近代开关理论及数字设计

李建勋 著

王玉龙　孙怀民 译

柳重堪　裴　珉 校

科学出版社

1985

内 容 簡 介

本书是李建勋教授所著的《数字电路与逻辑设计》一书的姐妹篇，它综合了 1970 年以来开关理论及数字设计的最新研究成果，是一本理论性强、系统性较好的近代开关理论书.

全书共十二章. 前五章系统地介绍了开关理论的数学基础，包括布尔代数、向量开关代数、布尔微分、特殊开关函数及多值逻辑. 第七至九章讨论了序列机的正则表达式及其实现方法. 第六和第十章分别介绍了组合和时序线路的故障检测方法. 最后两章介绍了用中大规模集成电路及微处理器实现数字设计的方法.

本书可作为大专院校计算机科学系和电子工程系的高年级学生学习“开关理论”的教材，也可供有关专业的工程技术人员更新知识、奠定新的理论基础学习参考.

Samuel C. Lee

MODERN SWITCHING THEORY AND DIGITAL DESIGN

Prentice-Hall, 1978

近代开关理论及数字设计

李建勋 著

王玉龙 孙怀民 译

柳重堪 裴 珉 校

责任编辑 黄岁新

科学出版社 出版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1985 年 11 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

1985 年 11 月第一次印刷 印张：26 1/2

印数：0001—3,600 字数：611,000

统一书号：15031·683

本社书号：4180·15—8

定价： 6.20 元

译 者 的 话

《近代开关理论及数字设计》是继李建勋教授所著《数字电路与逻辑设计》一书之后的一本有关数字设计的专著. 该书综合了1970年以来开关理论及数字设计方面的最新成果，系统地阐述了开关理论及数字设计的数学基础，如布尔代数、向量开关代数、布尔微分、特殊开关函数及多值逻辑等. 在此基础上，本书讨论了序列机的分析与综合，组合线路与时序线路的故障检测算法. 最后，本书还介绍了应用中大规模集成电路及用微处理器实现数字设计的方法. 因此，本书是大学计算机科学系和电子工程系高年级学生学习开关理论的一本较好的参考书，对从事这方面工作的科技人员也有较大的参考价值. 这就是我们要翻译本书的目的.

在翻译过程中，我们发现了原书中的某些错误. 凡属明显笔误或印刷错误的，一律不作说明；凡属原理性错误的，作了译者注，可供读者参考. 本书的第一至六章及第十一、十二章由王玉龙同志译，第七至十章由孙怀民同志译. 第一至五章先后经孙怀民和柳重堪两同志校对，第六至十章由裴珉同志校对. 在翻译本书过程中得到北京航空学院计算机科学和工程系领导的大力支持，在最后整理译稿中得到邵洪余同志大力帮助，在此对上述有关同志深表谢意. 但限于译者的水平，译书中难免出现不妥甚至错误之处，敬请读者批评指正.

1983.10

序　言

开关理论已公认为是计算机科学和数字设计的基础，因而在美国的所有重点大学的计算机科学系、电子工程系和应用数学系里几乎都开设这一门课程，或开设为两门课程. 一般说，对于期望在计算机科学、数字系统或组合数学领域中取得领先地位的所有大学毕业生，本课程将是一门必修课. 本书是根据作者过去八年中从教开关理论课程的讲稿编写而成. 对要学习本课程的高年级学生和大学毕业生，他们是熟悉下列内容的:

1. 真值表.
2. 逻辑门.
3. 卡诺图.
4. 开关函数的最小化方法.
5. 触发器.
6. 基本数字器件，如计数器、寄存器、基本二进制加法器和减法器等.

实际上，这些内容就是学习本课程所需要的唯一基础. 在选择本课程的教科书时，作者意外地发现几乎没有一本开关理论方面的教科书反映了 1970 年以来的这一领域中的水平. 然而，自 1970 年以来这一领域里已经进行了大量的研究. 因此，在作者看来，显然需要一本包含有这些最新研究成果的教科书. 本书就是基于这一需要而产生的.

本书共有十二章，可分为下列四部分:

1. 布尔代数及布尔微分运算(见第一、二和三章).
2. 组合逻辑(见第四、五和六章).
3. 时序逻辑(见第七、八、九和十章).
4. 数字设计(见第十一、十二章).

下面简要说明各章的内容.

