数学分析习题课教程

上册

华东师范大学数学系　郑英元　毛羽辉　宋国栋　编

数学分析习题课教程

上 册

华东师范大学数学系
郑英元 毛羽辉 宋国栋 编

高等教育出版社

(京)112号

内容提要

本书是编者经多年教学实践，在积累了丰富教学经验的基础上编写而成的.

全书以华东师范大学数学系编《数学分析》上册(第二版)(第一版于1987年国家教育委员会举办的全国优秀教材评选中荣获全国优秀奖)的十一章目录顺序编排. 各章分成若干单元，每单元编有"本单元习题课要求"、"复习与思考"、"例题"、"补充练习题"等四部分内容. 书末还附有补充练习题答案与提示.

本书对复习与思考、例题等作了精心的安排与选择，并对一些例题给出了分析与总结. 以加深读者对《数学分析》内容的理解和提高解题能力.

本书可作为高等院校数学分析习题课教材，也可作为《数学分析》课程的辅助读物.

数学分析习题课教程

上 册

华东师范大学数学系

刘英元 毛羽辉 宋国栋 编

高等教育出版社出版

新华书店北京科技发行所发行

河北省香河县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 7.875 字数 190 000

1991年8月第1版 1993年4月第1次印刷

印数0001—6 210

ISBN7-04-003848-X/O·1121

定价 3.45 元

编 者 的 话

本书根据数学专业数学分析教学要求编写. 全书分上、下两册，供数学、应用数学和其他相近专业(本科或专科)作为习题课教材使用，也可作为一般参考读物.

一　对习题课的一些见解

多年来的教学实践表明，低年级大学生在学习数学分析这类内容极其丰富、逻辑推理极为严密的课程时，常感迷惑不解甚至遭受挫折. 习题课作为教学过程中的一个重要环节，在使学生摆脱困境、争得掌握知识的主动权上起着不可缺少的指导作用.

习题课教学的宗旨是：通过问题讨论、例题演示和解题技能技巧的训练，以期使学生加深对基本概念的理解，提高论证、运算和应用的能力. 并配合讲授课共同完成课程教学所规定的要求.

习题课的任课教师应在主讲教师的指导下，明确每次习题课的目的要求. 既要防止与讲授课相脱节，另搞一套；又要防止成为讲授课的简单延续和补充.

习题课一般应按小班进行，这有利于师生共同活动. 在习题课教学中，教师应针对教学内容的特点和学生的实际能力精心设计问题，并启发学生进行思考、讨论、板演或练习，使学生逐步提高分析问题和解决问题的能力.

二　本书使用说明

本书的章次排列基本上与华东师范大学数学系编《数学分析》(第二版)和本书作者编写的《数学分析》(师专版)两书相同. 每章根据教学要求规定的习题课学时数分成若干单元. 任课教师可依据教学进度，以本书一个单元(或某些相邻单元的重新组合)的内

容来安排每次习题课(二学时).

每个单元的内容由以下四部分组成:

(一) 本单元习题课要求;

(二) 复习与思考(除可作课前指导外,不少问题亦可作课堂讨论题);

(三) 例题(介绍一些典型例子,它除起解题示范作用外,特别注重对问题的分析、讨论和引申);

(四) 补充练习题(目的是补充课本上的习题在类型与数量上之不足,供任课教师需要时选用).

此外,在每章末尾还给出 **A**、**B** 两份自测题,读者可借助它检查自己掌握知识的情况(一般每卷可在60分钟内完成).这些试题是由华东师大、北京师大等六所高等院校合作研制的《数学分析试题库系统》按教学要求由电子计算机随机选出.

本书最后还附有各章各单元补充练习题的答案(或提示).

必须指出的是,本书所提供的只能是习题课的轮廓和素材,而不是教案.而且每单元内容一般略多于每次习题课的容量,供任课教师根据自己的教学实际酌情选用.其中注有*号部分的内容是指:一是当教学时间不够时可以不选;二是具有一定难度.以适应不同层次读者的需求.

本书引用如下一些逻辑符号:"$\forall$"表示"对每一个"、"所有"或"任意";"$\exists$"表示"存在";"$\Longrightarrow$"表示由左端条件可推出右端结论,"$\Longleftarrow$"则是它的相反;"$\Longleftrightarrow$"表示左右两端互为充要条件(互相等价).

