概率论与数理统计

首都师范大学数学系概率统计教研室

首都师范大学出版社

概率论与数理统计

首都师范大学数学系
概率统计教研室　编

首都师范大学出版社

（京）新208号

概率论与数理统计

主　编　首都师范大学数学系概率统计教研室
出版发行　首都师范大学出版社
社　址　北京西三环北路105号（邮政编码100037）
经　销　全国新华书店
印　刷　北京昌平兴华印刷厂
开　本　787×1092　1/32　印　数　0,001—2,500册
字　数　431　千字　印　张　18.875
版　本　1993年10月　第1版
1993年10月　第1次印刷
书　号　ISBN 7-81039-054-6/G·49
定　价　12.50 元

前　言

本书是根据国家教委关于高等师范院校数学专业概率论与数理统计的现行教学大纲编写的。它由概率论的基础与数理统计初步两个部分组成。

1984年我们曾编写了一本适合我系学生情况的通俗易懂的教材。经我教研室全体教师几年对教材的试用和按大纲要求反复修改与补充构成了这本书。本书力图注意阐明概念来源的实际背景和直观意义，尽量把解决问题的思路阐述清楚，以利于思维方法的训练，使读者在学到概率统计的基本理论和方法的同时，获得解决一些实际问题的能力。在数学处理上，注意由浅入深循序渐进。适时地使用稍高一些的数学工具，给出较高的观点，以便于读者更透彻地理解问题的实质，使数学手法更为简捷。

本书基本上只用到数学分析和线性代数（少量的复变函数）知识。对于书中的定理，凡是在上述数学水平之内可以证明的，尽可能给出较详尽的证明。未予证明的部分，在书中指出了参考书目。此外各章均有一定数量的例题，它们可以帮助读者了解概率应用的广泛性，并能提高将理论应用到实际中的能力。每章后还附有难易程度不同的习题。以适应不同程度读者的需求。在书后备有习题答案，较难的题还附有简单的提示。本书适合作为师范院校数学系本科生的教材，但其它类型院校的理、工科各系、部分经济科系、师范专科学校、成人教育各类学校亦可用此作为教材或主要参考

书使用。

本书在编写过程中，曾得到北京师范大学刘秀芳教授及北京大学胡德焜副教授的帮助与支持，他们提了很多宝贵意见，在此表示感谢。

由于我们水平有限，虽经多次修改，仍难免存在错误和不足，殷切期望读者予以批评指正。

编　者

1992年6月

引　言

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科。

一　随机现象

我们在观察自然现象和社会现象时，会发现许多事情在一定条件下必然会发生，例如，在标准大气压下，水加热到100℃时，必然会沸腾；又如，把石子向上抛，石子在重力作用下，必然向下落等等。这种现象我们称为确定性现象或必然现象。它是指，在一定条件下，必然会发生某一结果的现象。或者说只要条件相同，多次进行同一试验（或多次观察同一现象），所得结果完全一样，因而在重复试验（观察）之前是可以预料这结果必然会再次出现的。

今后，我们把在一定条件下，必然发生的事情称为必然事件。而把在一定条件下，必然不会发生的事情，称为不可能事件。不可能事件和必然事件的实质是相同的，它们都是在确定性现象中发生的。

在实践中，我们还会发现另外一种现象，例如，掷一枚硬币，可能国徽一面朝上，也可能国徽一面朝下，在每一次投掷之前不能事先知道它将出现哪一种结果；又如从一批产品中，抽出一件，可能是一等品，也可能是二等品，也可能是废品，在抽出之前，不能事先知道将出现哪一种结果等等。

我们把这样一种现象称为随机现象。也就是说，在同样条件下，多次进行同一试验（或多次观察同一现象），所得结果并不完全相同，因而在一次试验（或观察）之前，不能确切预料将出现什么结果的现象称为随机现象。

随机现象的出现是因为除了基本条件外，还有许多偶然的次要的因素在起作用。比如在炮击时，虽然我们用同一门炮，在同样的发射角度下，发射同一种类型的炮弹（这些是基本条件），但是由于大气中风力、气压、炮弹的形状重量等等的微小差别，就使得炮弹的落点不完全相同。这些次要的偶然因素，我们往往不能完全了解或控制（有些是不值得去控制的）。但这些微不足道，然而却是众多的因素，合起来就产生了显著的影响，造成了结果不确定的原因。

从某种意义上来说，随机现象是绝对的，而确定性现象只是在一定精度下而言的。当然在实际应用中，人们对微不足道的不确定性忽略不计，这是完全正确的。而且随着科学技术的发展，许多现象中的不确定性将不断减小，但是我们必须看到，不论我们怎样努力，偶然性的因素是不可避免的。同时，更重要的是，有许多问题，我们不是要改变条件来减少不确定性，而正是在一定条件下，来研究这种随机现象所具有的规律性。例如乘公共汽车的人数是随机的，汽车公司不能强迫人们坐车或不坐车，面对这个随机现象它只能去了解坐车人数的起伏是否有什么规律可循，从而合理安排车次等。

