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений (微分方程定性理論⊖), Гостехиздат, 1949.

В. А. Стеклов. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений (常微分方程积分理論基础), Госиздат. 1927.

Н. Г. Четаев. Устойчивость движения (运动稳定性), Гос. 1946.

И. Г. Малкин. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний (非綫性振动理論中的辽普諾夫和龐加萊方法), Гос. 1949.

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры (高等代数教程), Гос. 1946.

А. К. Сушкевич. Основы высшей алгебры (高等代数基础), ОНТИ, 1937.

М. Ф. Субботин. Курс небесной механики (天体力学教程), т. 2. ОНТИ, 1937.

В. Немыцкий, М. Слудская, А. Черкасов. Курс математичского анализа (数学分析教程), Гос. 1944.

⊖ 有中譯本——譯注。

目　录

第一章　基本概念及定义

§1. 完整力学体系的运动微分方程

1. 讓我們来考察任一力学体系，这个体系具有有限个自由度，而沒有不可积分的微分約束。

以 k 表示力学体系的自由度，且命

$$q_1, q_2, \cdots, q_k$$

为决定其位置的 k 个独立参数。我們称它們为**广义坐标**，并假定所选擇的这些参数对力学体系的任何实的位置都是实数。

特别是，这些参数可以是力学体系的各点在任一确定坐标系中的寻常直角坐标或極坐标 。

当广义坐标看作是时間 t 的函数时，我們記它們关于 t 的一阶导数如下：

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k.$$

在任何动力学的問題中，如果其中力已由一定的形式給定，函数 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 将滿足 k 个二阶微分方程，这些方程称为力学体系的运动方程。

这些方程的最一般形式可以按下列方式写出：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_s}=U_s, \ (s=1, 2, \cdots, k) \tag{1.1}$$

式中 T 表示所考察的力学体系的活力，而諸量 U_s 是由所給的作用力而决定的，称为**广义力**。

显然，活力 T 是关于广义速度 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k$ 的二次有理整函数，其系数一般是与时間 t 及广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 有关的。广义力 $U_1, U_2,$

$\cdots, U_k$ 是时間，广义坐标及广义速度的已知函数。

方程(1.1) 叫做拉格朗日第二类方程。从它們总可解出广义坐标的二阶导数，因此可以把力学体系的运动方程写成如下的形式：

$$\frac{d^2q_s}{dt^2}=Q_s(t;\ q_1, q_2, \cdots, q_k;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k), (s=1, 2, \cdots, k) \quad (1.2)$$

式中諸量 Q_s 是时間、广义坐标及广义速度的已知函数。

以

$$\begin{array}{l} q_1^0, q_2^0, \cdots, q_k^0, \\ \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \cdots, \dot{q}_k^0 \end{array} \quad (1.3)$$

表示广义坐标及广义速度在某一初时刻 t_0 时的值。若找到函数

$$q_s=q_s(t;\ q_1^0, q_2^0, \cdots, q_k^0;\ \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \cdots, \dot{q}_k^0) \quad (s=1, 2, \cdots, k)$$

滿足方程(1.2)及初値条件：

$$\left.\begin{array}{l} q_s^0\equiv q_s(t_0;\ q_1^0, q_2^0, \cdots, q_k^0;\ \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \cdots, \dot{q}_k^0), \\ \dot{q}_s^0\equiv \dot{q}_s(t_0;\ q_1^0, q_2^0, \cdots, q_k^0;\ \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \cdots, \dot{q}_k^0), \end{array}\right. (s=1, 2, \cdots k) \quad (1.4)$$

即若求得微分方程組(1.2)的通解时，則所考察的力学体系的运动将完全被确定。

2. k 个二阶联立微分方程 (1.2)，可以用与它对等的而带有 $2k$ 个未知函数 $q_1, q_2, \cdots, q_k$; $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots \dot{q}_k$ 的 $2k$ 个一阶联立微分方程来代替：

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dq_s}{dt}=\dot{q}_s \\ \dfrac{d\dot{q}_s}{dt}=Q_s(t;\ q_1, q_2, \cdots, q_k;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k). \end{array}\right. (s=1, 2, \cdots, k) \quad (1.5)$$

若能求得方程組(1.5)的 $2k$ 个独立的首次积分

$$F_\sigma(t;\ q_1, q_2, \cdots, q_k;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k)=C_\sigma, (\sigma=1, 2, \cdots, 2k) \quad (1.6)$$

式中 $C_1, C_2, \cdots, C_{2k}$ 为任意常数，則对于 $2k$ 个未知数

$$q_1, q_2, \cdots, q_k;\ \dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k,$$

