计算机科学数学

花栅 编著

哈尔滨船舶工程学院出版社

计算机科学数学

花 栅 编著

哈尔滨船舶工程学院出版社

（黑）新登字第9号

内 容 简 介

本书是为工学硕士学位课而编写，内容包括组合论、优化论、排队论，删除极个别章节后，用54学时（每学时50分钟）讲授完毕。书中列举了大量的问题、例题、习题和解答，用多种方法求解，使读者能掌握组合论、优化论、排队论观察问题和解决问题的思想和方法。本书内容丰富，论述清晰易懂，对于工科专业的读者是一本适用的入门书，可作为计算机、通讯、自动控制等专业研究生或高年级本科生的教材，对于相应部门的工程技术和研究人员也是一本有用的参考书。

计算机科学数学

花 栅 编著

责任编辑 金 英

*

哈尔滨船舶工程学院出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

毕 升 电 脑 排 版 有 限 公 司 排 版

哈 尔 滨 工 业 大 学 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.75 字数 260 千字

1994年9月 第1版 1994年9月 第1次印刷

印数：1—2000册

ISBN 7-81007-469-5

TP·19 定价：9.50元

前　言

前几年，为了研究生的理论教学，并把数学列为学位课，作者提出以三论作为该课的内容，即组合论、优化论、排队论，取名为“计算机科学数学”，并讲授至今。

几年来，本课程首先使同学们发现并获得解决问题的新思想和新方法，普遍有新奇感和趣味性。其次，使用讲授内容和书本知识，去求解习题中的问题。再次，此课内容对学生练习思考大有帮助，而且使学生在以后的学业中和工作上派上用场。因此，作者编写本书的动力，至少有一半来自学生，在此，谨向我的学生们致以深厚谢意。

作者非数学专业出身，至今仍不习惯过份抽象而又形式化的纯数学描述，本书只提供基本思路和基本方法，所以，这是一本入门的书，充其量只够“计算机科学数学入门”的资格，但是并不回避推导的细节，罗列例题，尤其强调构造、计算、编程上机。

第一篇组合论，在差分方程的母函数解法，在集合划分和整数划分的构造，在组合的构造，费了较多笔墨。第二篇优化论，只限于组合优化，主要介绍动态规划和分支定界两种方法，以及匹配和指派问题的求解，其中二次指派问题是现成的解法，作者将之细化，使读者能完整掌握。第三篇排队论，更是入门性介绍，主要是把现成的东西，有的加以说理，有的加以详细推导，在M/M/1

队列中强调到达过程，在 M/G/1 队列中强调离去过程，只讨论这两种队列，使读者对排队论有初步认识，就算达到目的。概率统计是排队论的基础，这为工科学生提供一次复习和应用的好机会。

最后，作者诚挚感谢哈尔滨船舶工程学院出版社，给了我这次出书的机会，同时，向辛勤的编辑和印刷职工致敬。

花　栅

1992 年秋于哈尔滨

目　录

第一篇　组　合　论

第二篇 优 化 论

第三篇　排　队　论

第一章 绪 论

写作绪论的目的，是就本书涉及的三大部分，即第一篇组合论，第二篇优化论，第三篇排队论，先作粗略而简明的介绍，以便由初见端倪，到发生兴趣，进而发展下去，欲究其竟。即使对于不以全书知识为目的的旁观者，如果读了这篇绪论，还有一点收获的话，绪论也就尽了它应尽的广泛社会义务，这就是向社会普及科学知识。从这个意义上说，本绪论力求相对完整而独立。

1.1 组合论的研究内容和方法

组合论是研究物件有规律性的安置问题。物件为可数的个数，即 0，1，2，…等等，令物件个数为 n，其取值范围，广义地说，可认为 n 从 0 到 ∞。相应地，令物件安置的方法数为 U_n。由 n 的变化，引起一个数列 $\{U_n\}$。按照要求的安置规律，找出 U_n 的变化规律，进而解出 U_n，这就是组合论的基本任务之一。如何将此类客观现象，即物件的有规律性安置，转化为数学问题，就须建立数学模型。能否建立，建立后能否求解，解答是否符合客观现象的规律，这就是组合论（combinatorics）要研究的第一个问题，即存在性问题（existentiality）。解决这个问题所涉及的方法很多，就本书而言，是将差分方程视作组合论的基本方法，因为它既能描述 U_n 的变化规律，又能解出 U_n。同时，其他方法，例如杨辉三角、母函数、种种原理、形式变换等等，不是导源于差分方程，就是其结果都可用差分方程描述。这个结论，其实已隐含在我们申

