

高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

(一)

第一卷 分析基本方法

(初稿)

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社

612

9

高等学校教学用书



高等数学

GAODENG SHUXUE

(一)

第一卷 分析基本方法

(初稿)

南京大学数学天文学系编

人民教育出版社

高等数学(一)是南京大学数学天文学系在教学改革中集体編成的一部主要基础课程的新教材。它是把以往的解析几何、数学分析、微分几何、变分法、复变函数論、实变函数論和泛函分析等七門課程中的有用的内容和若干新添的材料,結合起来的整体。全书共分四卷;分析基本方法、分析基本原理、复数分析与現代分析。第一卷分析基本方法包括函数关系、极限和导数、积分法与简单微分方程、定积分、空間解析几何、多元函数的微分学、重积分、棧积分与面积分場論大意等八章。

本书可作为綜合大学数学、計算数学、力学等专业的教材。其他如物理、化学、气象等专业以及工科大学等均可参考。由于讲解偏重直观,对目前广大中等学校教师來說,也有較大的参考价值。

高 等 数 学

(一)

第一卷 分析基本方法

(初稿)

南京大学数学天文学系編

人民教育出版社出版 高等学校数学用书編輯部
北京宣武門內承恩寺?

(北京圖書刊出廣業營業許可證出字第2号)

外文印刷厂印裝 新华书店发行

統一書号 13010·885 开本 850×1168 $1/32$ 印張 10 $5/16$

字數 243,000 印數 90,001—250,000 定价 (6) 元1.00

1960年10月第1版 1960年10月北京第1次印刷

序 言

自从陆定一副总理在全国人民代表大会二届二次会议上做了“教学必须改革”的报告以来，南京大学数学天文学系的全体师生在党的领导下，展开了轰轰烈烈的教学改革运动。由于大家解放了思想，明确了方向，打破了旧框框，消除了顾虑，采取了反复讨论，虚实并举，以虚带实的工作方法，订出了新的教育计划和教学大纲，并且发动了广大师生根据我国建设需要，以及总路线和大跃进的精神集体编写成功两部教材“高等数学(一)”和“高等数学(二)”向江苏省文教群英会和全国文教群英会献礼。

“高等数学(一)”是把以往的解析几何，数学分析，微分几何，变分法，复变函数论，实变函数论和泛函分析等七门课程中的有用内容和若干新添进去的材料，有机地结合起来的一门新课程。它的任务就是：培养学生具有较雄厚的分析学的基础知识。它与以方程为中心的“高等数学(二)”及物理学同时讲授，构成了新的教育计划中的三门主要基础课程，它们本身各有其自身的任务，但是彼此又有密切的联系。全书共分四卷。第一卷：分析基本方法，从解析几何起，讲到线积分，面积分为止，主要是培养学生掌握微积分学的基本方法。讲述概念时着重从直观上来了解，暂不涉及分析学的严谨理论。这样，既可以使学生在学习分析基本原理以前具有一定的感性知识和直观能力，并且也为物理学及“高等数学(二)”的教学提供了必要的微积分学的基本知识，同时也便于将来把这一部分内容下放到中学里去。第二卷是分析基本原理，它是在第一卷中大量感性知识的基础上，对古典分析中的一些主要的基本概念和理论做比较深入的介绍。在这一卷的某几章里，我们初步

做了“实复結合”的嘗試。这样，既可以使学生对有关内容有一整体了解，又可节省讲授時間。此外，在第二卷中还增添了理論上和应用上都比較重要的漸近方法一章，第三卷是复数分析。它是在第二卷的基础上进一步探討解析函数的基本性質和橢圓函数，并且增添了对研究微分方程等学科有用的多元复变函数的基本知識，以及在解决实际問題中常用的保角映射的近似計算。第四卷为現代分析，其中包括測度与积分，函数逼近論初步和泛函分析等内容。函数逼近論初步系新增添的内容，它不仅对数学的其他分支，而且对其他科学技术都有較大的作用。在泛函分析中还增添了广义函数論初步。此外，在全书中都将一些常用的、行之有效的数值解法滲透到有关的内容中，尽可能使古典分析，数值分析，現代分析等結合起来，形成一个有机的整体。