解这些方程时，我們得到方程組(1.5)的下列形式的通解：

$$\begin{aligned} q_s &= q_s(t;\ C_1, C_2, \cdots, C_{2k}), \\ \dot{q}_s &= \dot{q}_s(t;\ C_1, C_2, \cdots, C_{2k}). \end{aligned} \quad (s=1, 2\cdots, k) \tag{1.7}$$

若把由初值(1.3)决定的任意常数表为显函数:

$$C_\sigma = F_\sigma(t_0;\ q_1^0, q_2^0, \cdots, q_k^0;\ \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \cdots, \dot{q}_k^0), \quad (\sigma=1, 2, \cdots, 2k)$$

并将所得的 C_σ 的值代入(1.7)的前 k 个方程中，則得方程組(1.2)的通解。但是很少能得到通解的有限形式，这就常常成为解决力学問題时發生困难的根源。更常常会遇到这样的情形：求得的不是組成一般积分的全部 $2k$ 个方程(1.6)，而是較少数的首次积分。知道了不到 $2k$ 个首次积分，虽然不可能得到所需要的通解，但是这种情况可能仍是有益的，它有时使問題得到簡化。

可能發生这样的情况：在所研究的問題中，諸作用力具有力函数。那么就存在这样一个与广义速度无关的函数 $U(t;\ q_1, q_2, \cdots, q_k)$，使得广义力 U_s 由下列公式所确定:

$$U_s = \frac{\partial U}{\partial q_s}. \quad (s=1, 2, \cdots, k)$$

在这种情形下的拉格朗日方程比較簡單，并可写成形式:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial(T+U)}{\partial \dot{q}_s}\right] - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_s} = 0. \quad (s=1, 2, \cdots, k) \tag{1.8}$$

这个二阶方程組可以化成对等的一阶方程組．形式很簡單，称为**典則方程**。为此，按下列公式导入新的变量 $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 代替 T 关于 $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \cdots, \dot{q}_k$ 的导数:

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s}. \quad (s=1, 2, \cdots, k)$$

与方程組(1.8)对等的典則方程組可写成下列形式:

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial R}{\partial p_s}, \quad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial q_s}. \quad (s=1, 2, \cdots, k) \tag{1.9}$$

式中的特征函数 R 由下式决定:

$$R = T_2 - T_0 - U.$$

在这一表达式中，T_2 表示活力 T 中关于广义速度为二次的各項的集

合，而 T_0 是 T 中与速度无关的各项的集合。

这个特征函数是时間 t 和諸量 $q_1, q_2, \cdots, q_k$; $p_1, p_2, \cdots, p_k$ 的已知函数。

如果 R 不明显地依賴于时間，則方程組(1.9)总有下列形式的首次积分:

$$R=C,$$

式中 C 是任意常数。

§2. 稳定性問題的提法

設給定了某一力学体系的运动微分方程，例如，具有(1.2)的形式。在所考察的問題中，对应于任何一組可能取的已知值

$$q_1^0, q_2^0, \cdots, q_k^0;\ \dot{q}_1^0, \dot{q}_2^0, \cdots, \dot{q}_k^0$$

有力学体系的某一完全确定的运动。在同样的已知力下，与可能取的不同的一組初值对应的，有力学体系的不同的运动。

从力学体系所有可能的运动中，我們选出任一个运动，它对于任何 $t \geqslant t_0$ 的值是完全确定的，并称它为未被扰动的运动。与这个未被扰动的运动对应的，有完全确定的初值及微分方程(1.2)的完全确定的特解。对应于所选出的未被扰动的运动之初值，我們以字母

$$\overline{q_1^0}, \overline{q_2^0}, \cdots, \overline{q_k^0};\ \overline{\dot{q}_1^0}, \overline{\dot{q}_2^0}, \cdots, \overline{\dot{q}_k^0} \tag{2.1}$$

来表示，此处所有的 $\overline{q_s^0}, \overline{\dot{q}_s^0}$ 都是已給的实数。

把方程(1.2)的对应特解写成下列形式:

$$q_1=f_1(t),\ q_2=f_2(t),\ \cdots,\ q_k=f_k(t). \tag{2.2}$$

此处 $f_s(t)$ 都是时間的实函数，它們对任何 $t \geqslant t_0$ 仅仅給出諸量 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 所能取的值。这些函数对于任何 $t > t_0$ 滿足恒等式

$$\frac{d^2 f_s(t)}{dt^2} \equiv Q_s[t;\ f_1(t), f_2(t), \cdots, f_k(t);$$

$$\dot{f}_1(t), \dot{f}_2(t), \cdots, \dot{f}_k(t)] \quad (s=1, 2, \cdots, k)$$

而对于 $t=t_0$ 满足条件:

$$f_s(t_0)=\bar{q}_s^0,\ \dot{f}_s(t_0)=\dot{\bar{q}}_s^0.\quad (s=1, 2, \cdots, k)$$

