高等院校教材

应用数学的现代基础

全治明　罗建书　编著

国防科技大学出版社

应用数学的现代基础

金治明　罗建书　编著

国防科技大学出版社
·长沙·

图书在版编目（CIP）数据

应用数学的现代基础/金治明，罗建书-长沙：国防科技大学出版社，1998.8

ISBN 7-81024-486-8

Ⅰ 应用数学的现代基础

Ⅱ 金治明 罗建书

Ⅲ ①应用数学②教材

Ⅳ O29

国防科技大学出版社发行

电话：（0731）4555681 邮编：410073

E-mail：gfkdcbs @ public. cs. hn. cn

责任编辑：何 晋 责任校对：黄八一

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本：850×1168 1/32 印张：8.5 字数：213千

1998年8月第1版第1次印刷 印数：1-3000册

*

定价：12.00元

内　容　简　介

现代数学的基础是代数学、拓扑学与泛函分析。我们在第一章介绍一点必不可少的代数知识；第二章介绍实数空间上的拓扑；第三章介绍测度与积分理论；第四章介绍各种形式的黎曼积分与一致收敛性，其中包括广义积分、含参变量积分等；第五章泛函分析初步；第六章富氏积分与广义函数，它是应用数学重要的工具。

本书是工科数学教学改革的试用教材，可作为高等工科院校学生的选修课教材，也可作为工科研究生、工程技术人员的参考书。

序　言

当今数学的非凡之处是，她对科学和工程技术的所有领域都做出了令人瞩目的贡献。

数学是一门科学，她集系统性、严密性、逻辑性、精确性、创新性和想象力于一体。她在探索中前进，在前进中探索，从而日臻完美。数学以其自身强大的生命力和魅力，渗透到人类生活和科学技术的各个领域，并成为人类文明和进步的基础。

数学是一种文化，她高度专业性的语言，追求完美和创新的思想，形形色色的工具和严密的思维方式，不仅适应自身发展的需要，而且已被有效地用于阐述和回答各种科学问题。科学技术发展史表明，数学不仅是推动科学技术进步的重要因素，而且也是当今以微电子技术、计算机技术、网络与通信技术为核心的信息时代取得突出成就的重要因素。欧几里得几何、麦克斯威方程、爱因斯坦相对论，处处可见经典数学的踪迹与力量。当今个人计算机及其广泛应用、并行计算机及并行算法、计算机网络、多媒体数据的通信与保密、数字图像的压缩与还原、生命科学的细胞分裂、DNA 双螺旋研究等等，都散发着近代数学的浓郁气息。数学从来没有像今天这样充满青春活力，并广泛应用于人类生活的各个领域。

数学教育在高等教育中占有重要的地位，数学教学改革是理工科大学教学改革的重中之重。公共数学课程不仅要为学生打下坚实的基础和为学生专业课学习提供必要的数学工具，而且也是培养高素质人才具有严密的逻辑思维能力、创新能力的重要举措。

20 世纪中叶形成的我国理工科数学课程体系，由于内容、篇幅等多方面的原因，已不适应高等教育和科学技术发展的需要。主要问题是重经典轻现代、重解析轻计算、重连续轻离散，内容过多、课时过长等等。为了深化数学教学改革，积极投身国家教委组织的“面向 21 世纪改革教学内容和课程体系计划”，国防科技大学金治明教授、罗建书教授在理工科大学数学教学方面作了积极的探索和尝试。他们以工科高等数学和线性代数为基础，以较小的篇幅介绍了现代数学的三个基础学科——代数、拓扑和泛函分析。本书的出版，为非数学专业的理工科大学生尽快了解现代数学的基本概念、理论和方法，创造了有利条件。

我衷心地祝愿数学教学改革取得更大的成就。

齐治昌

1998 年 3 月于长沙

编 者 的 话

数学教学在高等教育中占据非常重要的位置，数学不只是作为工具为各学科提供描绘由量的规定性所揭示的物质运动的规律，更重要的是贯穿其中的高度抽象的方法、严密的逻辑推理是任何一门学科所必须具备的。

