高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

（一）

第一卷 分析基本方法

（初稿）

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

612

高等学校教学用书

高 等 数 学

GAODENG SHUXUE

（一）

第一卷　分析基本方法

（初稿）

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

[redacted]

高等数学(一)是南京大学数学天文学系在教学改革中集体編成的一部主要基础課程的新教材。它是把以往的解析几何、数学分析、微分几何、变分法、复变函数論、实变函数論和泛函分析等七門課程中的有用的內容和若干新添的材料，結合起来的整体。全书共分四卷；分析基本方法、分析基本原理、复数分析与現代分析。第一卷分析基本方法包括函数关系、极限和导数、积分法与簡单微分方程、定积分、空間解析几何、多元函数的微分学、重积分、綫积分与面积分場論大意等八章。

本书可作为綜合大学数学、計算数学、力学等专业的教材。其他如物理、化学、气象等专业以及工科大学等均可参考。由于講解偏重直观，对目前广大中等学校教师来說，也有較大的参考价値。

高 等 数 学

(一)

第一卷 分析基本方法

(初稿)

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺7号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第2号)

外文印刷厂印装 新华书店发行

統一书号 13010·885 开本 850×1168 1/32 印張 10 5/16

字数 243,000 印数 90001—25,000 定价(6)¥1.00

1960年10月第1版 1960年10月北京第1次印刷

序　言

自从陆定一副总理在全国人民代表大会二届二次会議上做了“教学必須改革”的报告以来，南京大学数学天文学系的全体师生在党的領导下，展开了轰轰烈烈的教学改革运动。由于大家解放了思想，明确了方向，打破了旧框框，消除了顧虑，采取了反复討論，虛实并举，以虛带实的工作方法，訂出了新的教育計划和教学大綱，并且发动了广大师生根据我国建設需要，以及总路綫和大跃进的精神集体編写成功两部教材“高等数学(一)”和“高等数学(二)”向江苏省文教群英会和全国文教群英会献禮。

“高等数学(一)”是把以往的解析几何，数学分析，微分几何，变分法，复变函数論，实变函数論和泛函分析等七門課程中的有用內容和若干新添进去的材料，有机地結合起来的一門新課程。它的任务就是：培养学生具有較雄厚的分析学的基础知識。它与以方程为中心的“高等数学(二)”及物理学同时講授，构成了新的教育計划中的三門主要基础課程，它們本身各有其自身的任务，但是彼此又有密切的联系。全书共分四卷。第一卷：分析基本方法，从解析几何起，講到綫积分，面积分为止，主要是培养学生掌握微积分学的基本方法。講述概念时着重从直观上来了解、暂不涉及分析学的严謹理論。这样，既可以使学生在学习分析基本原理以前具有一定的感性知識和直观能力，并且也为物理学及“高等数学(二)”的教学提供了必要的微积分学的基本知識，同时也便于将来把这一部分內容下放到中学里去。第二卷是分析基本原理，它是在第一卷中大量感性知識的基础上，对古典分析中的一些主要的基本概念和理論做比較深入的介紹。在这一卷的某几章里，我們初步

做了"实复結合"的尝試。这样，既可以使学生对有关內容有一整体了解，又可节省講授时間。此外，在第二卷中还增添了理論上和应用上都比較重要的漸近方法一章，第三卷是复数分析。它是在第二卷的基础上进一步探討解析函数的基本性質和橢圓函数，并且增添了对研究微分方程等学科有用的多元复变函数的基本知識，以及在解决实际問題中常用的保角映射的近似計算。第四卷为现代分析，其中包括測度与积分，函数逼近論初步和泛函分析等內容。函数逼近論初步系新增添的內容，它不仅对数学的其他分支，而且对其他科学技术都有較大的作用。在泛函分析中还增添了广义函数論初步。此外，在全书中都将一些常用的、行之有效的数值解法滲透到有关的內容中，尽可能使古典分析，数值分析，現代分析等結合起来，形成一个有机的整体。

本书在編写过程中，还特别注意到貫徹理論联系实际的精神，講解主要概念时，注意交待来龙去脉。大跃进以来，校內外的某些联系实际的研究成果也适当的納入教材之中。此外，对于如何与其他課程如高等数学(二)，物理学……等等的配合問題，我們也予以适当的安排和注意，以免产生重复或脫节的現象。

