数理逻辑引论

王宪钧

北京大学出版社

数理逻辑引论

王宪钧

北京大学出版社

内 容 简 介

本书分三篇。前两篇主要介绍古典的命题演算和狭谓词演算。基本概念的讲解、定理和元定理的证明力求详尽易懂，使没有预备知识的读者也能领会实质、掌握技巧。第三篇论述从莱布尼茨到歌德尔（17世纪至本世纪30年代）的数理逻辑发展史，并就一些重要的数学基础问题发表了作者的见解。

这是一部深入浅出的数理逻辑教程，哲学、数学及其他专业均可采用，逻辑、语言学、计算机科学、科学史等领域的研究人员也可作为参考书使用。

数理逻辑引论

北京大学出版社出版
（北京大学校内）
北京大学印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行
850×1168毫米 32开本 12印张 298千字
1982年6月第一版 1982年6月第一次印刷
印数 1—32,000册

统一书号：2209·8　　定价：1.75元

前　言

本书前二篇逻辑演算部分是以多年来的讲稿为基础编写的。1966年5月完成了初稿。在早年教学过程中，沈有鼎教授曾给我不少帮助。1978年开始修改，北京大学晏成书同志阅读了第一和第二篇全稿，分担了修改工作。中国科学院胡世华、唐稚松、杨东屏、张锦文同志和社会科学院周礼全同志都曾给这部分初稿提出修改意见。

数理逻辑发展史的研究始于1976年，原意在本书中只概括地介绍。1979年因病中辍，1980年重新写作，结果较原设想的篇幅增多，兹作为本书第三篇付刊。吴允曾同志对发展史的初稿提了意见。

康宏逵同志阅读了全书，对于表述提出建议或作了改进，并编写了参考文献目录和索引。

作者对以上各位谨致谢意。

1981年12月

目　录

第一篇　命题逻辑

命题逻辑只包括一部分逻辑形式和规律。

命题逻辑的特征在于，在研究和考查逻辑形式时，我们把一个命题只分析到其中所含的命题成分为止，不再分析下去，不把一个简单命题再分析为非命题成分的结合，不把谓词和量词等等非命题成分分析出来。通过这样的分析可以显示出一些重要的逻辑形式，这种形式和有关的逻辑规律就属于命题逻辑。

下面是一个推理：

如果 m^2 是偶数，则 m 是偶数。

m^2 是一偶数。

所以，m 是一偶数。

这是一个正确的假言推论。设以 p,q 代表任何命题，这个推理的形式是

如果 p，那么 q，

p，

所以，q。

在这里，"如果 p，那么 q"是一个复合命题的形式。我们不需要对 p 和 q 所代表的命题做进一步的分析，推理的正确性就可以显示出来。这个推理的正确性的基础在于复合命题的形式结构，而

与其组成部分的形式结构无关。

命题逻辑的规律反映复合命题的逻辑特征。复合命题是由联结词“如果…那么…”，“…并且…”，“…或…”等构成的。复合命题的特征决定于联结词所反映的客观联系，所以，命题逻辑又被称为联结词的逻辑。

在本篇里，我们将先介绍命题逻辑的一些形式结构及其规律的特征，然后再介绍命题逻辑的公理化——命题演算。

第一章 真值联结词 真值函项 重言式

一·一 复合命题 复合命题的真假

由词项可以组成命题，由命题也可以组成命题。

复合命题 由联结词和命题组成的叫作复合命题。例如

$\sqrt{2}$是一无理数并且 π 是一无理数。

如果 $|x|$ 小于正实数 δ，则 $-\delta$小于 x 并且 x 小于 δ。

支命题是组成复合命题的那些命题。在第二例里，

$|x|$ 小于正实数 δ，

$-\delta$ 小于 x，

x 小于 δ，

都是支命题。

联结词 把几个命题联结起来从而构成一复合命题的词项是联结词。在上二例里，联结词有

如果…，则…，

…并且…。

在语言里，我们常用的联结词还有

…或…，

既不…又不…，

…当且仅当…，

等等。

复合命题的真假

命题有真假。命题的真假决定于它是否如实地反映了客观情

况，复合命题的真假也是这样。但是，复合命题是由支命题组成的，有时支命题的真假也可以间接地决定复合命题的真假。下面有两个复合命题：

$\sqrt{2}$是无理数并且π是无理数，

$\sqrt{2}$是有理数并且π是无理数。

前者是真的，因为其中两个支命题

$\sqrt{2}$是无理数，

π是无理数

都是真的。后者是假的，因为其中有一支命题

$\sqrt{2}$是有理数

是假的。

设以p,q代表任一命题，对于复合命题

p并且q

一般地说，如果二支命题p和q中有一个假，复合命题是假的。可是，如果p和q都真，是否复合命题p并且q就是真的呢？问题似乎不是这样简单。例如

$2+2=4$并且雪是白的

这复合命题里的两个支命题不属于同一范围，它们之间不见得有什么特殊联系，人们是不作这样判断的，因之也就不必考虑它的真假了。所以，假若p并且q这一复合命题是真的，那么，p和q不但都要是真的，而且p和q之间还要有一定的联系，只是简单的同真是不够的。其它种类的复合命题也有类似的情况。