本书在編写过程中，还特別注意到貫徹理論联系实际的精神，詳解主要概念时，注意交待来龙去脉。大跃进以来，校內外的某些联系实际的研究成果也适当的納入教材之中。此外，对于如何与其他課程如高等数学(二)，物理学……等等的配合問題，我們也予以适当的安排和注意，以免产生重复或脫节的現象。

自然，这部教材还是剛剛編成，由于我們的思想水平和业务水平都还不高，其中一定会有許多考虑不周，照顧不够，安排不当，深淺不适宜的地方，我們非常乐于接受来自各方面的批評和建議，以求将来把这部教材編写得更完善，更适合教学的需要。

南京大学数学天文学系

一九六零年五月

目 录

序言.....	iii
---------	-----

緒 論

第一章 函数关系

§ 1. 量和数.....	5
1.1 量和数(5) 1.2 数学归纳法(6) 1.3 不等式及绝对值(8)	
§ 2. 函数关系.....	9
2.1 函数概念(9) 2.2 研究函数关系的目的(11) 2.3 一元函数(11)	
2.4 函数与解析式(13)	
§ 3. 函数及其图形.....	14
3.1 坐标法(14) 3.2 线性函数和平面上的直线(16) 3.3 直线方程的其他形式(19) 3.4 点到直线的距离(22) 3.5 两直线的交角(22)	
§ 4. 二元函数、抛物线及其性质.....	23
4.1 二次函数及其图形(23) 4.2 抛物线的一个简单性质(24)	
§ 5. 简单的代数函数、椭圆、双曲线.....	25
5.1 椭圆(25) 5.2 双曲线(27) 5.3 圆锥曲线的极坐标方程(29)	
5.4 二次曲线的讨论(31)	
§ 6. 初等函数.....	37
6.1 有理函数和代数函数(37) 6.2 超越函数(37)	
§ 7. 内插法.....	39
7.1 内插法的意义(39) 7.2 拉格朗日内插公式(40) 7.3 有限差(43)	
7.4 牛顿内插公式(43)	

第二章 极限和导数

§ 1. 变化率问题和极限方法.....	45
1.1 变化率问题(45) 1.2 极限概念(48) 1.3 极限的运算法则(48)	
§ 2. 初等函数的极限与连续性.....	51
2.1 多项式的极限(51) 2.2 有理函数的极限(51) 2.3 有理幂函数的	

极限(52)	2.4 三角函数的极限(53)	2.5 一个重要的极限(55)
2.6 指数函数与对数函数(55)	2.7 連續性(56)	2.8 极限概念的扩大(56)
§ 3. 导数	58	
3.1 导数概念(58)	3.2 求导数的基本法则(60)	
§ 4. 初等函数的导数	65	
4.1 多项式的导数(65)	4.2 三角函数的导数(65)	4.3 对数函数的导数(67)
§ 5. 复合函数的求导数法则及其应用	67	
5.1 复合函数的求导数法则(67)	5.2 对数法则(69)	5.3 反函数的求导数法则(72)
5.4 公式表(74)		
§ 6. 导数和极限方法的一些应用	75	
6.1 运动学問題(75)	6.2 平面曲线的切线法线(77)	
§ 7. 高阶导数	79	
7.1 高阶导数的意义(79)	7.2 复合函数的高阶导数(80)	7.3 高阶导数的求法(80)
7.4 导数的近似值(83)		
§ 8. 微分	84	
8.1 微分概念(84)	8.2 求微分的基本法则(87)	8.3 一阶微分形式的不变性(87)
8.4 高阶微分(87)	8.5 微分在近似计算上的应用(88)	
§ 9. 中值定理及其应用	89	
9.1 引言(89)	9.2 中值定理(89)	9.3 中值定理的直接推论(90)
9.4 未定式、洛毕达法则(92)		
§ 10. 极值問題	95	
10.1 极值的概念(95)	10.2 决定极值的方法(96)	10.3 最大最小与极大极小的关系(99)
§ 11. 函数作图	101	
11.1 渐近线(102)	11.2 曲线的升降(105)	11.3 曲线的凸凹(106)
11.4 曲线绘图(107)		

第三章 积分法与简单微分方程

引言	109
§ 1. 原函数与不定积分概念	109
1.1 一些具体問題(109)	1.2 原函数与积分法(110)