明的“有规律性的安置”之中，所以并不奇怪。混沌无规决不是我们的出发点。但最关紧要的，还是在于人们正确理解下的思维活动，判断现象是不是组合论所能解释的问题，这是最为困难的第一步。现举一例说明。乒乓球比赛，无论个人或团体，都有所谓三局二胜制、五局三胜制、九局五胜制。现在问，一场比赛下来，究竟有多少种可能的结局形式？为了回答这个问题，先设有甲乙两人或两队，甲胜一局用 0 表示，乙胜一局用 1 表示。再定义 n 为结局所需最多局数，n 必须是奇数；k 为结局所需局数，$\frac{n+1}{2} \leqslant k \leqslant n$；$U_{n,k}$ 为相应 n，k 条件下的结局个数；U_n 为结局的总个数。则有下表情形。

n	1	3		5			7
k	1	2	3	3	4	5	
	0	00	010	000	0010	00110	
	1	11	100	111	0100	01010	
			101		1000	01100	
			011		1101	10010	
构					1011	10100	
					0111	11000	
						11001	
造						10101	
						10011	
						01101	
						01011	
						00111	
$U_{n,k}$	2	2	4	2	6	12	
U_n	2	6		20			

请看，当 $n=1$ 时，只有两种可能，不是甲胜，就是乙胜。这

里，我们把胜败看成“物件”，把时间上的先后看成空间上的位置，而加以“安置”。当 $n=3$ 时，00 表示甲先胜两局，11 表示乙先胜两局，均可结局；010 表示甲先胜一局，然后输一局（即乙胜一局），最后再胜一局，以甲胜结局；其余按此类推。显然有以下关系式

$$U_n = \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} U_{n,k}, \qquad U_{n,\frac{n+1}{2}} = 2$$

如 $n=5$，则有

$$\begin{aligned} U_5 &= U_{5,3} + U_{5,4} + U_{5,5} \\ &= 2 + 6 + 12 = 2(1 + 3 + 6) \end{aligned}$$

由杨辉三角①

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&\underline{1}&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&\underline{1}&&&&&&& \\
&&&&&&1&&\underline{2}&&\underline{1}&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&\underline{3}&&\underline{1}&&&&& \\
&&&&1&&4&&\underline{6}&&\underline{4}&&\underline{1}&&&& \\
&&&1&&5&&10&&\underline{10}&&\underline{5}&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&\underline{20}&&\underline{15}&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&\underline{35}&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&\underline{70}&&56&&28&&8&&1
\end{array}$$

可知 $U_{5,3} = 2\binom{2}{2}$，$U_{5,4} = 2\binom{3}{2}$，$U_{5,5} = 2\binom{4}{2}$

$$\begin{aligned} U_5 &= U_{5,3} + U_{5,4} + U_{5,5} \\ &= 2\left[\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2}\right] = 2\binom{5}{3} = 2 \times 10 = 20 \end{aligned}$$

---

① 杨辉是我国宋朝数学家，他在 1261 年发表的《详解九章算法》中，首次提出我们现在称之为“杨辉三角”的图形，他比欧洲人发现的所谓“Pascal 三角”，至少早 300 年。

同理 $U_7 = U_{7,4} + U_{7,5} + U_{7,6} + U_{7,7}$

$$= 2\left[\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}\right] = 2\binom{7}{4} = 2 \times 35 = 70$$

$$U_9 = U_{9,5} + U_{9,6} + U_{9,7} + U_{9,8} + U_{9,9}$$

$$= 2\left[\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4}\right]$$

$$= 2\binom{9}{4} = 2 \times 126 = 252$$

其中有关的数，用下横线标明在杨辉三角中。一般言之，得到如下结果

$$U_{n,k} = 2\binom{k-1}{\frac{n-1}{2}}, \quad n = 1,3,5,\cdots, \frac{n+1}{2} \leqslant k \leqslant n \quad (1.1)$$

$$U_n = \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n} U_{n,k} = 2\binom{n}{\frac{n+1}{2}} \quad (1.2)$$