三 本书的编写工作

目前国内数学分析习题课用书尚不多见,很多首次担任此项教学任务的青年教师,往往因无所依据而把握不住习题课的节奏与深广度.我们希望通过本书的出版和使用,有益于保证数学分

析习题课的教学质量．但因这类书籍更容易带有编者自身认识的局限性，因此恳切希望读者对本书提出批评指正．

本书编写分工：宋国栋（第一、二、三、四、八、十二、十三、十四和十五章），郑英元（第五、六、七、二十、二十一和二十二章），毛羽辉（第九、十、十一、十六、十七、十八和十九章），由郑英元负责统一整理和编写组织工作．

1990 年 12 月高等教育出版社延请赵桢、王家銮（主审，北京师范大学）、范宜传、梁学信（华侨大学）、黄树荣（暨南大学）、许汉平（华南理工大学）、张碧霞（福州大学）、黄荣坦（厦门大学）等同志组成审稿小组，对本书上册原稿进行认真仔细的审阅，提出了许多宝贵的意见，我们据此又作了认真修改．高等教育出版社郑洪深同志对本书的定稿与促进本书的出版给予很大的帮助和支持．华东师范大学数学系数学分析教学组的老师们对本书的编写也给予了极大的支持与关心．对此，我们一并表示衷心的感谢．

编　者

1991.2

目 录

第一章　实数集与函数

第一单元　绝对值与不等式·确界原理

一　本单元习题课要求

1. 掌握有关实数绝对值的性质与运算;

2. 进一步理解确界概念与确界原理,并能运用于有关命题的运算与证明.

二　复习与思考

1. 实数的绝对值怎样定义?叙述实数绝对值的几何解释.

2. 什么是三角形不等式?并叙述它的几何意义.

3. 写出伯努利不等式与平均值不等式.

4. 什么是有限集、无限集、有界集、无界集?

5. 怎样定义数集的确界?并叙述确界原理.

6. 试对下列命题的真假作出判断(应说明理由):

1) 有限集必是有界集;

2) 无限集必是无界集;

3) 有限集必有上确界,无限集必无上确界;

4) 若 a 是数集 S 的上界, 则任何大于 a 的数都是 S 的上界,任何小于 a 的数都不是 S 的上界;

5) a 为数集 S 的上确界的充要条件是: a 是数集 S 的上界;

6) 若 a 为数集 S 的上确界,则 a 是 S 中的最大数.

三　例题

例 1　设 a、b 为任意实数,证明:

1) $\dfrac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\dfrac{|a|}{1+|a|}+\dfrac{|b|}{1+|b|}$;

2) $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\geqslant\frac{1}{2}$.

［分析］ 1）右端$=\frac{|a|(1+|b|)+|b|(1+|a|)}{(1+|a|)(1+|b|)}$

$$=\frac{|a|+|b|+2|a||b|}{1+|a|+|b|+|a||b|}.$$

为此，只要对左端应用三角形不等式

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|,$$

并添加某些非负项放大不等式，就能建立与右端的关系.

2) 应用关系式 $\max\{|c|,|d|\}\geqslant\frac{1}{2}(|c|+|d|)$ 和三角形不等式.

［证］ 1）因为

$$\frac{1}{1+|a+b|}\geqslant\frac{1}{1+|a|+|b|}\geqslant\frac{1}{1+|a|+|b|+|a||b|},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&=1-\frac{1}{1+|a+b|}\\&\leqslant1-\frac{1}{1+|a|+|b|+|a||b|}\\&=\frac{|a|+|b|+|a||b|}{1+|a|+|b|+|a||b|}\\&\leqslant\frac{|a|+|b|+2|a||b|}{1+|a|+|b|+|a||b|}\\&=\frac{|a|(1+|b|)+|b|(1+|a|)}{(1+|a|)(1+|b|)}\\&=\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

2) 因为 $\max\{|a+b|,|a-b|\}\geqslant\frac{1}{2}(|a+b|+|b-a|)$

$$\geqslant\frac{1}{2}|a+b+b-a|=|b|.$$

所以 $\max\{|a+b|,|a-b|,|1-b|\}\geqslant\max\{|b|,|1-b|\}$

$$\geqslant\frac{1}{2}(|b|+|1-b|)\geqslant\frac{1}{2}|b+1-b|=\frac{1}{2}.$$ ▮

例 2 设 S 为非空数集，试正面陈述下列概念：

1) 数集 S 无下界；

2) 数 η 是 S 的上界，但不是 S 的上确界.