第一章讲述了布尔代数及其性质，它提供了开关理论及数字设计的数学基础. 第二章介绍了广义的两值布尔代数或开关代数. 在这一广义的代数中，每个元素是以一个二进制向量和两个新运算出现的; 并定义了转置运算和广义补运算. 本章还将德 · 摩尔根定理、香农定理及展开定理推广为更一般形式，这些一般形式把它们的普通形式作为相应的特例. 第三章介绍了布尔函数的偏导数、偏微分、全微分及全变分，指出了布尔函数的这些微分和变分算子的许多性质. 以布尔函数的偏导数为基础，导出了布尔函数的马克劳林展开式及泰勒展开式，这些展开式与实变函数中的对应展开式相类似. 此外，本章还介绍了计算开关函数的布尔导数和微分的两种简便方法.

在开关电路设计中，特殊开关函数是有用的. 第四章介绍了四种特殊函数: 单调函数、阈函数、对称函数及功能完备函数，包括了这些函数的许多性质及确定它们的算法. 第五章介绍了多值开关函数，特别是它们的分析和实现. 随着集成电路 (IC) 芯片内的元件数量的增加，电路测试已成为制造过程中的必要部分. 第六章介绍了推导组合电路中的单和多逻辑故障的故障检测试验的几种方法，包括两种计算机用的算法: II 型 D 算法

(DALG-II) 及 TEST-DETECT 算法，这些算法可用来生成大型组合电路的故障检测测试.

在第七章，利用状态的可替换（S. P）分割解决了三个重要问题：序列机的状态化简、状态分配及机器分解. 第八章介绍了 Rabin-Scott 机的系统表示法，称之正则表达式. 这一章还包括了确定性和非确定性序列机，讨论了两种类型的等价：反应等价及识别等价，说明了确定性序列机的这两种等价是相互蕴涵的.本章还介绍了由转移图获得正则表达式的系统方法，以及由正则表达式构成转移图的方法. 在第九章，指出了任何序列机实际上都能用钟控时序电路实现并由它获得；详细地讲述了如何用脉冲型和基本型电路来实现序列机. 脉冲型时序电路的分析和设计与钟控时序电路相类似，而基本型时序电路的分析和设计与钟控时序电路不同. 为此，第九章还讨论了基本型时序电路中的两个不期望的转移现象(竞争与冒险)及其消除方法. 第十章介绍了设计序列机的故障检测试验的一个方法，指出了故障检测试验的设计问题实质上是一个机器识别的限制问题. 故障检测试验的结构由三部分组成：初始化部分，状态识别部分及转移验证部分. 本章将详细讲述这些内容并举例说明之.

最后两章集中讨论了近代数字(电路与系统)设计. 第十一章讲述应用数字集成电路的数字设计，其重点是介绍应用各类 MSI 和 LSI 集成电路的数字设计. 第十二章介绍应用微处理器的数字设计——技术发展的新动向，其中包括基本设计方法的概述及微处理器所常用的硬件和软件，并用几个数字设计微计算机系统来说明这一新的数字设计方法.

本书中的不少内容是最新的一些研究成果，它们尚未在任何一本教科书中出现过.

据作者的经验所知，学生总是喜欢好的例子，特别是在说明不同概念和理论时更是这样，本书的另一个特点就在于全书列举了许多这样的例子. 为了使学生不仅确实地理解理论，而且知道如何应用它，本书几乎在每一节的结尾都给出了大量的练习.

一图胜千字，本书全篇给出了不少图形、表格及流程，以帮助读者"看透"理论.

我要感谢 M. E. Van Valkenburg 博士, K. S. Fu 博士，H. S. Hayre 博士和 M. S. Ghausi 博士给予的忠告和帮助，更要感谢 W. R. Upthegrove 博士和 C. R. Haden 博士给予的鼓励和支持.我也要感谢 Mary-Allen Kanak 太太为本书的第十一、十二两章绘制附图，感谢 Mike. Weible 先生对原稿的校对.

李建勋

目　　录

第一章　布尔代数与布尔函数

开关理论主要讨论一种特殊类型函数的分析(性质、最小化等等)和综合(实现),这种函数定义在一类特殊的代数即所谓开关代数上. 然而开关代数本身又是布尔代数的一种特殊类型,所以开关函数无非是定义在开关代数上的一个映射. 含有两个元素 0 和 1 的开关代数是二元布尔代数(最简单的非退化的布尔代数). 为了弄清开关代数是怎样推导出来的,我们必须首先研究其数学基础,即布尔代数. 实际上,布尔代数是整个开关理论领域的数学基础.