自然，这部教材还是剛剛編成，由于我們的思想水平和业务水平都还不高，其中一定会有許多考虑不周，照顧不够，安排不当，深淺不适宜的地方，我們非常乐于接受来自各方面的批評和建議，以求将来把这部教材編写得更完善，更适合教学的需要。

南京大学数学天文学系

一九六零年五月

目录

緒　論

第一章　函数关系

第二章　极限和导数

第三章 积分法与简单微分方程

第四章　定积分

第五章　空間解析几何

第六章 多元函数的微分学

第七章 重积分

第八章 曲綫积分、曲面积分、場論大意

緒　論

1. 数学研究的对象和目的

認識客观世界的規律性，从而达到改造客观世界的目的，是研究一切科学的共同目的，数学当然也不能例外。数学是研究現实世界中的空間形式和量的关系的科学，它在各門科学中占有特殊的地位。我們知道三本书和五本书放在一起，总共有八本书，三支笔和五支笔放在一起总共有八支笔。在数学的研究中却把“书”，“笔”，等具体事物的具体內容暫时撇开，单純从量上来考察，得出一种抽象的量的关系：三加五等于八。由此可見，数学和其他自然科学及社会科学不同，它不是以具体的自然現象或社会現象为其直接研究对象而是以从各种自然現象或社会現象中抽象出来的空間形式和量的关系为其直接研究对象。但是，这些空間形式和量的关系其实也是和有关的具体事物的質分不开的，因为数量的改变到了一定阶段便会引起質的变化。另一方面，为了要研究事物的質的变化，也有必要通过其量的变化来加以了解。因此，如果由于数学研究的对象只是現实世界中抽象的量的关系和空間形式，因而便可以完全脫离具体事物的質，这样的看法也是不恰当的。

2. 数学的特点

数学的特点之一便是高度的抽象性，这一特点，即使在簡单的四則运算中也就表現出来；例如，算式 $3+5=8$ 可以完全离开具体实物来进行，在求一函数的导数时也可以不問它是曲綫的斜率或者是运动的速度，問題在于，任何客观事物都有量的共同特征，而这些特征可以在数学上用数部分地反映出来。概念本身就是一个抽象。数学上，球，曲綫，空間等概念同样是客观事物在外形上的

理想化的概括結果，任何具体的球都不可能完全滿足数学上球的定义。具体的无粗細的曲綫是不存在的，特别是 n 維空間乃至无限維空間更是高度抽象化的結果。

数学的另一个特点便是应用的广泛性。正是如此我們才不至于陷入以"高度抽象"，"絕对严格性"为荣的"純粹数学"的泥坑中。理論与实踐本来就是統一的。数学正因为在科学技术上的巨大作用而得到日益丰富的发展。分析学，微分方程等对近代物理学，天文学，重大工程，星际航行等方面的作用是大家所熟知的。計算技术，自动化問題，气象預报，国民經济等則无疑地都需要数理邏輯，計算数学，数理統計，概率論等知識，离开了近代数学，現代尖端技术将很难得到发展。現在在深入貫彻党的教育工作方針时，数学工作者已为解决生产实际問題作出了不少范例，即使在生活中也处处应用到数学。当然，发揮数学的这一特点，受惠的不仅是实踐，数学本身也将在实踐的影响下大大发展起来。

3. 数学的发展和生产实踐的关系

馬克思主义者認为一切知識都依賴于生产实踐，只有生产实踐才是一切知識的源泉，数学科学当然也是如此。从历史发展上来看，数的概念起源于計数。人們在生产活动及实际生活中需要对若干同类的事物加以比較多少，因而便产生了計数的概念。这样便产生了所謂自然数，在这个基础上，便发展起初等数学。到了十五世紀以后，欧洲的資本主义逐漸有所发展，由于航海、采矿、修筑运河等需要，必須研究各种力学，因而需要用数学表达运动規律，这样便給微积分学的誕生創造了必要的物质基础。到了十九世紀，由于生产有了进一步的发展，要求数学科学能够更加深刻地反映現实世界中的量的关系和空間形式，因而数学日益取得更加抽象的形式。同时数学的各个分支也逐漸增多起来，这些分支有着自己的研究方向，同时又互相联系形成数学科学的整体。例如微