并应用它们分别证明：数集 $\{-n|n\in N\}$ 无下界；数 2 是数集 $\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in N\right\}$ 的上界，但不是上确界. 这里 $\boldsymbol{N}$ 是自然数集.

［解］ 1) 若 $\forall L\in\boldsymbol{R}$，$\exists x\in S$，使得 $x<L$，则称数集 S 无下界.

$\forall L\in\boldsymbol{R}$，若 $L\geqslant 0$，则 $\forall n\in\boldsymbol{N}$，均有 $-n<L$；若 $L<0$，则有 $L>[L]-1\in\{-n|n\in N\}$，故数集 $\{-n|n\in N\}$ 无下界.

2) 若 $\forall x\in S$，恒有 $x\leqslant\eta$，但 $\exists\alpha<\eta$，$\forall x\in S$，有 $x\leqslant\alpha$，则 η 是 S 的上界，但不是 S 的上确界.

由于 $\forall n\in N$，有 $\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+1}=1<2$，且 $\frac{3}{2}<2$，$\forall n\in N$，也有 $\frac{n}{n+1}<\frac{3}{2}$，故 2 是 $S=\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in N\right\}$ 的上界，但不是 S 的上确界. ▮

［说明］ "数集 S 有下界"的正面陈述是：

$$\exists L\in\boldsymbol{R},\forall x\in S,\text{有 } x\geqslant L.$$

注意它和"数集 S 无下界"的主要差别是：把后者中的符号"$\forall$"写成"$\exists$"，"$\exists$"写成"$\forall$"，不等号"$<$"改为"$\geqslant$". 仿照这一原则，读者不妨试写出本例的 2) 与"数 η 是 S 的上界，且是 S 的上确界"这两个相反概念的正面陈述.

例 3 设 A、B 为非空数集，记 $S=A\cup B$，证明：

1) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$;

2) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

[证] 下面只证 1),读者仿此自行证明 2).

证法一 若 A、B 中至少有一个(比如 A)为无上界的数集,则 S 也是无上界的数集,且有

$$\sup A=\sup S=+\infty.$$

此时 1)式显然成立.

现设 A 和 B 都有上界,记 $\xi=\sup A$, $\eta=\sup B$, 且 $\eta\leqslant\xi$, 现在证明 $\sup S=\xi$.

(i) $\forall x\in S\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B$; 若 $x\in A$, 则 $x\leqslant\xi$, 若 $x\in B$, 则 $x\leqslant\eta\leqslant\xi\Rightarrow\forall x\in S$, 总有 $x\leqslant\xi$, 即 ξ 为 S 的一个上界;

(ii) $\forall\alpha<\xi=\sup A$, $\exists x_0\in A$, 使得 $x_0>\alpha$. 由 S 的定义, $x_0\in S$, 故 $\exists x_0\in S$, 使得 $x_0<\alpha$.

故由(i), (ii)及上确界定义得 $\sup S=\xi$.

证法二 (i) $\forall x\in A$ 或 $\forall x\in B$ 必有 $x\in S\Rightarrow x\leqslant\sup S\Rightarrow\sup A\leqslant\sup S$ 或 $\sup B\leqslant\sup S\Rightarrow\max\{\sup A,\sup B\}\leqslant\sup S$.

(ii) $\forall x\in S\Rightarrow x\in A$ 或 $x\in B\Rightarrow x\leqslant\sup A$ 或 $x\leqslant\sup B\Rightarrow x\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}\Rightarrow\sup S\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$.

综合(i), (ii)得 $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$.

证法三 先由证法二(ii)得: $\max\{\sup A, \sup B\}$ 是 S 的上界. 现在证明它也是 S 的上确界,

不妨设 $\max\{\sup A, \sup B\}=\sup A$. 因而 $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in A$, 有 $x_0>\sup A-\varepsilon=\max\{\sup A,\sup B\}-\varepsilon$.