布尔代数的代数结构是从有序集导出的. 本章首先引入有序集以及集合论中的元素与代数中的元素之间的一一对应关系. 在引入布尔代数之前,首先给出格的定义,它是有序集类中的一种特殊子类. 布尔代数又是格的一个特殊子类,即所谓有补分配格或布尔格. 其次,将详细地讨论布尔代数的一些重要性质. 最后,介绍布尔函数的形式化定义及其范式. 由于每个布尔函数都存在范式,这为我们提供了确定两个布尔函数等价的方便工具,也为我们提供了导出开关函数最小化方法的基础,这些将在第二章中论述.

1.1　集合,有序集和代数

集合论通常被认为是数学的“根基”. 可以说数学的每个分支都是研究这种或那种“客体”集合的学科. 例如,粗略地说,几何学是研究点集的学科,代数是研究数集及在其上的运算的学科,数学分析则主要是研究函数的集合. 对于集合及其在数学基础中的应用的研究,最初是由德国数学家 G. 康托尔 (Cantor, 1845—1918) 在十九世纪后叶开始的. 从此以后,集合论以一种巧妙而系统的方法统一了许多看起来是互不相干的思想,从而把许多数学概念归纳到它们的逻辑基础上.

本节的任务有三个. 第一,回顾集合论中的某些有关内容. 第二,研究有序关系的三种类型: 偏序、全序(偏序的特殊情况)和良序(全序的特殊情况)以及它们对应的集合类型. 第三,指出集合、有序集和代数之间一些相似的量.

一个集合(简称为集)是一些客体的聚合,对此聚合中的客体的性质我们并不作什么特殊的规定. 这一聚合中的各个客体称为集合的元素或成员,并称它们属于(或被包含于)该集合. 例如,一群人、一束花、一串数分别为一个集合,其中人、花、数是这些集合的元素或成员. 必须着重指出,一个集合本身也可以是另一个集合的元素. 例如,一条直线是许多点的集合,而平面上所有直线的集合则是点的集合的集合. 实际上,一个集合还可以是集合的集合的集合,以此类推.

设 A 是一个集合, x 和 y 是 A 的元素,定义关系“$x \leqslant y$”为“y 后于 x”*,关系“$x < y$”

* 原文直译应为“y 包含 x” (y *includes* x),但这容易与集合的“包含”关系混淆. 实际上,这里是指抽象的偏序关系,例如自然数之间的大于或等于关系、集合之间的包含关系、生物之间的年龄关系等都可以看成是偏序关系的一个特例. ——译者注

为“y 真后于 x”.

定义 1.1.1

如果集合 A 上的一个关系$\leqslant$,满足下列公理,则称此关系$\leqslant$为 A 上的偏序:

(01) 自反性:对于所有 $x\in A$, $x\leqslant x$.

(02) 反对称性:如果 $x,y\in A$, $x\leqslant y$ 及 $y\leqslant x$, 则 $x=y$.

(03) 传递性:如果 $x,y,z\in A$, $x\leqslant y$ 及 $y\leqslant z$, 则 $x\leqslant z$.

在一个集合 P 上,若能定义一个偏序关系$\leqslant$,则称此集合为偏序集. 在此定义中称集合为“偏”的原因,在于该集合中某些元素的序的问题可以不必考虑.

定义 1.1.2

如果对每一对 $x,y\in A$ 均有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$, 则称集合 A 上的这个关系 $R(\leqslant)$ 为关联的.

根据定义 1.1.1 和 1.1.2, 我们定义:

定义 1.1.3

在集合 A 上的一个关系$\leqslant$, 如果 (a) 它是 A 上的偏序, 而且 (b) 它还满足下列公理, 则称这个关系$\leqslant$为 A 上的全序:

(04) 关联性:每当 $x,y\in A$ 便有 $x\leqslant y$ 或 $y\leqslant x$.

在一个集合 C 上,若能定义一个全序关系,则称此集合为全序集,或简序集,或链.

如上所述,一个集合中的元素本身也可以是集合,幂集就是这类集合中的一种特殊类型.

定义 1.1.4

设 A 为一给定集合. A 的幂集[记为 $P(A)$]是这样一族集合,当 $X\subseteq A$ 时,便有 $X\in P(A)$. 用符号表示为 $P(A)=\{X|X\subseteq A\}$.

例 1.1.1

空集$\varnothing$的幂集是单元集$\{\varnothing\}$.

例 1.1.2

设 $A=\{a,b,c\}$, A 的幂集是:

$$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$$

定理 1.1.1

如果集合 A 恰有 n 个元素,则 $P(A)$ 将恰有 2^n 个元素.