分方程論，概率論和数理統計，計算数学，数理邏輯，函数論等中的很多影响很大的新方向都是由于生产实踐的需要而引起的。及至有了快速电子計算机以后，不仅对計算数学引起了一次革命性的变革，就是对数学的其他分支，也起了很大的推动作用。从当前我国社会主义建設实际看来，問題則更加清楚。正因为我国建設事业的飞速发展，生产任务带动了数学科学大踏步前进。例如在微分方程、計算数学、概率論等学科方向，虽然，我国过去的基础十分薄弱，甚而在有些方面，过去完全是空白点，但是近年来，由于生产建設的迫切需要，已經建立了一定的基础。

总的說来，数学的发展是依赖于生产实踐的，但这并不等于說：其发展过程中的每一步驟，都是受了生产实踐的推动。有时在其发展的一定阶段中，数学的发展也可以走在生产实踐的前面，走在其他自然科学的前面，为它們做好理論准备。例如，群論，非欧几何学等的誕生便是如此。但是，如果从而就得出結論，認为数学的发展可以完全脱离生产实踐，这便是完全錯誤的了。我們認为，数学的发展归根到底依賴于人类的生产实踐，生产实踐也是檢驗数学知識的最后标准。但是，在历史发展的一定阶段上，数学的发展可以走在生产实踐的前面，对生产实踐起一定的理論指导作用，这样辯証的相互关系，是完全符合事物本身发展規律的。

4. 大跃进以来我国数学界的思想情况

长期以来，我国数学界存在着許多不正确的观点。有人認为数学发展是遵循着理論——理論——理論的途徑。有人認为数学不一定要联系生产实踐，而是有其自身的規律性，数学自身內在的矛盾的不断解决就发展了数学，这实質上是从理論到理論的資产阶級观点。也有人認为，数学理論只能間接为生产服务，甚至認为解决生产实际問題会降低数学研究的水平，并且还錯誤地認为，目前生产水平还不高，联系生产实际得不到什么結果，大跃进以来的

事实駁倒了这些謬論。

自1958年进行教育革命，貫徹党的教育工作方針以来，南京大学数学天文学系的师生在党的領导下，和全国各地数学工作者一样，走出校門，深入各生产部門，进行了广泛联系实踐的挂鉤活动，在短期內解决了105項生产实际中提出的数学問題，扭轉了数学教学和研究脫离实际的傾向，奠定了数学理論为生产服务的良好开端，随后大大促进了数学教学改革，发展了新的学科如計算数学、概率論、微分方程等。所有这些成績都是在党的領导下大搞群众运动中所取得的。今后我們应該更加坚定地走实踐——理論实踐的道路，为我国社会主义建設貢献出力量。

5. 研究数学的正确途徑与我国当前数学发展的五大方面

如上所述，我們研究数学的目的乃是为我国的社会主义建設服务，为飞速发展着的生产建設服务。因此，数学工作者只有深入到生产实际中去，才能获得大量的研究課題，然后加以研究提高，再用之于实踐，这样才是发展数学的唯一的正确途徑。自1958年大跃进以来，已經有无数的生动事例說明了这条道路的正确性，在今年二月所召开的全国数学会第二届会員代表大会上已經明确指出了今后我国数学的发展将以尖端技术，重大工程中的数学問題，国民經济中的数学問題，自动化問題中的数学問題，現代物理中的数学問題以及大量計算等五大任务为綱，带动其他一切方面，全国数学工作者已經面临着一个偉大的历史任务。我們相信，在党的領导下，数学工作者面向生产实踐，研究数学理論以解决五大任务为目的，在不久的将来，必将获得巨大的成績，培养自己成为旣掌握丰富的生产实际知識又通曉深厚的数学理論的現代数学家。

第一章　函数关系

§1. 量和数

1.1 量和数　量是客观存在，研究量的关系是数学的任务。由于量的存在，人通过实践便逐漸产生了数的概念。数是用来表示量的，从量到数是一个数学抽象的过程。虽然量是数的基础，数的概念来自客观存在的量，但在形成数的概念过程中，各种各样的量的具体特点却逐渐被抛弃了，而数仅仅从量的某一共同的方面反映了量。这种抽象过程是数学抽象的一个范例，而量的普遍存在乃是数学应用广泛性的基础。現在我們就这种抽象过程簡单說明于下。