又由 $x_0\in A\Rightarrow x_0\in S$ 及上式得

$$x_0>\max\{\sup A,\sup B\}-\varepsilon.$$

从而由上确界定义知 $\max\{\sup A,\sup B\}$ 是 S 的上确界. ▮

[说明] 这里证法一是根据确界定义来证明的; 证法二是证

明“左式”$\leqslant$“右式”和“左式”$\geqslant$“右式”，从而有“左式”=“右式”；证法三则是这两种方法各取一部分而得到的.

读者应从这几种证法中领会到各种证法的技巧.

四 补充练习题

1.1.1 设$|a|<1$, $|b|<1$，证明：$\left|\dfrac{a+b}{1+ab}\right|<1$.

1.1.2 设a为实数，且$|a|>1$，证明：对任何自然数$n\geqslant 2$，有

$$\left|\frac{n}{a^n}\right|<\frac{2}{(n-1)(|a|-1)^2}.$$

1.1.3 设$a_i>0(i=1,2,\cdots,n)$，且

$$a_1\cdot a_2\cdots a_n=1.$$

证明：$a_1+a_2+\cdots+a_n\geqslant n$，而且等号仅在$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立.

1.1.4 证明下列不等式：

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}<1$;

*(2) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

1.1.5 设S为非空数集，试对下列概念给出正面陈述：

(1) 数ξ不是S的下确界；

(2) 数ξ是S的下界，但不是S的下确界.

***1.1.6** 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$b_1,b_2,\cdots,b_n$是两组实数，证明柯西不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right);$$

并应用柯西不等式证明：

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2\leqslant n\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right).$$

第二单元　函　数

一　本单元习题课要求

1. 在中学已掌握函数概念的基础上，以两个数集之间映射的观点来加深对函数概念的理解.

2. 进一步掌握函数的运算性质(四则运算、复合运算和反函数等)及其表示方法.

3. 加深对具有某些特性函数(有界函数、单调函数、奇(偶)函数和周期函数)的认识. 并能依此对所给函数是否具有上述性质作出判断.

二　复习与思考

1. 叙述函数定义；记号“$f(x)$”表示什么，是函数？还是函数值？

2. 下述函数 f 和 g 是否相等：

1) $f(x)=\sqrt{x^2}$, $g(x)=|x|$;

2) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

3) $f(x)=\arcsin x+\arccos x$, $g(x)=\dfrac{\pi}{2}$.

3. 试写出满足下列要求的函数的表达式：

1) 定义域为$[-1,1]$，值域为$\{-1,0,1\}$的递减奇函数；

2) 定义域为$[0,2]$，对每一个 $x\in[0,2]$对应的函数值 $f(x)$ 是图 1-1 三角形(顶点为 $(0,0)$，$(2,0)$，$(1,1)$) 中在 $[0,x]$ 部分的面积；

3) f 在$(0,1]$上无下界，但 $\forall\varepsilon>0$，f 在$(\varepsilon,1]$上有界；

4) f 为定义在$[0,1]$上的函数，它在$[0,1]$的任一子区间上都不是单调函数，但它却存在反函数；

5) f 是有界周期函数，但它没有最小周期.

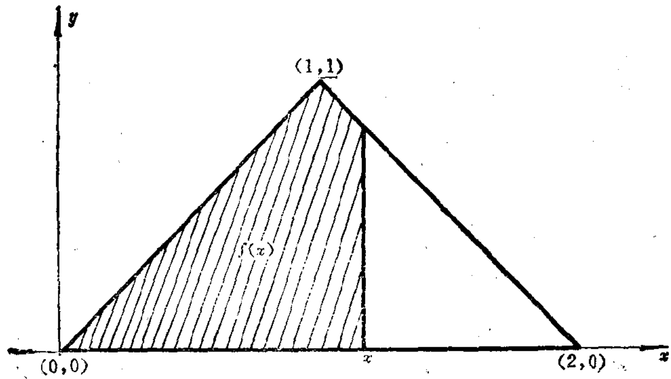

图 1-1

4. 下述论断正确否?如果错误,请予订正或举例说明:

1) 每一函数 $y=f(x)$, $x\in D$ 都对应平面上由点集

$$\{(x,y)\mid x\in D, y=f(x)\}$$

所确定的图象. 反之,平面上一个点集 $S=\{(x,y)\}$ 也能确定一个函数.