为了避免誤解起見,必須指出:被考察的力学体系的任一可能的运动,都可以取作未被扰动的运动;而我們所假定的未被扰动的运动,只是以我們的願望来选擇的。

还必須指出:决定所选取的未被扰动运动的函数 $f_s(t)$,应該看作是时間的已知函数,并且是对任何 $t\geqslant t_0$ 的值都有定义的。

若方程(1.2)的通解为已知,則函数 $f_s(t)$ 显然可以从这个解而得,只要用簡單的代換,以已給的数 $\bar{q}_s^0, \dot{\bar{q}}_s^0$ 代替字母 $q_s^0, \dot{q}_s^0$ 就是。

若不能求到通解(这也就是一般的情形),則选擇未被扰动的运动当然是困难的。但是可能發生这样的事情:卽对方程(1.2)可能求到某些特解,于是可以取其中的任意一个特解作为对应于未被扰动的运动之特解,也可能用任一种近似法,例如用数字积分法或用某种类型的无窮級数,来决定方程(1.2)的所需的特解。

不管怎样,未被扰动的运动应該是先給的,因而在以后我們将假定:函数 $f_s(t)$ 是对于任何大于 t_0 的时間而定义的已知函数。

2. 与不同于(2.1)的任何另一組初值对应的,是力学体系的某另一种运动,它与未被扰动的运动不同,并且是由同样的方程組(1.2)的某另一組解所确定的。

任何不同于未被扰动的另一种运动,我們讓定称它为被扰动的运动。

所以,不管是未被扰动的运动或任何被扰动的运动,都是处于同样的一些力作用下的同一力学体系所能有的运动,因而是由同样一些微分方程所确定的运动。

任何被扰动运动和未被扰动运动仅仅在初值上不同。任一被扰动的运动之初值可設为下列形式:

$$q_s^0=\bar{q}_s^0+\varepsilon_s,\ \dot{q}_s^0=\dot{\bar{q}}_s^0+\varepsilon_s',\quad (s=1, 2, \cdots, k) \tag{2.3}$$

此处 $\varepsilon_s, \varepsilon_s'$ 是某些实的常数。

数量 $\varepsilon_s, \varepsilon_s'$ 称为初扰动

給定了这些量就可确定某一被扰动运动，所以广义坐标及广义速度是时間和这些初扰动 $\varepsilon_s, \varepsilon_s'$ 的某些函数，它們是滿足运动方程(1.2)的。我們将假定：对諸量 $\varepsilon_s, \varepsilon_s'$ 可以取任何值，至少是任何相当小的值。

对任何不等于 t_0 的 t 值，差数

$$q_s-f_s(t), \dot{q}_s-\dot{f}_s(t) \quad (s=1, 2, \cdots, k)$$

称为广义坐标及广义速度的繼扰动，或簡称扰动。

在任一时刻 t 的这些差值，确定被扰动运动与所选定的未被扰动运动之差别。显然，这些差数是时間和初扰动 $\varepsilon_s, \varepsilon_s'$ 的函数。

若令所有的 $\varepsilon_s, \varepsilon_s'$ 都等于零，則所有的差数

$$q_s-f_s(t), \dot{q}_s-\dot{f}_s(t) \quad (s=1, 2, \cdots, k)$$

显然对任何 t 都等于零。

假設 $\varepsilon_s, \varepsilon_s'$ 不是零，就引起一个問題：能否指定这样一些足够小的界限，使得繼扰动 $q_s-f_s(t), \dot{q}_s-\dot{f}_s(t)$ 的数值永远不会超过这些界限？

这一問題也就是本書所要說明的、A. M. 辽普諾夫意义下的、运动稳定性理論的問題。

这个問題的解依賴于所研究的未被扰动运动之特征以及参数 q_1, $q_2, \cdots, q_k$ 的选擇，并且一般說来，也依賴于初时刻 t_0。当 q_s 的选擇确定时，这一問題的解答在某种意义下将表征出所研究的未被扰动的运动：决定它的性質为所謂 A. M. 辽普諾夫意义下的稳定性，或者决定相反的性質，即所謂 A. M. 辽普諾夫意义下的不稳定性。

因为我們仅仅准备叙述 A. M. 辽普諾夫的理論，所以只限于研究下列諸情形：問題的解和时刻 t_0 的选擇无关，这里 t_0 是指初扰动發生的时刻，或是給予初扰动的时刻。