证明: 该定理的一种证法是用表格列出 A 的所有可能子集的数目,如表 1.1.1 所示. 因此,A 的子集总数为 $C_0^n+C_1^n+\cdots+C_n^n$. 由二项式定理可得

$$(1+x)^n=C_0^n+C_1^nx+C_2^nx^2+\cdots+C_n^nx^n$$

表 1.1.1　具有 n 个元素的集合 A 的所有可能子集的数目

A 的一个子集所含的元素个数	子集的数目
0	C_0^n
1	C_1^n
⋮	⋮
n	C_n^n

$$\left(C_i^n = \frac{n!}{i!(n-i)!}\right)$$

其中 x 为实数，n 为正整数．令上式中的 $x=1$，便可求得 $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \cdots + C_n^n = 2^n$，由此定理得证．

该定理的另一种证法更为直观，其证明方法如下：集合 A 的每个元素或者在某个子集里面，或者不在里面．因此，可对 n 个独立元素进行二值选择，即有 2^n 种选择子集的方法．|[1]

有时我们用符号 $(A, \leqslant)$ 表示一个偏序集(或链)，其中 A 是一个集合，而 $\leqslant$ 是 A 中的偏序(或全序)关系．在进行深入讨论之前，我们先来看一些简单的偏序集和链的例子．

例 1.1.3

设 A 是一个集合．集合论中的包含关系 $\subseteq$ 便是幂集 $P(A)$ 中的一个偏序关系，当 A 为一空集或单元集时，它是一个全序关系．

例 1.1.4

另一个偏序关系的典型例子是算术可整除性．设 A 为 100 的所有因子的集合：$A=\{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}$．定义“$x \leqslant y$”为“$x$ 是 y 的因子”，我们可以用关联图(见图 1.1.1)来说明 A 的元素之间的这种关系．显然，关系“x 是 y 的因子”是 A 中的一种偏序关系，而不是全序关系，因为：

2 和 5

4，10 和 25

20 和 50

不满足“x 是 y 的因子”这一关系．

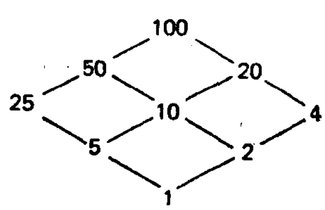

图 1.1.1　例 1.1.4 $(A, \leqslant)$ 的关联图

图 1.1.2　例 1.1.5 $(A, \leqslant)$ 的关联图

例 1.1.5

如果我们仍然定义关系“$x \leqslant y$”为“x 是 y 的因子”，但集合 A 为 8 的所有因子的集

1) | 表示证明完毕．

合，即 $A=\{1,2,4,8\}$，则关系$\leqslant$是A中的一个全序关系，如图 1.1.2 所示.

在一个偏序集A中，设B是A的一个非空子集，且 $b_0 \in B$. 如果对于所有的 $b \in B$，都有 $b_0 \leqslant b$，就称 b_0 是B的最小元；如果不存在 $b \in B$，使得 $b < b_0$，就称 b_0是B的极小元. 一个最小元必定是极小元，但一个极小元不一定是最小元，因为由偏序关系不能推出关联性.

最大元与极大元可以用相应的方式来定义. 根据公理 02，B 至多有一个最小元和一个最大元，但却可以有许多极小元和极大元. 当一个偏序集存在最小元和最大元时，就分别记它们为 0 和 1.

根据偏序的定义，直接可得下列结果.

定理 1.1.2

偏序集P的任一有限子集X具有极小元和极大元.

证明: 设X为一单元集: $X=\{x_1\}$，根据偏序集的第一个条件: $x_1 \leqslant x_1$，则 x_1 既可作为X的极小元，又可作为X的极大元. 如果X含有两个元素: $X=\{x_1, x_2\}$，则有两种可能情况. 一种情况为 x_1 和 x_2 是有关系的（即或者 $x_1 \leqslant x_2$，或者 $x_2 \leqslant x_1$），此时一个是极小元，而另一个是极大元. 另一种情况为 x_1 和 x_2 是没有关系的，此时 x_1 和 x_2 都既可视为X的极小元，也可视为X的极大元. 显然，这个论证过程可类推到X含有 n 个有限元素的情况. |

根据全序集的定义，显然有下列结果.

定理 1.1.3

对于一个链，极小和最小（极大和最大）的概念是等价的. 因此，任一有限链具有一个最小元（第一个元素）和一个最大元（最后一个元素）.

证明: 因为最小元（最大元）必定是极小元（极大元），我们只需证明在一个链中，极小元（极大元）也是该链的最小元（最大元）. 设C是一个链. 根据定理 1.1.2，C具有极小元和极大元. 设 a 是C的极小元（即C中不存在 x，使得 $x < a$）. 根据公理 04，对C中的每一个 x 都有 $x \geqslant a$，因此 a 也是C的最小元. 用类似的方法可证明C的极大元也是C的最大元. |

例 1.1.6

在例 1.1.4 中，考察A的一个子集 B，$B=\{4,5,10,20,25,50\}$，如图 1.1.3 所示. 显然B是一个偏序集，它的极小元为 4 和 5，极大元为 20，50.