§ 2. 积分法的基本法则、公式表	112
2.1 基本法则(112) 2.2 公式表(113) 2.3 例题(113)	
§ 3. 换元法则与分部积分法法则	114
3.1 换元法则(114) 3.2 分部积分法则(116) 3.3 例题(118)	
§ 4. 有理函数积分法	119
4.1 部分分式(119) 4.2 有理函数的积分(122) 4.3 求有理函数积分的直接方法(124)	
§ 5. 被积式可以化为有理函数的积分	127
5.1 $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}}\right)$ 型的积分(127) 5.2 $R(x\sqrt{ax^2+bx+c})$ 型的积分、 欧拉变换(130) 5.3 二项微分式的积分(133) 5.4 $R(\sin x, \cos x)$ 型的积分(135)	
§ 6. 微分方程大意	138
6.1 微分方程的一般概念(138) 6.2 可分离变量的方程、齐次方程(140)	
6.3 一阶线性方程, 贝努利方程(142) 6.4 二阶常系数线性齐次方程 (145) 6.5 应用问题(146)	

第四章 定积分

§ 1. 定积分概念	155
1.1 引出定积分概念的几个具体问题(155) 1.2 定积分的定义(156)	
1.3 微积分学基本定理(牛顿-莱布尼兹公式)(157)	
§ 2. 定积分的性质和计算法则	159
2.1 一些简单性质(159) 2.2 第一中值公式(160) 2.3 定积分的计算 法则及例(161)	
§ 3. 定积分的近似计算	166
3.1 梯形公式(166) 3.2 辛卜生公式(167) 3.3 例(168)	
§ 4. 定积分的应用	170
4.1 几何图形面积的计算(170) 4.2 功的计算(172) 4.3 体积的计算 (175) 4.4 流体压力(176) 4.5 平面图形的重心(177) 4.6 曲线 的弧长(179) 4.7 旋转体的侧面积(182)	

第五章 空间解析几何

§ 1. 二元函数及其图形	184
1.1 空间直角坐标系(184) 1.2 空间曲面和曲线(188)	

§ 2. 一次函数、平面方程、直线方程	190
2.1 一次函数和平面方程(190) 2.2 直线的方程(195) 2.3 直线和平面的关系(196)	
§ 3. 二次函数、抛物面	198
3.1 二次函数(198) 3.2 椭圆抛物面(199) 3.3 曲面抛物面(200)	
§ 4. 简单的代数函数、旋转面、椭圆面、双曲面、二次锥面	201
4.1 旋转面(201) 4.2 椭圆面(203) 4.3 双曲面(205) 4.4 二次锥面(206)	
§ 5. 二次曲面方程的化简	207

第六章 多元函数的微分学

§ 1. 二元函数的极限和连续性	221
1.1 极限的概念(221) 1.2 二元函数的连续性(221)	
§ 2. 方向导数	222
2.1 方向导数(222) 2.2 偏导数(223) 2.3 方向导数和偏导数的关系(224) 2.4 方向导数的物理意义(227)	
§ 3. 全微分	228
3.1 全微分(228) 3.2 全微分在近似计算中的应用(229)	
§ 4. 复合函数和隐函数的导数	231
4.1 复合函数的导数(231) 4.2 隐函数的导数(234)	
§ 5. 偏导数在几何上的应用	236
5.1 空间曲线的切线及法平面、弧长(236) 5.2 曲面的切平面及法线(237)	
§ 6. 高阶偏导数	238
6.1 高阶偏导数的定义(238) 6.2 求高阶偏导数的次序问题(239)	
§ 7. 二元函数的极值	240

第七章 重积分

§ 1. 二重积分	245
1.1 问题的提出(245) 1.2 二重积分的定义及性质(247) 1.3 二重积分的计算方法(249)	
§ 2. 三重积分	256
2.1 三重积分的定义(256) 2.2 三重积分的计算(257)	

§ 3. 重积分的应用264

3.1 巴伐曼公式(264) 3.2 左洛塔辽夫公式(267) 3.3 转动惯量(269)

3.4 曲面的面积(272)

第八章 曲线积分、曲面积分、场论大意

§ 1. 曲线积分274

1.1 引出线积分的几个具体问题(274) 1.2 曲线积分的定义(276) 1.3
曲线积分的计算(278) 1.4 格林公式(286)

§ 2. 曲面积分289

2.1 曲面积分的定义(289) 2.2 曲面积分的计算(294) 2.3 奥斯特洛
格拉德斯基公式与斯托克斯公式(297)