总起来我们可以说，支命题的真假可以决定复合命题的真假，但是不能完全决定复合命题的真假。

一·二　真值联结词　真值形式

支命题的真假不能完全决定复合命题的真假，除了真假以

外，支命题之间还要有一定的联系，这是什么联系呢？

命题是表达思想的。思想的內容极其丰富而且是多种多样的，因之支命题之间的联系也是多样的，复杂的和丰富的。在支命题之间的具有丰富內容的多种联系之中，有些方面的联系是逻辑学的对象，另一些方面的联系则不属于逻辑学的范围。

数理逻辑研究复合命题，而且主要是一类一类的复合命题，但是数理逻辑只能从某些方面来研究复合命题。因之，在数理逻辑中，必须而且只能从某些方面对复合命题来进行概括。现在的问题是，支命题之间的各种联系，哪些应该而且可以包括在数理逻辑对于复合命题的概括之內。

首先，不属于逻辑范围的联系当然不必包括在逻辑的概括之內。其次，即使某些联系同属于逻辑的范围，我们也不可能把各方面的不同联系包括在一个逻辑概括之中。例如，模态方面的联系就不能包括在非模态逻辑的概括之内(参看四·四)。此外，还有人提出意义方面的联系问题。意义的联系是具体内容的联系，有时表面上看来似乎是互不相干的两个命题，在特殊场合实际上却有着密切的联系。可见，确定两命题间有无意义的联系，要对其內容作具体的分析，不能一概而论。因之，我们也不可能把有无意义联系的条件用一个公式固定下来，包括在一个逻辑概括之內。

数理逻辑从形式结构方面研究命题。在处理复合命题时，我们要考虑的是，什么是复合命题的支命题之间在结构方面的最一般的联系。一百余年以来，数理逻辑科学发展的历史证明，这样的最一般的联系就是支命题之间的眞假关系。我们将支命题之间的眞假关系抽象和概括出来，只从支命题的眞假来考虑复合命题的眞假。这样处理的结果，就是命题逻辑里的眞值联结词和眞值形式。

眞值联结词 反映复合命题与支命题之间的眞假关系的联结词叫作眞值联结词。它们和日常语言里的联结词是有所不同的，

它们只是日常语言里的联结词的逻辑抽象。为了避免混淆，真值联结词在数理逻辑里都用特定的符号表达。例如，我们用“$\wedge$”表达与“并且”相当的真值联结词，用“$\rightarrow$”表达与“如果…那么…”相当的真值联结词。

真值形式 真值形式是与复合命题相当的由真值联结词构成的形式结构，也就是由真值联结词构成的复合命题的形式结构。命题逻辑里的公式都是表达真值形式的。真值形式也可以用图表来说明，这种表叫作真值表。

例如，复合命题p并且q的真值形式一般地写作

$$p \wedge q,$$

其中$\wedge$是真值联结词。此真值形式可以用下列真值表说明

	p	q	$p \wedge q$
(1)	真	真	真
(2)	真	假	假
(3)	假	真	假
(4)	假	假	假

在表上，第一行表示，p和q都真时$p\wedge q$也真；第二行表示，p真q假时$p\wedge q$为假；第三行表示，p假q真时$p\wedge q$为假；第四行表示，p和q都假时$p\wedge q$也假。可以看出，如果p和q都真，真值形式$p\wedge q$就是真的。在其它情况(2)、(3)、(4)下，$p\wedge q$都是假的。这也就是，支命题的真假可以完全决定真值形式的真假。这个真值形式只是真假关系的抽象，其中的真值联结词$\wedge$和日常语言里的联结词“并且”是有区别的。

相当于普通逻辑中的假言命题，如果p那么q，也有一个真值形式，在本书中写作“$p\rightarrow q$”，其中的联结词“$\rightarrow$”在数理逻辑中被叫作真值蕴涵。根据逻辑史学家的考证，远在纪元前五世纪希腊时代，麦加拉的斐罗 (Philo of Megara)就初步地提出了从真假关系来处理假言命题的看法。二千多年以来，特别是近数