人类理性探索的一个永恒的主题是:“认识宇宙，也认识人类自己。”在这个探索中数学起着特别的作用，它是现代科学技术的语言和工具。数学，它不断追求最简单的、最深层次的超出人类感官所及的宇宙的根本。现代数学的应用不再局限在自然科学的范畴，数学在社会科学和社会经济中的应用也日显重要，以随机分析为基础的金融数学成为现代金融分析的主要工具。中国数学会前理事长齐民友先生曾指出:“一种没有发达数学的文化是注定要衰落的，一个不掌握数学作为文化的民族也是注定要衰落的。”

然而，数学的发展已经使它本身成为一个大海，作为工科的本科生在掌握了一点高等数学之后应该再学一些什么呢？如果在继续训练技巧与深入到现代数学的基础二者之间一定要作一选择的话，我们宁可选择后者。这就是本门课程的指导思想，但这丝毫也不表示练习的不重要，因为只有通过练习才能深入掌握所学的知识，才能培养解决问题的能力。

人们公认现代数学的基础是代数学、拓扑学与泛函分析。我们在第一章介绍一点必不可少的代数知识；第二章介绍实数空间上的拓扑；第三章介绍测度与积分理论；第四章介绍各种形式的黎曼积分与一致收敛性，其中包括广义积分、含参变量积分等；第五章泛函分析；第六章富氏积分与广义函数，它是应用数学重要

的工具。

前四章由金治明执笔，后两章由罗建书执笔，敖武峰副教授审读了部分内容，并为第一、二章配备了习题，西北工业大学张肇帜教授和华南理工大学汪国强教授审读了全书，并提出了宝贵的修改意见，国防科技大学出版社总编谷建湘副教授作了仔细审校。在此表示衷心的感谢。

本书的出版是教学改革的初步尝试，缺点、错误在所难免，希望广大读者与同行批评指正。

金治明　罗建书

1998 年 4 月于长沙

目　录

第一章 代数结构

数学最基本的研究对象是数，这些数之间有加、减、乘、除等代数运算，但今后我们将看到一些不是数的对象也可以定义类似的运算。于是这些对象与数之间有某种类似。数学是高度抽象的科学，它把这二者在某种一一对应的意义下“等同”起来，并称之为“代数同构”。这样，我们就可以把所研究的对象按其是否“代数同构”而归为一类。

§1.1 集合及其运算

把我们所要研究的某种确定的对象放在一起就构成**集合**，集合是不能再进一步定义的概念。构成集合的对象称为集合的**元素**。通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，而用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素。这里我们引入记号 $\in$ 表示“属于”，比如 $a\in A$ 表示“a 是 A 的元素”，而 $a\notin A$ 表示“a 不是 A 的元素”。表示集合的方法通常有两种，一种是外延法，也就是将集合的所有元素都列举出来，如

$$A=\{0,1,3\}$$

它表示集合 A 由 0,1,3 三个元素组成。但有时这样做很不方便，比如考虑所有自然数的集合 $\mathbf{N}$，而 $\mathbf{N}$ 中元素是列举不尽的。于是我们采用概括法来表示它，即记

$$\mathbf{N}=\{x\,|\,P(x)\}$$

其中 $P(x)$表示“x 具有某种性质 P”，例如 $P(x)$为“x 是自然数”。又如

$$S=\{y\mid x \text{ 为自然数，且 } 18\leqslant x\leqslant 24, y=x^3\}$$

即$S=\{5832,6759,8000,9261,10648,12167,13824\}$. 虽然 S 是可以用外延法表达的，但用概括法使人更明白集合 S 中元素的性质。一个很特殊的集合是空集$\varnothing$，它表示其中没有元素，用概括法可写为

$$\varnothing=\{x\mid x\neq x\}$$

其实这里 $P(x)$可以是任意一个不成立的命题，比如“$x\neq x, x=x+1$”等。

元素与集合是两个不同层次的概念，如用 x 表示元素，则$\{x\}$表示由单个元素 x 所组成的集合，我们有 $x\in\{x\}$. 但是，不允许写 $x\in x$，同样不允许写 $x\notin x$. 事实上，如果允许这样写，令 $T=\{x\mid x\notin x\}$，，那么 $T\in T$，或者 $T\notin T$ 都将导致矛盾。