§ 3. 向量分析302

3.1 二个向量的数量积、向量积(302) 3.2 三个向量的混合积(305)

3.3 向量的导数(307)

§ 4. 场论大意311

4.1 数量场及其梯度(311) 4.2 向量场、散度(313) 4.3 旋度(316)

4.4 势量场与管量场(319)

緒 論

1. 数学研究的对象和目的

認識客觀世界的規律性，从而达到改造客觀世界的目的，是研究一切科学的共同目的，数学当然也不能例外。数学是研究现实世界中的空間形式和量的关系的科学，它在各門科学中占有特殊的地位。我們知道三本书和五本书放在一起，总共有八本书，三支笔和五支笔放在一起总共有八支笔。在数学的研究中却把“书”，“笔”，等具体事物的具体内容暂时撇开，單純从量上来考察，得出一种抽象的量的关系：三加五等于八。由此可見，数学和其他自然科学及社会科学不同，它不是以具体的自然現象或社会現象为其直接研究对象而是以从各种自然現象或社会現象中抽象出来的空間形式和量的关系为其直接研究对象。但是，这些空間形式和量的关系其实也是和有关的具体事物的質分不开的，因为数量的改变到了一定阶段便会引起質的变化。另一方面，为了要研究事物的質的变化，也有必要通过其量的变化来加以了解。因此，如果由于数学研究的对象只是现实世界中抽象的量的关系和空間形式，因而便可以完全脫离具体事物的質，这样的看法也是不恰当的。

2. 数学的特点

数学的特点之一便是高度的抽象性，这一特点，即使在簡單的四則运算中也就表現出来；例如，算式 $3+5=8$ 可以完全离开具体实物来进行，在求一函数的导数时也可以不问它是曲綫的斜率或者是运动的速度，問題在于，任何客觀事物都有量的共同特征，而这些特征可以在数学上用数部分地反映出来。概念本身就是一个抽象。数学上，球，曲綫，空間等概念同样是客觀事物在外形上的

理想化的概括結果，任何具體的球都不可能完全滿足數學上球的定義。具體的無粗細的曲線是不存在的，特別是 n 維空間乃至無限維空間更是高度抽象化的結果。

數學的另一個特點便是應用的廣泛性。正是如此我們才不至於陷入以“高度抽象”，“絕對嚴格性”為榮的“純粹數學”的泥坑中。理論與實踐本來就是統一的。數學正因為在科學技術上的巨大作用而得到日益豐富的發展。分析學，微分方程等對近代物理學，天文學，重大工程，星際航行等方面的作用是大家所熟知的。計算技術，自動化問題，氣象預報，國民經濟等則無疑地都需要數理邏輯，計算數學，數理統計，概率論等知識，離開了近代數學，現代尖端技術將很難得到發展。現在在深入貫徹黨的教育工作方針時，數學工作者已為解決生產實際問題作出了不少范例，即使在生活中也處處應用到數學。當然，發揮數學的這一特點，受惠的不僅是實踐，數學本身也將在實踐的影響下大大發展起來。

3. 數學的發展和生產實踐的關係

馬克思主義者認為一切知識都依賴於生產實踐，只有生產實踐才是一切知識的源泉，數學科學當然也是如此。從歷史發展上看，數的概念起源於計數。人們在生產活動及實際生活中需要對若干同類的事物加以比較多少，因而便產生了計數的概念。這樣便產生了所謂自然數，在這個基礎上，便發展起初等數學。到了十五世紀以後，歐洲的資本主義逐漸有所發展，由於航海、采礦、修築運河等需要，必須研究各種力學，因而需要用數學表達運動規律，這樣便給微積分學的誕生創造了必要的物質基礎。到了十九世紀，由於生產有了進一步的發展，要求數學科學能夠更加深刻地反映現實世界中的量的關係和空間形式，因而數學日益取得更加抽象的形式。同時數學的各個分支也逐漸增多起來，這些分支有著自己的研究方向，同時又互相聯繫形成數學科學的整體。例如微