二　频率的稳定性

随机现象有没有规律呢？从表面看，随机现象似乎是一

种没有规律的现象，从一次试验（观察）来看，某个结果可能出现也可能不出现，确实看不出什么规律。但人们经过长期实践发现，在大量重复试验中，它有某种明显的规律性。例如掷一枚硬币（我们不妨把硬币的一面规定为“正面”，另一面规定为“反面”.）可能出现正面，也可能出现反面，无法预先确定，但在大量试验中，人们发现出现正面的次数大约占了总投掷次数的一半，历史上曾有过如下的试验：

试验者	投掷次数	出现正面次数	$\frac{出现正面次数}{试验次数}$
蒲丰	4040	2048	0.5070
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

如果把“出现正面次数”与“总试验次数”的比值称为“出现正面”的频率，那么，试验表明，在多次掷一枚均匀硬币时，“出现正面”的频率大约在$\frac{1}{2}$左右，“出现正面”的频率具有稳定性。即这个频率在某个常数$\left(这里是\frac{1}{2}\right)$附近摆动。

还可以举出大量的试验（观察）资料来说明随机现象中的这种频率稳定趋势。

一般地，如果我们作了n次试验（观察）。这n次试验中，某个结果（我们暂时把它称作事件A）出现了k次，**称$\frac{k}{n}$为事件A在这n次试验中出现的频率。**

可以看出，尽管频率本身不是确定的，但随着试验次数n的增加，频率$\frac{k}{n}$愈来愈摆动在某一常数附近。试验次数

越多，频率与这个常数出现大偏差的情况越稀少。呈现出一种稳定性。这种性质叫做频率的稳定性。频率的稳定性是不以任何人的主观意志为转移的，不论是谁去掷一枚均匀的硬币，只要试验的次数很大，“出现正面”的频率总是在 $\frac{1}{2}$ 左右，与 $\frac{1}{2}$ 偏离很大的情况是很少出现的。因此我们说频率的稳定性是随机现象的客观规律。

三 统计规律性

一个随机现象，有它的偶然性，即在每次试验（观察）前无法确切知道它的结果，又有它的规律性，即在大量重复试验（观察）下，每个结果的频率具有稳定性。

在研究随机现象时，就是要研究它的规律性。就是要了解这个随机现象可能出现哪些结果，以及出现这些结果可能性的大小。当我们掌握了这两条，就认为掌握了这个随机现象的统计规律。

当然更重要的还是应用这统计规律去解决实际问题。现在概率论和数理统计已成为最重要和最活跃的数学学科之一。并且在自然科学、社会科学、工程技术、军事和工农业生产等各个学科和领域中都得到了广泛的应用。

目　录

第一章　事件与概率

§1.1　事　件

首先我们要明确随机试验的含意。**随机试验**就是满足以下条件的试验，即

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验的所有可能结果是事先已知的；

(3) 每次试验只能出现所有可能结果中的一个，但在试验前不能断定究竟出现哪一个结果。随机试验也简称为试验。

随机试验的每一个可能出现的结果**称为一个基本事件或一个样本点**。用ω表示。而全体基本事件（样本点）组成的集合**称为基本事件空间（或样本空间）**记为Ω。

对于一个随机试验首先要根据它的条件与观察的目的来搞清它的基本事件，从而得到它的基本事件空间。

试写出以下（例1.1.1—例1.1.5）各例中所述随机试验的全体基本事件及基本事件空间。

例1.1.1　掷一枚匀称的硬币，观察其正、反面出现的情况。

令ω_1=“正面向上”，　ω_2=“反面向上”，

则

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$$

由于硬币是均匀的，所以出现正面与出现反面的可能性相

同。

例1.1.2 从放有红、白、黑三个球的口袋中，随机取一球，然后放回，再随机取一球，观察其颜色（这种抽取方法称为放回抽取）.

解 这里“随机取一球”就是把球完全平等看待，于是每一个球被取出的可能性相同。由于试验的目的只是观察其颜色，对取球的顺序没有明确提出要求，因此，我们分两种情况给出试验的基本事件空间。

解 1 考虑取球的顺序

以下括号中第一个字表示第一次抽取球的颜色，第二个字表示第二次抽取球的颜色，令

$\omega_1=$(红，红)，$\omega_2=$(红，白)，$\omega_3=$(红，黑)，

$\omega_4=$(白，红)，$\omega_5=$(白，白)，$\omega_6=$(白，黑)，

$\omega_7=$(黑，红)，$\omega_8=$(黑，白)，$\omega_9=$(黑，黑)，

则

$$\Omega=\{\omega_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9\}$$

解2 不考虑取球的顺序

令

$\omega'_1=$\{二个红\}，　　$\omega'_2=$\{一红，一白\}，

$\omega'_3=$\{一红一黑\}，　　$\omega'_4=$\{二个白\}，

$\omega'_5=$\{一白一黑\}，　　$\omega'_6=$\{二个黑\}，

则

$$\Omega'=\{\omega'_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 6\}$$

上述两个基本事件空间都是此试验的基本事件空间，但是，由于袋中每一球被取到的可能性相同，所以Ω中的每一基本事件出现的可能性相同，而Ω'中的每一基本事件出现的可能性不相同，因为第一次取到红球而第二次取到白球，