设 A,B 为两个集合，$A\subseteq B$ 表示“A **含于** B”，或“B **包含** A”，也就是凡 A 的元素都是 B 的元素，此时也称 A 为 B **的子集合**。用数理逻辑的记号我们写为：$\forall\ x\in A\Rightarrow x\in B$，其中$\forall$ 表示“对任意一个”，$\Rightarrow$表示“蕴含着”或“推出”。如果 $A\subseteq B$，但存在元素 b 属于 B 而不属于 A，则称 A **真含于** B，或 B **真包含** A，并记为“$A\subset B$，如果 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称 A **等于** B，并写“$A=B$”. 读者要注意$\in$与$\subseteq$的区别，前者是元素与集合的关系，后者是两个集合的关系。

设 A,B 为两个集合，我们可以定义它们的运算：

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\vee x\in B\}$$

读作 A **与** B **的并**，其中$\vee$表示“或”，

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\wedge x\in B\}$$

读作 A **与** B **的交**，其中“$\wedge$”表示“并且”，$A\cap B$ 也简记为 AB.

$$A\backslash B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin B\}$$

读作 A **差** B. 显然如果 $A\subseteq B$，则 $A\backslash B=\varnothing$. 当 $B\subset A$ 时，$A\backslash B\neq\varnothing$，

此时称它为**真差**。

如果我们所考虑的对象都在集合 X 内，也就是我们所要讨论的集合都是 X 的子集合，则称 X 为**空间**。设 $A\subseteq X$，称真差 $X\backslash A$ 为 A 的**余集**，并记为 A^C.

定理 1.1　设有空间 X,A,B,C 为集合，则有下面的运算法则：

（1）　交换律：$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

（2）　结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

（3）　分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

（4）　德·摩根律：$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$；

$$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C;$$

证明　举第一个分配律的证明为例，我们只要证明等式两边的集合互相包含。设 $x\in A\cup(B\cap C)$，则 $x\in A$，或者 $x\in B$ 且 $x\in C$，当 $x\in A$，则显然 x 属于等式右边的集合；而当 $x\in B$ 且 $x\in C$，则 $x\in(A\cup B)$ 且 $x\in(A\cup C)$，因此

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

反之，设 x 属于等式右边的集合，则 x 属于 A 或属于 B，同时 x 属于 A 或属于 C，这样 x 属于 A 或者 x 同时属于 B，属于 C，于是 x 属于等式左边的集合。类似可以证明其它几个运算法则。　□

集合的关系及其运算法则可用下面的图 1－1 表示。

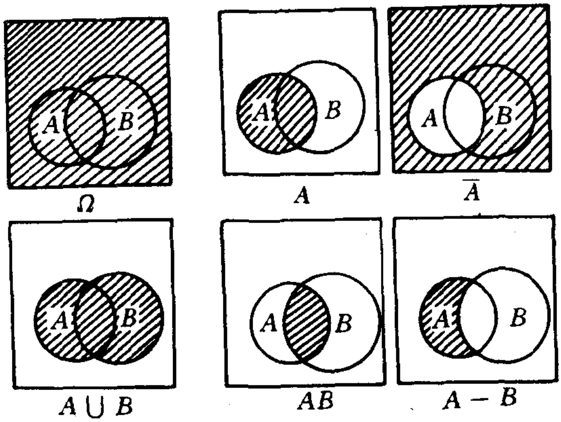

图 1-1

§1.2 关系与映射

设 A,B 是两个集合，我们称集合

$$A \times B = \{<x,y> \mid x \in A, y \in B\} \qquad (1-1)$$

为集合 A 与 B 的**笛卡尔乘积**。其中 $<x,y>$ 称为**有序对**，也就是说 $<x,y>$ 与 $<y,x>$ 是不同的。

定义 1.1 称 $A\times B$ 的子集合 R 为集合 A,B 上的一个关系。

如果 A,B 都是实数集 $\mathbf{R}$，可以分别用 x-轴，y-轴来表示，则 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 就表示坐标平面。平面上任意一个集合都是一个关系。通过原点画一条斜率为 1 的直线，这条直线就表示 $x=y$ 的关系，而这条直线的右下方恰好表示 $x<y$ 的关系。以坐标原点为圆心，半径为 1 的圆当然是坐标平面上的点集，它表示的是关系：