分方程論, 概率論和数理統計, 計算数学, 数理邏輯, 函數論等中的很多影响很大的新方向都是由于生产實踐的需要而引起的。及至有了快速电子計算机以后, 不仅对計算数学引起了一次革命性的变革, 就是对数学的其他分支, 也起了很大的推动作用。从当前我国社会主义建設实际看来, 問題則更加清楚。正因为我国建設事业的飞速发展, 生产任务带动了数学科学大踏步前进。例如在微分方程、計算数学、概率論等学科方向, 虽然, 我国过去的基础十分薄弱, 甚而在有些方面, 过去完全是空白点, 但是近年来, 由于生产建設的迫切需要, 已經建立了一定的基础。

总的說来, 数学的发展是依赖于生产實踐的, 但这并不等于說: 其发展过程中的每一步驟, 都是受了生产實踐的推动。有时在其发展的一定阶段中, 数学的发展也可以走在生产實踐的前面, 走在其他自然科学的前面, 为它們做好理論准备。例如, 群論, 非欧几何学等的誕生便是如此。但是, 如果从而就得出結論, 认为数学的发展可以完全脱离生产實踐, 这便是完全錯誤的了。我們认为, 数学的发展归根到底依赖于人类的生產实践, 生产实践也是檢驗数学知識的最后标准。但是, 在历史发展的一定阶段上, 数学的发展可以走在生产實踐的前面, 对生产实践起一定的理論指导作用, 这样辯証的相互关系, 是完全符合事物本身发展規律的。

4. 大跃进以来我国数学界的思想情况

长期以来, 我国数学界存在着許多不正确的观点。有人认为数学发展是遵循着理論——理論——理論的途徑。有人认为数学不一定要联系生产實踐, 而是有其自身的規律性, 数学自身內在的矛盾的不断解决就发展了数学, 这实质上是從理論到理論的资产階級观点。也有人认为, 数学理論只能間接为生产服务, 甚至认为解决生产实际問題会降低数学研究的水平, 并且还錯誤地认为, 目前生产水平还不高, 联系生产实际得不到什么結果, 大跃进以来的

事实駁倒了这些謬論。

自 1958 年进行教育革命，貫徹党的教育工作方針以来，南京大学数学天文学系的师生在党的领导下，和全国各地数学工作者一样，走出校門，深入各生产部門，进行了广泛联系实践的挂鈎活动，在短期內解决了 105 項生产实际中提出的数学問題，扭轉了数学教学和研究脱离实际的傾向，奠定了数学理論为生产服务的良好开端，随后大大促进了数学教学改革，发展了新的学科如計算数学、概率論、微分方程等。所有这些成績都是在党的领导下大搞群众运动中所取得的。今后我們應該更加坚定地走实践——理論实践的道路，为我国社会主义建設貢獻出力量。

5. 研究数学的正确途徑与我国当前数学发展的五大方面

如上所述，我們研究数学的目的乃是为我国的社会主义建設服务，为飞速发展着的生产建設服务。因此，数学工作者只有深入到生产实际中去，才能获得大量的研究課題，然后加以研究提高，再用之于实践，这样才是发展数学的唯一的正确途徑。自 1958 年大跃进以来，已經有无数的生动事例說明了这条道路的正确性，在今年二月所召开的全国数学会第二届會員代表大会上已經明确指出了今后我国数学的发展将以尖端技术，重大工程中的数学問題，国民經济中的数学問題，自动化問題中的数学問題，現代物理中的数学問題以及大量計算等五大任务为綱，带动其他一切方面，全国数学工作者已經面临着一个偉大的历史任务。我們相信，在党的领导下，数学工作者面向生产实践，研究数学理論以解决五大任务为目的，在不久的将来，必将获得巨大的成績，培养自己成为既掌握丰富的生产实际知識又通曉深厚的数学理論的現代数学家。

第一章 函数关系

§ 1. 量和数

1.1 量和数 量是客观存在,研究量的关系是数学的任务。由于量的存在,人通过实践便逐渐产生了数的概念。数是用来表示量的,从量到数是一个数学抽象的过程。虽然量是数的基础,数的概念来自客观存在的量,但在形成数的概念过程中,各种各样的量的具体特点却逐渐被抛弃了,而数仅仅从量的某一共同的方面反映了量。这种抽象过程是数学抽象的一个范例,而量的普遍存在乃是数学应用广泛性的基础。现在我们就这种抽象过程简单说明于下。