或者反过来都算ω'_2出现，而ω'_1仅在两次都取到红球时才算ω'_1出现。我们把基本事件出现可能性相同的基本事件空间**称为等可能的基本事件空间**。于是上述考虑顺序的基本事件空间Ω是等可能的基本事件空间。

例1.1.3 袋中有5件产品，其中有2件次品，从中随机取2件，观察其中次品的情况。

解 由于试验的目的是观察所取两个产品中次品的情况，而对所取产品的顺序未做明确要求，于是，我们可以分两种情况给出试验的基本事件空间。把产品编上号，不妨设1，2号为次品，3，4，5号为正品。

解1 考虑取产品的顺序

令

$\omega_1=(1, 2)$，$\omega_2=(1, 3)$，$\omega_3=(1,4)$，$\omega_4=(1,5)$，

$\omega_5=(2, 1)$，$\omega_6=(2, 3)$，$\omega_7=(2,4)$，$\omega_8=(2,5)$.

… … …

$\omega_{17}=(5, 1)$，$\omega_{18}=(5, 2)$，$\omega_{19}=(5, 3)$，

$\omega_{20}=(5, 4)$，

其中(i, j)表示第一次取到i号产品，第二次取到j号产品，$i\neq j$，i，$j=1, 2, \cdots, 5$，则

$$\Omega=\{\omega_i,\ i=1, 2, \cdots, 20\}$$

解2 不考虑取产品的顺序

令

$\omega_{i,j}=\{$一个i号产品，一个j号产品$\}$，

其中$i<j$，i，$j=1, 2, \cdots, 5$，则

$$\Omega'=\{\omega_{i,j},\ i<j,\ i,\ j=1, 2, \cdots, 5\}$$

不难看出，Ω与Ω'都是试验的等可能的基本事件空间或等可能的样本空间。

这里要说明一下：题中"随机取 2 件"一词的含义，它包含这样两方面的内容，一方面是指每一个产品被取到的可能性相同，另一方面是指抽取产品的方法，可以一次取出 2 件产品，也可以一次取 1 件产品，不放回，然后再取 1 件产品这样共取出 2 件产品。把这两种抽取方法都称为不放回抽取法。

由例1.1.2及例1.1.3看到，若试验的条件与目的对某些问题未做明确要求，我们可以从不同角度来考虑基本事件，于是试验所对应的基本事件空间就可能不唯一，甚至于等可能的基本事件空间也不唯一。

例1.1.4 观察某电话总机，在单位时间内接到电话的呼唤次数。

解 令

ω_i="在单位时间内接到i次呼唤"， $i=0, 1, 2, \cdots$

则 $\Omega=\{\omega_i, i=0, 1, 2, \cdots\}$

例1.1.5 观察某灯泡厂生产的灯泡的寿命，即灯泡的使用时间。

解 令

ω_t= "灯泡使用了t小时"，$0\leqslant t<\infty$，

则

$$\Omega=\{\omega_t, 0\leqslant t<\infty\}$$

由上述各例可见，基本事件空间中基本事件的个数，可以是有限个，无限可列个和无限不可列个的情况。

对于一个随机试验我们不仅要了解它的基本事件，有时还需要研究其它的情况。如

例1.1.6 在例1.1.2的条件下令

A= "第一次取到的球是红球"

$B=$ “第二次取到的球是红球”

$C=$ “两次都取到红球”

问这些结果应如何表示？

解 因为它们都需要考虑取球的顺序，所以，我们在考虑取球顺序的基本事件空间Ω中来研究它们．若A出现，则有基本事件ω_1，ω_2，ω_3之一出现；反之，若ω_1，ω_2，ω_3之一出现了，则A就出现．我们记为

$$A=\{\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3\}$$

类似地

$$B=\{\omega_1, \ \omega_4, \ \omega_7\}$$

$$C=\{\omega_1\}$$

可见，A、B、C都是由某些有一定特征的基本事件组成的集合。于是我们有如下定义

定义1.1.1 某些有一定特征的基本事件组成的集合(即基本事件空间的某一特定子集）称为随机事件，简称事件。事件一般用A、B、C…表示。

于是当且仅当A所包含的某一个基本事件出现时A就发生。

要注意的是仅含一个基本事件（或样本点）ω的单点集$\{\omega\}$也可能是一个事件，如例1.1.6中的$C=\{\omega_1\}$。为了方便，也把事件C称为基本事件C。这样，“基本事件”有时指ω，有时指$\{\omega\}$，而“样本点”仅指ω。基本事件空间Ω仍然是以ω为元素的集合。另外要说明基本事件空间Ω也是一个事件，因为在每次试验中必然出现Ω中的某一个基本事件，即**称Ω为必然事件**。类似地，我们把空集$\varnothing$也作为一个事件，它在每次试验中都不会发生，**称$\varnothing$为不可能事件**。

例1.1.7 在例1.1.2的条件下令