十年，眞值蕴涵是不是假言命题的正确的抽象，经常是讨论和争论的问题。现在我们对这问题作简短的讨论。

假言命题如果 p 那么 q 的基本涵义是，前件 p 是后件 q 的充分条件。如果前件是后件的充分条件，那么，前件眞后件必眞。这就等于说，前件眞则后件不能假，因之，在前件眞而后件假时，假言命题必是假的。

p	q	如果 p 则 q
眞	假	假

在假言命题里，前件虽然是后件的充分条件，它却不一定是后件的必要条件，所以，当前件假而后件眞，或是前件假后件也假时，假言命题还可以是眞的。举一个古代所用的例子，

如果地球会飞，则地球存在。

在这里，前件假，但是整个假言命题眞。又如，

如果地球会飞，则地球有翼。

如果语言能创造财富，那么夸夸其谈的人就是富翁了。

在这里，前后件都假，假言命题也还是眞的。可以看出，从眞假关系考虑，只有当前件眞而后件假时，假言命题才是假的，在其它情况下，假言命题都可以是眞的。在这里我们只说可以是眞的，我们幷沒有说必然是眞的，这是因为，与其它复合命题相同，在具体思维里，一个假言命题如果能够成立，在支命题之间要有具体內容的联系，只凭支命题的眞假还不能决定假言命题的眞假，有时虽然前后件都眞，而整个一句话却不见得是有意义的，例如，

如果 $2+2=4$，则雪是白的。

以上是就具体思维，从思维的內容说的。另一方面，如果从逻辑抽象的角度来考虑，就复合命题的逻辑形式来说，由于意义的联系是具体內容的联系，不可能用一个公式来确定，也不是形式结构方面的问题，因之我们可以把意义问题暂置不顾，只从眞

假关系方面来作抽象。这样处理的结果就是相当于假言命题的眞值形式 $p \rightarrow q$。用眞值表来说明是

	p	q	$p \rightarrow q$
(1)	眞	眞	眞
(2)	眞	假	假
(3)	假	眞	眞
(4)	假	假	眞

从表上可以看出，p 和 q 的眞假完全可以决定 $p \rightarrow q$ 的眞假。只有当 p 眞而 q 假时，眞值形式 $p \rightarrow q$ 才是假的。在其它情况(1)、(3)与(4)下，$p \rightarrow q$ 都是眞的。眞值蕴涵只是眞假关系的抽象，它和日常语言里的"如果…那么…"是有区别的。

虽然每一复合命题都有一个与之相当的眞值形式，但是，因为眞值形式只是复合命题的支命题之间的眞假关系的抽象和概括，只是一方面的抽象，眞值联结词和日常语言里的联结词不是等同的，是有区别的。在运用这些形式时，必须考虑到意义的联系，进行具体的分析。把它们等同起来是错误的，必然会引起对于语言和逻辑的歪曲。另一方面，眞值形式是复合命题的科学抽象，是我们理解和研究复合命题的有力工具，此点已为数理逻辑的科学实践所证实，是不容置疑的。

一·三　五个基本眞值联结词

数理逻辑中经常用到的眞值联结词共有五个，它们反映了思维中经常出现的五种复合命题里的眞假关系。我们把这五个叫作基本眞值联结词。它们是：蕴涵（如果…那么…），合取（…并且…），析取（…或…），等值（…当且仅当…）和否定(并非…)。由它们构成的眞值形式叫作：蕴涵式，合取式，析取式，等值式和否定式。以下说明这五个眞值联结词。

（1）**蕴涵**。蕴涵式在本书中写作"$p \rightarrow q$"。读作"p 则 q"、

“如果 p 那么 q” 或 “p 蕴涵 q”。这里应当注意的是，“$p \to q$” 虽然也读作“如果 p 那么 q”，但与日常语言中的联结词 “如果…那么…” 是不同的。关于此真值联结词，上文已作过详细说明。

（2）**合取**。合取式在本书中写作 “$p \wedge q$”。读为“p 且 q” 或 “p 并且 q”。这里 “$\wedge$” 虽然也读作 “并且”，它与日常语言中的联结词 “并且” 也不同，上面已作过详细的说明。

（3）**析取**。析取式一般地写作 “$p \vee q$”。读为 “p 或 q”。相当于 p 或者 q 这一复合命题。“或者” 一词的涵义在日常语言里不完全确定。有时它表达相容的析取，即 p 和 q 可以同真。有时它表达不相容的析取。数理逻辑里的析取是相容的析取。其真值表如下：

	p	q	$p \vee q$
(1)	真	真	真
(2)	真	假	真
(3)	假	真	真
(4)	假	假	假

图表说明，如 p 和 q 中有一为真，则析取式为真。这里并不排除 p 和 q 都真的情况(1)。所以 $p \vee q$ 是相容的析取。

（4）**等值**。等值式在本书中写作“$p \longleftrightarrow q$”。读为 “p 等值 q” 或 “p 当且仅当 q”。它表示：p 和 q 的真值相等，同真或同假。它相当于日常语言里的

p 当且仅当 q。

如果 p 则 q；如果非 p 则非 q。

其真值表如下：

	p	q	$p \longleftrightarrow q$
(1)	真	真	真
(2)	真	假	假
(3)	假	真	假
(4)	假	假	真