自然数的概念发生較早，今先以自然数“1”为例。在人們的周圍存在着大量的单个的物体，例如，一头牛，一棵树，一块石子，一根木棒等等。在人們对这些各种各样的量經过了长期的观察，并进行了一些分析与綜合的工作，便逐渐摆脱了牛的动物特点，树的植物特点，石头的矿物特点以及大小，輕重，长短，顏色等特点，最后，便产生了数“1”的概念。和这种情形相仿，在长期考察了各种各样的由两个单一物体构成的集合以后，便逐渐产生了数“2”的概念。数 3，4 等的概念的产生也都如此。在識数的过程中，計数占有重要的地位。所謂計数实际上就是将一物体集合和一定的集合——例如手指——成对应。两个集合中物体的个数相同时，我們一定可以把这两个集合中的物体两个两个对应起来。自然数的概念便建筑在物体集合之間的这种对应关系上面。自然数便反映了某些物体集合之間能够建立这种对应关系的一种共性。在計数法中，

世界各国大都采取十进制的事实是和人类有双手十指分不开的。有了自然数便可以把一些量表示出来。在人类的日常生活中，不仅需要数，而且还需要对于数的运算。四則运算是最基本的运算。由于运算便又产生了新的矛盾。例如，小数不能减大数，自然数相除有除不尽的情形。要解决这个矛盾就得引进整数和有理数，从而扩大了数的范圍。就四則运算而論，新的矛盾得到了解决，好象有理数系已經完美无缺了。但是，用数表示量的問題却仍然沒有得到完全的解决。一个最典型的例子便是单位正方形的对角綫的长度就不能用有理数来表示。要解决这个問題便得引进新数——无理数。有理数和无理数合在一起便构成实数系。

什么是无理数？我們知道有理数是$\frac{p}{q}$型的数，p和q（$\neq 0$）都是整数。可以証明任何有理数都可以表成有限小数或循环的无限小数。例如，$\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$。不循环的无限小数所表示的数便叫做无理数，例如$\pi$、$\sqrt{2}$便都是无理数。

有了实数，在某种意义上說用数表示量的問題便解决了，例如，任何綫段的长度在选定单位后都可以用一个实数表示出来。

1.2 数学归納法 数学归納法是有关自然数的一个公理，由于常常要用到它，我們想在这里特别說明一下。

設E为满足某些条件的自然数所組成的一个集合。今已知：

1) 1在E中。

2) 若n在E中，則$n+1$也在E中。

在这种情况下，E应包含全部自然数。这就是数学归納法原理。

例如，用1在E中，据2)知$1+1=2$应在E中，$2+1=3$，$3+1==4$，…都应在E中。由于自然数的个数是无穷的，虽然我們可以

根据归納假設1)和2)逐步証明2, 3, 4, …都在E中，但是要把証明过程推至无限，在事实上是不可能的。在另一方面，由于直观上的明显性，我們不把运用1)—2)的过程推至无穷而承認結論的真实性。換句話說，我們把归納法原理当作一个不証自明的公理来看待。

为了說明归納法的应用，我們举一个例。

例 用归納法証明

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \tag{1}$$

証明 我們把使这个公式成立的一切自然数构成的集合叫做E。我們所需要証明的是E包含全体自然数，即公式(1)对一切自然数都成立。

当$n=1$时，$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=\frac{1}{6}\times1\times2\times3=1$，故公式(1)成立，即1在$E$中。这就說明归納假設1)成立。

其次，若m在E中，即m滿足(1):

$$1^2+2^2+\cdots+m^2=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

两端各加$(m+1)^2$得

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+(m+1)^2&=\frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)+(m+1)^2=\\&=(m+1)\left[\frac{1}{6}m(2m+1)+(m+1)\right]=\\&=(m+1)\frac{(2m^2+m)+(6m+6)}{6}=\\&=(m+1)\frac{2m^2+7m+6}{6}=\\&=\frac{1}{6}(m+1)\left[(m+1)+1\right]\\&\quad\left[2(m+1)+1\right]\end{aligned}$$