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

对于一个关系 R,称

$$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists\ y \text{ 使得} < x,y > \in R\}$$

为关系 R 的定义域,而称

$$\mathrm{rng}(R) = \{x \mid \exists\ x \text{ 使得} < x,y > \in R\}$$

为关系 R 的值域。

关系是一个集合似乎很不好理解,其实我们把关系与具有这种关系的有序对看成同一,这样就不难理解关系就是一个集合。为了方便,我们常用 $a \sim_R b$ 表示 a 与 b 具有关系 R,这样

$$R = \{< x,y > \in A \times B \mid x \sim_R y\}$$

一般说来,$x \sim_R y$,并不一定有 $y \sim_R x$,这就是说关系不一定有对称性。数集上的"$>$"关系,人群中的"父子"关系都没有对称性,这也就是我们引入有序对,把 $<x,y>$ 与 $<y,x>$ 视为不同一的理由。等价关系是一种重要的关系。

定义 1.2 设 $R \subseteq A \times A$,如果关系 R 具有如下的性质,则称它为**等价关系**:

(1)自反性,即 $x \sim_R x$ 也即 $<x,x> \in R$;

(2)对称性,即若 $x \sim_R y \Rightarrow y \sim_R x$,也即 $<x,y> \in R \Rightarrow <y,x> \in R$;

(3)传递性,即 $x \sim_R y$ 且 $y \sim_R z \Rightarrow x \sim_R z$,也即 $<x,y> \in R$,且 $<y,z> \in R$,则必 $<x,z> \in R$.

由(1)看出,等价关系是一个非空的集合,也即它必包含所有"对角线"的元素:$R \supseteq \{<x,x> \mid x \in A\}$.

如果 R 是两个实数集上的相等关系"$=$",即 $R = \{<x,y> \mid x = y\}$,显然它是一个等价关系。设 X 为空间,称 $\mathscr{P}(X) = \{E \mid E \subseteq X\}$ 为 X 的**幂集**,也就是 X 的全体子集。设 R 为集合的相等关系,即

$$R = \{< E,F > \in \mathscr{P}(X) \times \mathscr{P}(X) \mid E = F\}$$

则 R 是等价关系。显然,数集上的"$>$"或"$<$"关系不具有自反性

与对称性，因此不是等价关系，同样幂集上的包含关系也不是等价关系。撇开集合的具体内容，设 R 为集合 A 上的等价关系，称

$$[x]=\{y\in A\mid y\sim_R x\}$$

为元素 x 的 R 等价类(简称为等价类)。对任意的 $z\in A$，或者 $z\in[x]$，或者 $z\notin[x]$. 当 $z\notin[x]$时，等价类$[z]$必与$[x]$不相交。事实上，如果有 $a\in[x]\cap[z]$，则 $x\sim_R a$ 且 $a\sim_R z$，由传递性，x 与 z 等价，从而 $z\in[x]$，矛盾。由此可见，集合 A 被分成为两两不相交的等价类，而且 A 就是这些等价类的并。举一个例子，设 $\mathbf{N}$ 为自然数的集合，对 $m,n\in\mathbf{N}$，引入等价关系 R 如下：$m\sim_R n$ 当且仅当 $m-n$ 能被 3 除尽。容易验证$\sim_R$ 是一个等价关系，并且我们有三个等价类：$[0]=\{m\in\mathbf{N}\mid m=3k,k\in\mathbf{N}\}$，$[1]=\{m\in\mathbf{N}\mid m=3k+1,k\in\mathbf{N}\}$，$[2]=\{m\in\mathbf{N}\mid m=3k+2,k\in\mathbf{N}\}$，而且 $\mathbf{N}=[0]\cup[1]\cup[2]$.