须注意，在例 1.1.5 中元素 1 是最小元（第一个元素），而元素 8 是最大元（最后一个元素）.

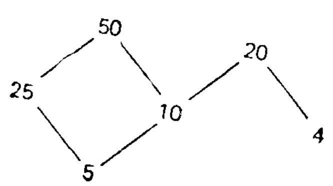

图 1.1.3 例 1.1.6 $(B,\leqslant)$的关联图

定义 1.1.5

设S和T为两个集（代数系统），如果S和T之间存在一一对应的关系，便称这个对应关系为同构，而集S和T称为是同构的，或称一个集同构于另一个集. 如果S到T的对应关系不是一对一的，而是多对一的，则这种对应关系称为

同态，或称 S 同态于 T*.

从定理 1.1.3 可以推出

定理 1.1.4

每一含有 k 个元素的有限链同构于有序集 $N_k=\{1,2,\cdots,k\}$，其中 k 为一正整数。换言之，总存在一个从 k 元链 C 到 N_k 的映射 f.

证明：根据定理 1.1.3，在 C 中存在最小元和最大元. 设 f 映 C 的最小元为 1，映剩下元素的最小元为 2，以此类推. 由于链 C 和 N_k 具有相同个数的元素，故用此方法即可使 C 的最大元映为 N_k 的最大元 k，因此定理得证. ▎

一个偏序集的代数结构可以推广到有序偶的集合.

定理 1.1.5

设 P 是两个偏序集 A 和 B 的笛卡儿积. 偏序关系定义为：

$(a_1, b_1)\leqslant(a_2, b_2)$ 当且仅当在 A 中 $a_1\leqslant a_2$，在 B 中 $b_1\leqslant b_2$

具有几何积偏序关系的集 P 为一偏序集. 更一般地，如果 P 是笛卡儿积 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$，其偏序关系定义为 $(a_1, a_2,\cdots,a_n)\leqslant(a_1', a_2',\cdots,a_n')$，当且仅当在 A_1 中 $a_1\leqslant a_1'$，在 A_2 中 $a_2\leqslant a_2'$，$\cdots$，在 A_n 中 $a_n\leqslant a_n'$，则具有几何积偏序关系的集 P 为一偏序集.

证明：其证明是显而易见的，故从略.

例 1.1.7

设 $A=\{1,2,3\}$ 和 $B=\{4,5,10,20,25,50\}$ 为两个偏序集，其偏序关系定义为算术整除. A 的关联图如图 1.1.4 所示，B 的关联图如图 1.1.3 所示. 具有如上定义的几何积偏序关系的笛卡儿积 $A\times B$ 的关联图如图 1.1.5(a) 所示，建立此关联图的更系统化方法如图 1.1.5(b) 所示. 从这些图中可以看出 $A\times B$ 是偏序集.

现在，我们引入第三类有序关系.

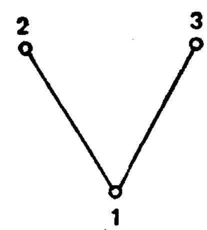

图 1.1.4 例 1.1.7($A,\leqslant$) 的关联图

定义 1.1.6

在集合 A 上的一个关系 $\leqslant$，如果 (a) 它是 A 的全序，(b) 它使 A 的每一非空子集都具有最小元，则称此关系 $\leqslant$ 为 A 的良序.

下面列举几个良序集的简单例子，在第一个例子中，我们将指出全序集不一定是良序集.

例 1.1.8

设 Q，Z，Z_e 和 Z_o 分别是有理数集、整数集、偶整数集和奇整数集. 所有实数的集合 R^1 是算术关系$\leqslant$的全序集，但在 R^1 及其子集 Q，Z，Z_e 和 Z_o 中都没有任何最小元.