2) 任何两个函数 f、g 都能得到复合函数 $f\circ g$ 和 $g\circ f$;①

3) 只有严格单调函数才有反函数;

4) 两个周期函数之和仍然是一个周期函数.

5. 试分别写出一个函数不具有单调性、有界性、奇偶性、周期性的正面陈述.

三 例题

例 1 试讨论满足以下条件的函数是否存在:

1) 定义域为 $\{1,2\}$, 值域为 $\{1,2,3\}$;

2) 定义域为 $\{1,2,3\}$, 值域为 $\{1,2\}$;

3) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $\{0,1\}$;

---

① 设 $y=f(u)$, $u=g(x)$, 则复合函数 $f(g(x))$ 记为 $(f\circ g)(x)$, 或简单写作 $f\circ g$.

4) 定义域为$[a,b]$,值域为$[a,2b]$,$(b>0)$.

[分析] 1) 根据函数定义，每一个属于定义域的数,都对应且只对应一个属于值域的数. 但现在定义域只有二个数，而值域却有三个数. 即值域中至少有一个数不能为定义域中的数所对应.

2) 这时定义域中元素个数多于值域中元素个数. 为此可让定义域中不同的数对应值域中同一个数.

3) 这时定义域$(-\infty,+\infty)$为无限集,而值域虽只有二个数,但与上题一样,可让定义域中的一部分对应0，余下部分对应1.

4) 作联接$A(a,a)$,$B(b,2b)$两点的直线段，即可得到定义在$[a,b]$上而值域为$[a,2b]$的函数.

[解] 1) 因为值域中元素个数多于定义域中元素个数,这样的函数是不存在的.

2) 例如由下表所确定的函数

定 义 域	值 域
1	1
2	2
3	2

3) 例如 $f(x)=\begin{cases}0, x\leqslant 0\\1, x>0\end{cases}$ 或 $f(x)=\begin{cases}1, x<-2\\0, x\geqslant -2\end{cases}$ 等.

4) 通过点$A(a,a)$,$B(b,2b)$的联线

$$y=\frac{2b-a}{b-a}(x-a)+a, x\in[a,b]$$

就是一个定义在$[a,b]$上值域为$[a,2b]$的函数. ▌

[说明] 1° 若定义域为有限集,则其值域必须是有限集,且其元素个数不能超过定义域的元素个数(如1)、2)题). 若定义域为无限集,则值域可以是有限集(如3)),也可以是无限集，甚至是

包含定义域这个无限集为子集的集合.（当然也不是任意两个无限集之间都能确定一个函数，对此你能举一个例子吗？）

2° 确定在同一定义域，同一值域上的函数一般是不止一个的. 为此，请你分别就2)，3)，4)各题的要求再举一例.

例2 设f为狄利克雷函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}$$

$g(x)=\dfrac{1}{x}$，试问复合函数$f\circ g$和$g\circ f$是否存在？

［分析］ 一般说，函数F与G能复合而得$F\circ G$的条件是G的值域包含于F的定义域之内.

［解］ 由于g的值域$M=\mathbf{R}\setminus\{0\}$与$f$的定义域$\mathbf{R}$有$M\subset\mathbf{R}$，所以复合函数$f\circ g$存在.

由于f的值域$S=\{0,1\}$，g的定义域$D=\mathbf{R}\setminus\{0\}$，但$S\not\subset D$，所以复合函数$g\circ f$不存在. ▮

例3 复习思考题3.

［分析］ 1）由奇函数的定义应有$f(0)=0$，由严格递减性当$x<0$时应有$f(x)=1$；当$x>0$时应有$f(x)=-1$. 这时$f(x)$也是满足奇函数性质的.

4）读者已知在$[0,1]$的任何子区间上都不是单调函数的有狄利克雷函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为}[0,1]\text{上有理数},\\ 0, & x\text{ 为}[0,1]\text{上无理数}.\end{cases}$$

但它的值域$\{0,1\}$只有两点，而存在反函数的函数，其值域与定义域必须是一一对应的，如$f(x)=x$. 现在要寻求一个具有这两个特点的函数.