由此可见，认定杨辉三角，是解决此问题的妙招，因而证实此问题确实存在而可解，这一步是很费思考的。当然，这个两人（或队）比赛结局问题，是相当简单的问题。问题越复杂，其存在性问题的难度将越大。

组合论要研究的第二个问题，是计数问题（counting）。既然客观现象存在于组合论中，那么，就要设法用一定的公式或算法，把既定规律的物件安置方法，究竟有多少种告诉人们，使人们知道 n 以后，就能利用公式或算法算出安置方法数 U_n。同时，提示人们，当 n 不断增长时，U_n 会达到如何大或如何小的程度，避免人们陷入盲目境地。对于上述例，其计数问题的解答，就是（1.1）和（1.2）两式。还可以列成数值表，如下所示。

n \ k	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}+1$	$\frac{n+1}{2}+2$	$\frac{n+1}{2}+3$	$\frac{n+1}{2}+4$	$\frac{n+1}{2}+5$	U_n
1	2						2
3	2	4					6
5	2	6	12				20
7	2	8	20	40			70
9	2	10	30	70	140		252
11	2	12	42	112	252	504	924
⋮			…………				⋮

根据杨辉三角，将（1.2）式写成

$$U_n=\begin{pmatrix} n+1 \\ \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}=\sum_{r\geqslant 0}\begin{pmatrix} \frac{n+1}{2} \\ r \end{pmatrix}^2\geqslant\frac{2^{n+2}}{n+3},\quad n=1,3,5,\cdots \tag{1.3}$$

由（1.3）式得下表。

n	1	3	5	7	9	11	13	…
$\begin{pmatrix} n+1 \\ \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}$	2	6	20	70	252	924	3432	…
$\frac{2^{n+2}}{n+3}$	2	5.33	16	51.2	170.67	585.14	2048	…

（1.3）式暗示我们一个有趣的结论：两人对局，如果互不认输，没完没了地对下去，其结局的可能形式，将无穷尽，越对越不可收拾。从（1.1）式的右节可写出

$$2\begin{pmatrix} k-1 \\ \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} k-2 \\ \frac{n-1}{2} \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} k-2 \\ \frac{n-1}{2}-1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\binom{k-2}{\frac{n-1}{2}} + 2\binom{k-2}{\frac{(n-2)-1}{2}}$$

而上式的左右节对应为

$$U_{n,k} = U_{n,k-1} + U_{n-2,k-1},$$

$$n = 1,3,5,\cdots,\quad \frac{n+1}{2} < k < n \tag{1.4}$$

这就是$U_{n,k}$的递归关系式，或称差分方程，此方程的解正是$U_{n,k}$。对同一问题，从不同角度去理解，以不同方式去推理，以不同的形式去描述，都是可以的，但结果应该一致。

组合论要研究的第三个问题，是构造问题（construction）。所谓构造，就是安置的具体化，在计数问题解答所得的所有可能安置情况个数中，要将物件具体地安置到位。例如，在比赛结局的例子中，有$U_{5,3}=2$，$U_{5,4}=6$，$U_{5,5}=12$。对于$U_{5,3}$的构造是显而易见的。对于$U_{5,4}$的构造，就是要在$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$四个位置中，安置三个 0，或三个 1。由于决胜局确定在第四局，我们只须在前三局内，安置两个 0，或两个 1，各有$\binom{3}{2}$种方法，具体构造是$\boxed{0}\boxed{0}\boxed{\ }\boxed{\ }$，$\boxed{0}\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{\ }$，$\boxed{\ }\boxed{0}\boxed{0}\boxed{\ }$，再在第四局补以 0，其余位置补以 1，即 0010，0100，1000。同理构造三个 1 的安置，即取反码，得到 1101，1011，0111，总共是六个构造，合于$U_{5,4}=2\binom{3}{2}$。对于$U_{5,5}$的构造，是在五局中安置三个 0 或三个 1，除决胜局外，应在前四局中安置两个 0 或两个 1，各有$\binom{4}{2}$种选择，即 12、13、14、23、24、34，在此各局标以 0（或 1），在末局补 0（或 1），其余各局补以 1（或 0）。共有$2\binom{4}{2}$个构造，合于$U_{5,5}$的计数。此例的计数与构造，可谓交互配合，相得益彰，达到完美程度。要解决