* 此处所述不是"同构"及"同态"的严格定义，读者可参考熊全淹编著的《近世代数》一书(上海科学技术出版社 1978 年). ——译者注

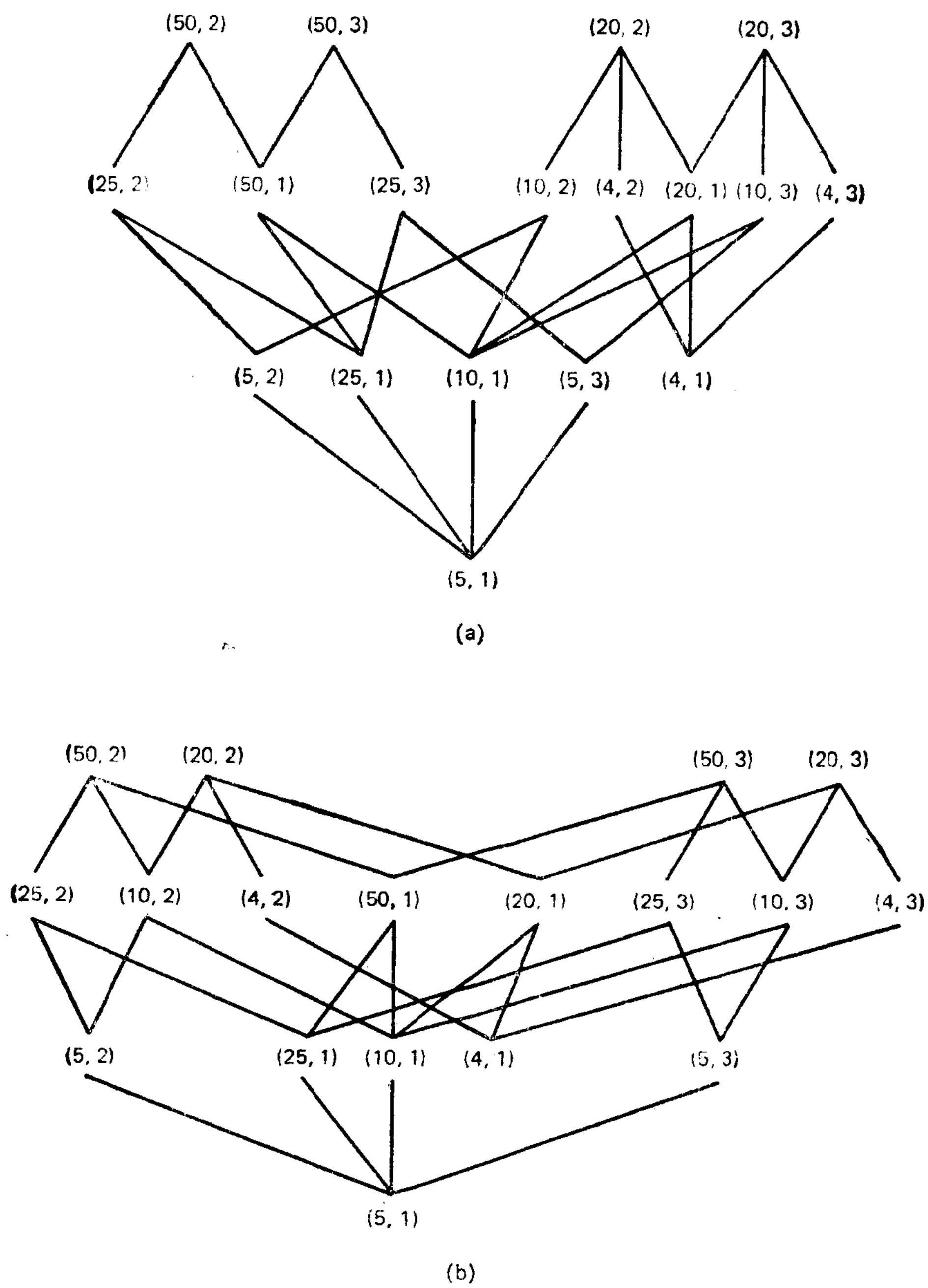

图1.1.5 (a)例1.1.7笛卡儿积 $A\times B$ 的关联图. (b)建立例1.1.7笛卡儿积 $A\times B$ 的关联图的更系统化方法

例 1.1.9

具有算术关系≤的自然数集N为一良序集.

例 1.1.10

具有集合论包含关系⊆的集 $P=\{\{A_1\},\ \{A_1,\ A_2\},\ \{A_1,\ A_2,\ A_3\},\ \cdots\}$ 为一良序集.

需要指出的是,有序集起着连接集合与代数之间的桥梁作用. 为说明这个问题,我们

先讨论下列定义.