序是另一种重要的关系。设 X 为一个集合，$X\times X$ 上的具有传递性的关系“$\prec$称之为**序**”，亦即如 $x,y,z\in X$，$x\prec y$ 且 $y\prec z$，则 $x\prec z$. 这里“$\prec$”并不一定表示通常的“小于”。实数集上通常的“小于”关系“$<$”就是一个序；集合论中定义在 $\mathscr{P}(X)$上的包含关系“$\subseteq$”也是一个序。

如果在 X 上定义了序“$\prec$”，则称$(X,\prec)$或 X 为**偏序集**，如果它还满足

(1)若 $x\prec y$ 且 $y\prec x$，则 $x=y$；

(2)对于 X 中任意两个不同的元素 x,y，总有 $x\prec y$ 或 $y\prec x$

则称$\prec$为一个**全序**，称$(X,\prec)$或 X 是一个**全序集**。实数集按通常的“小于”构成全序集，而$(\mathscr{P}(X),\subseteq)$只是一个偏序集。

设$(X,\prec)$是一个偏序集，A 为其子集，如果对于 A 中每个元 y，都有 $y\prec x$ 或 $y=x$，则称 x 为 A 的**上界**。如果 x 为 A 的上界，而且小于或等于 A 的其它上界，则称 x 为 A 的上确界，类似地可定义 A 的下界，下确界，称集合 X 是**序完备的**，如果 X 的每个具有上界的非空子集都有上确界。

定理 1.2 集合 X 对于序 $\prec$ 是序完备的充要条件是每个有下界的非空子集都有下确界。

证明 假设 X 序完备，A 是一个有下界的非空子集，令 B 为 A 的所有下界所组成的集合，则 B 非空，并且任意的 $a\in A$ 都是 B 的上界，由序完备性，B 有上确界 b. 于是 b 小于或等于 B 的每一个上界，所以 b 小于或等于 A 的每个元，因此 b 是 A 的下界。此外，b 是 B 的上界，即 b 大于或等于 A 的每个下界，因此 b 是 A 的最大下界，即下确界。充分性的证明是类似的。 □

定义 1.3 设 A,B 为两个集合，f 为一个对应规则，使得对于任意一个 $a\in A$，有且仅有一个 $b\in B$ 与其相应，则称 f 为定义在 A 而取值于 B 的**映射**或**函数**，并写为

$$f:A\to B$$

称 A 为 f 的**定义域**，记为 $\mathrm{dom}(f)$，称 $f(a)$ 为 a 的**像**，a 为 $f(a)$ 的**原像**。像的全体是 B 的子集，称为 f 的**值域**，记为 $\mathrm{rng}(f)$. 如果 $B=\mathrm{rng}(f)$，亦即 $\forall\ y\in B$，$\exists\ x\in A$，使得 $f(x)=y$，则称 $f:A\to B$ 为**映上的**或**满射**；如果 $\mathrm{rng}(f)\subseteq B$，则称为**映内的**。

今后，对 A 的任意子集 E，我们记

$$f(E)=\{f(x)\mid x\in E\}$$

并称它为集合 E 的像集。注意，这里集合 A,B 并不一定是数集，所以称 f 为函数，还不如称它为映射。我们看到映射 f 与有序对 $<a,f(a)>$ 的全体，也即映射的图可以视为同一，因此映射 f 也是关系，它也是 $A\times B$ 的子集。但根据映射的定义可知，如 $<a,b>\in f$，$<a,c>\in f$，则必 $b=c$. 这是映射有别于其它关系之处。

映射是可以多对一的，如果 $f(x)=f(y)$，必有 $x=y$，则称 f 是**单射**。如果 f 是单射又是满射，则称它为**双射**，或 1-1 **映射**。

设 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则由 $g\circ f(x)=g(f(x))$ 定义的映射 $g\circ f:A\to C$ 称为是 f,g 的复合映射。

设 $f:A\to B$ 为双射，对于每一个 $b\in B$，存在唯一的 $a\in A$，使