实际问题，一定要拿出具体构造，这是不容怀疑的。比如，上述比赛结局问题，如果拿不出全部构造，就会使运动员和教练员不能有效地施展致胜策略，不利于预定方案和临场发挥。但是，在许多组合论问题中，计数与构造，各有各的难处，各有各的用途。顺利解决了计数问题，不一定就很容易取得构造。这里强调以计数致用，那里又着重以构造去解决问题。姑且说，组合论要指导实践，要推向实用，计数与构造都是核心问题。

组合论要研究的第四个问题，是优化问题（optimization）。注意，这里所谓的优化，并不是泛指一切优化，而是说，所优化的对象是由组合论已得到的构造，在一定约束条件下，选取其中一种构造，使目标函数达到极大或极小。例如，在上述比赛结局问题中，根据对方和我方的条件，环境条件，临场变化，选取和调整结局方案（即构造），以利于我方，就成为组合论中的优化问题。稍加形式化描述如下：

给定一个组合论中构造的有限集合

$$Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$$

在约束条件下，决定一个 y_i，使得目标函数 $f(y_i)$ 极大或极小，或谓最优。

本书将优化问题独立为一篇，名义上是优化论，实质上只讨论组合论中的优化问题。

总而言之，组合论要研究和解决四大问题：存在、计数、构造、优化。

1.2 优化论的研究内容和方法

本书限制在只研究组合论中的优化问题，因为与组合论紧密联系，严格地说，这叫做组合优化（combinatorial optimization）。

它是以计数和构造问题已解决为前提，以约束（constraint）为条件，以目标函数（objective function）最优为目的，以搜索到一个最佳构造为结果。计数和构造决定了问题的性质和范围，警惕人们不要盲目从事。主体构造进入客体环境而出现互相制约，同时为问题求解提供一个潜在的较小区域，这两方面在实际上都是不可缺少的，其集中表现就是约束条件。目标函数是构造显示出来的价值或价格，构造扮演自变量的角色，影响目标函数起伏变化，使目标函数处于局部最大（或最小）或全局最大（或最小）的那个构造就是最佳构造，或称问题的最优解。寻找最优解的过程，简称寻优，是随着问题的不同，而方法各异，但有一个共同点，这就是，一般地说，不是用公式计算一步到位，立得结果，而是一个逐点搜索过程，一个逐步逼近过程。这倒不是说，没有公式，或不能用公式，而是说，如果用简单的公式，就意味着要遍历所有可能的构造，即所谓枚举（enumeration），比较目标函数值而寻优。这是一个十足的搜索过程。搜索路径的长度就等于全部构造的个数，亦即组合论中的计数值。另一方面，如果用复杂公式，就得首先问有无这样的公式，建立这样公式的可能性有多大。实际问题牵连的因果关系很多，企图用一个万能公式立即算出最优结果，往往是徒劳的。取而代之的，是用算法实现寻优。所谓算法，就是灵活变化地处理问题的步骤，它既不是刻板的公式，也不象治病的处方，倒不如说它是某种解题思想的活化、具体化、步序化。能保证方便快速准确地获取优化结果的算法，才是好算法。

"优化组合"是社会生产活动中提出来的问题，现在让我们从组合论中优化技术的角度来加以考察。设集合 S 拥有成员 n 个，即 $|S|=n$，欲将其划分成 k 块，用 $P(n,k)$ 计数其方法个数，[①]则有

---

① 集合划分是一种客观现象，它属于组合论研究的范围，(1.5)式的导出将在以后章节中提及。