定义 1.1.7

设 P 为一偏序集，而 x 和 y 是 A 的两个元素．若有一 P 的元素 b，同时满足 $b\leqslant x$ 和 $b\leqslant y$，则称 b 为 x 和 y 的下界． 若有一 P 的元素 m，对于所有满足 $b\leqslant x$ 和 $b\leqslant y$ 的 b，都有 $m\leqslant x$，$m\leqslant y$，且 $b\leqslant m$，则称 m 为 x 和 y 的最大下界(简写为 g.l.b.)．对偶地，若有一 P 的元素 u，同时满足 $x\leqslant u$ 和 $y\leqslant u$，则称 u 为 x 和 y 的上界．若有一 P 的元素 l，对于所有满足 $x\leqslant u$ 和 $y\leqslant u$ 的 u，都有 $x\leqslant l$，$y\leqslant l$，且 $l\leqslant u$，则称 l 为 x 和 y 的最小上界(简写为 l.u.b.)．

现在，我们定义：

定义 1.1.8

如果 P 的元素 m 是 x 和 y 的 g.l.b.，则称 m 为 x 和 y 的交． 如果 P 的元素 l 是 x 和 y 的 l.u.b.，则称 l 为 x 和 y 的并． 我们将用 $m=x\cap y$ 和 $l=x\cup y$[1] 分别表示 x 和 y 的交与并．

需要说明的是：

1. 对于给定的 x 和 y，若其交或并存在，则它们是唯一的．

2. 交和并是互为有序对偶的． 根据有序对偶定律，只要简单地把关系 $x\leqslant y$ 换为其逆，便可由并的定义得到交的定义．反之亦然．

第二个性质显然可由定义 1.1.7 和 1.1.8 得到． 第一个性质的证明如下：假设 m 和 m' 都是 x 和 y 的交，由定义 1.1.7 可推得 $m\leqslant m'$ 和 $m'\leqslant m$，根据偏序关系的反对称公理，m' 必等于 m．因此，若一个交存在，则它是唯一的．通过类似的方法，可以证明若 x 和 y 的并存在，则它也是唯一的． 我们将用符号 O 和 I 表示偏序集的(唯一的)最小元和最大元(若它们存在的话)．

除上述性质外，还要指出的是交和并的运算满足吸收律：

$$x\cap(x\cup y)=x$$

$$x\cup(x\cap y)=x$$

表 1.1.2 从集合到代数

集合	有序集	代数	
		数或一般符号	整数或有理数
A	x	a	a
B	y	b	b
$\cap$	$\cap$	$\cdot$	$\cdot$
$\cup$	$\cup$	$+$	$+$
$A\cap(A\cup B)=A$	$x\cap(x\cup y)=x$	$a\cdot(a+b)=\text{g.l.b.}[a, \text{l.u.b.}(a,b)]=a$	$a\cdot(a+b)=\min[a, \max(a,b)]=a$
$A\cup(A\cap B)=A$	$x\cup(x\cap y)=x$	$a+a\cdot b=\text{l.u.b.}[a, \text{g.l.b.}(a,b)]=a$	$a+a\cdot b=\max[a, \min(a,b)]=a$

1）某些作者把符号"∩"和"∪"称为"帽运算"和"杯运算".

这些等式的证明将在下一节给出．这里，我们仅利用它们作为例子来说明集合与代数之间的相似性．在连接集合与代数之间的关系时，有序集所起的作用如表 1.1.2 所示．

集合、有序集和代数之间的一些相似的量如表 1.1.3 所示．

表 1.1.3 集合、有序集和代数之间的一些相似的量

量	集 合	有序集	代 数
关系	$\subseteq$：包含关系 $x\subseteq y$ 意即 y 包含 x	$\leqslant$：偏序关系 $x\leqslant y$ 意即 y 后于 x	$\leqslant$：小于等于* $a\leqslant b$ 意即 b 大于或等于 a
运算	$\cup$：并 $x\cup y$ 意即所有或是 x，或是 y 或是二者共有的元素组成的集合	$\cup$：并 $x\cup y$ 意即 x 和 y 的最小上界	$+$：最小上界 (l.u.b.) $a+b$ 意即 a 和 b 的最小上界
	$\cap$：交 $x\cap y$ 意即所有既属于 x 又属于 y 的元素组成的集合	$\cap$：交 $x\cap y$ 意即 x 和 y 的最大下界	$\cdot$：最大下界 (g.l.b.) $a\cdot b$ 意即 a 和 b 的最大下界
元素	A 全集	I 最大元	1 最大数
	ϕ 空集	O 最小元	0 最小数