自然数的概念发生较早,今先以自然数“1”为例。在人们的周围存在着大量的单个的物体,例如,一头牛,一棵树,一块石子,一根木棒等等。在人们对这些各种各样的量经过了长期的观察,并进行了一些分析与综合的工作,便逐渐摆脱了牛的动物特点,树的植物特点,石头的矿物特点以及大小,轻重,长短,颜色等特点,最后,便产生了数“1”的概念。和这种情形相仿,在长期考察了各种各样的由两个单一物体构成的集合以后,便逐渐产生了数“2”的概念。数3,4等的概念的产生也都如此。在识数的过程中,计数占有重要的地位。所谓计数实际上就是将一物体集合和一定的集合——例如手指——成对应。两个集合中物体的个数相同时,我们一定可以把这两个集合中的物体两个两个对应起来。自然数的概念便建筑在物体集合之间的这种对应关系上面。自然数便反映了某些物体集合之间能够建立这种对应关系的一种共性。在计数法中,

世界各国大都采取十进制的事实是和人类有双手十指分不开的。有了自然数便可以把一些量表示出来。在人类的日常生活中，不仅需要数，而且还需要对于数的运算。四则运算是最基本的运算。由于运算便又产生了新的矛盾。例如，小数不能减大数，自然数相除有除不尽的情形。要解决这个矛盾就得引进整数和有理数，从而扩大了数的范围。就四则运算而论，新的矛盾得到了解决，好象有理数系已经完美无缺了。但是，用数表示量的问题却仍然没有得到完全的解决。一个最典型的例子便是单位正方形的对角线的长度就不能用有理数来表示。要解决这个问题便得引进新数——无理数。有理数和无理数合在一起便构成实数系。

什么是无理数？我们知道有理数是 $\frac{p}{q}$ 型的数， p 和 q ($q \neq 0$) 都是整数。可以证明任何有理数都可以表成有限小数或循环的无限小数。例如， $\frac{1}{2} = 0.5$ ， $\frac{1}{3} = 0.333\cdots = 0.\dot{3}$ 。不循环的无限小数所表示的数便叫做无理数，例如 π 、 $\sqrt{2}$ 便都是无理数。

有了实数，在某种意义上说用数表示量的问题便解决了，例如，任何线段的长度在选定单位后都可以用一个实数表示出来。

1.2 数学归纳法 数学归纳法是有关自然数的一个公理，由于常常要用到它，我们想在这里特别说明一下。

设 E 为满足某些条件的自然数所组成的一个集合。今已知：

- 1) 1 在 E 中。
- 2) 若 n 在 E 中，则 $n+1$ 也在 E 中。

在这种情况下， E 应包含全部自然数。这就是数学归纳法原理。

例如，用 1 在 E 中，据 2) 知 $1+1=2$ 应在 E 中， $2+1=3$ ， $3+1=4$ ， $\cdots$ 都应在 E 中。由于自然数的个数是无穷的，虽然我们可

根据归纳假设 1) 和 2) 逐步证明 $2, 3, 4, \dots$ 都在 E 中, 但是要把证明过程推至无限, 在事实上是不可能的。在另一方面, 由于直观上的明显性, 我们不把运用 1) — 2) 的过程推至无穷而承认结论的真实性。换句话说, 我们把归纳法原理当作一个不证自明的公理来看待。

为了说明归纳法的应用, 我们举一个例。

例 用归纳法证明

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad (1)$$

证明 我们把使这个公式成立的一切自然数构成的集合叫做 E 。我们需要证明的是 E 包含全体自然数, 即公式 (1) 对一切自然数都成立。

当 $n=1$ 时, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3 = 1$, 故公式

(1) 成立, 即 1 在 E 中。这就说明归纳假设 1) 成立。

其次, 若 m 在 E 中, 即 m 满足 (1):

$$1^2 + 2^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$$

两端各加 $(m+1)^2$ 得

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + (m+1)^2 &= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1) + (m+1)^2 = \\ &= (m+1) \left[\frac{1}{6}m(2m+1) + (m+1) \right] = \\ &= (m+1) \frac{(2m^2 + m) + (6m + 6)}{6} = \\ &= (m+1) \frac{2m^2 + 7m + 6}{6} = \\ &= \frac{1}{6}(m+1) \left[(m+1) + 1 \right] \\ &\quad \left[2(m+1) + 1 \right] \end{aligned}$$