* 原文为 "*inequality*"（不等于），这里译为"小于等于"．——译者注

练 习 1.1

1. 证明偏序集的任一子集本身也是一个偏序集，其偏序关系相同．
2. 设 R 为集合 A 上的一个二元关系．R 的逆，记为 $\bar{R}$，定义为：如果 $x,y\in A$，则当且仅当 yRx 时，$x\bar{R}y$．证明任一偏序的逆本身也是一个偏序．
3. 证明若集合 A 具有 n 个元素，则 $\underbrace{P(P\cdots(P}_{m}(A)\cdots)$ 恰有 $\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2^n}}}}}_{m}$ 个元素．
4. 设 A 和 B 为两个集合．
   (a) 证明：$P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$
   (b) 指出下列关系是否正确？
   $$P(A)\cup P(B)=P(A\cup B)$$
5. 证明一个链的任一子集仍为一个链．
6. 证明任一全序的逆本身为一全序．
7. 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 为一偏序集．证明由 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant a_1$ 可推出 $a_1=a_2=\cdots=a_n$．
8. 画出下列各偏序集的关联图：
   (a) 16 的正整数因子的集合，其偏序定义为整除．
   (b) 24 的正整数因子的集合，其偏序定义为整除．
   (c) 不超过 12 的偶正整数，其序关系仍为整除．
9. 设 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 为平面上两个点．两个点的序定义为当且仅当 $x_3\geqslant x_4$ 及 $y_3\geqslant y_4$ 时，$(x_3, y_3)\geqslant(x_4, y_4)$，这样的两个点所构成的集合其最小上界是什么？
10. 设 $S=\{1, 2, \cdots, 10\}$，并设 ρ 为 S 上的一个二元关系，它定义为当 $2a>b$ 时 $a\rho b$．(S,ρ) 是偏序集吗？为什么？若 $X=\{1,2\}$，则 $\{X,\rho\}$ 又如何呢？

11. 设 $(A, \leqslant)$ 为一偏序集. 偏序集 $(A, \geqslant)$ 称为偏序集 $(A, \leqslant)$ 的对偶,其中$\geqslant$为$\leqslant$的逆关系. 证明若两个偏序集是自对偶的,则它们的笛卡儿积偏序集也是自对偶的.
12. 证明两个链(其中每一个都包含两个或两个以上元素)的笛卡儿积不可能是链.
13. 证明每一个可数的无限链同构于自然数集.
14. 举例说明,不是每一个无限链都是自对偶的.
15. 证明 12 的正整数因子所组成的偏序集与 45 的正整数因子所组成的偏序集同构.
16. 设R为A中的一个关系,如果满足下列条件,R便是A中的一个等价关系:

  (1) 对于所有的 $x \in A$, xRx (R是反射的).

  (2) 对于所有的 $x, y \in A$, 如果 xRy, 则 yRx (R 是对称的).

  (3) 对于所有的 $x, y, z \in A$, 如果 xRy 和 yRz, 则 xRz (R 是传递的).

  证明偏序集之间的同构是一个等价关系.
17. 如果 $(A, \leqslant)$ 为一良序集,且 $B \subseteq A$,则 $(B, \leqslant)$ 为一良序集.
18. 设 A_1 和 A_2 为两个非空集, R_1 和 R_2 分别为 A_1 和 A_2 上的两个良序关系. 如果存在一个满足下列条件的由 A_1 到 A_2 的函数 f,则称 (A_1, R_1) 相似于 (A_2, R_2):

  (1) A_1 和 A_2 在映射 f 下是同构的.

  (2) 如果 xR_1y, 则 $f(x)R_2f(y)$.

  考察两个在映射 f 下的相似系统 (A_1, R_1) 和 (A_2, R_2). 证明:

  (a) 如果 a 是 A_1 中的最小元,则 $f(a)$ 是 A_2 中的最小元.

  (b) 如果 b 是 A_1 中的最大元,则 $f(b)$ 是 A_2 中的最大元.

  (c) 如果 (A_1, R_1) 是良序集,则 (A_2, R_2) 也是良序集.

1.2 格及其基本性质

由于这一节所涉及的主要是有序集的代数形态,故我们将用$\cdot$和$+$来表示交($\cap$)和并($\cup$)运算. 还将用 x, y 和 z 表示有序集的一般元素,用 a, b 和 c 表示特殊元素.

根据上节所引入的交和并的定义(见定义 1.1.8),我们有

引理 1.2.1

在任一代数偏序集A中,A的两个元素的交和并(若它们存在的话)具有下列性质:

$$x \leqslant y \qquad \text{当且仅当 } x \cdot y = x \text{ 与 } x + y = y$$

该性质通常称为相容性.

证明: 其证明是显而易见的,故从略.

下列定理陈述了偏序集的交和并的性质.

定理 1.2.1

在任一偏序集A中,A的两个元素的交和并的运算(若它们存在的话)满足幂等律、交换律、结合律和吸收律,即对A中所有的 x, y 和 z 恒有:

(a) 幂等律 $L1.$: $x \cdot x = x$