高等学校教学参考书

实变函数论

江泽坚　吴智泉合编

人民教育出版社

高等学校教学参考书

实 变 函 数 论

江泽坚 吴智泉 合编

人民教育出版社

序

随着微积分学的日益发展，人们在具体运算中，愈来愈感到Riemann积分（以下简称为旧积分）表现出严重的缺陷。正如大家所熟知的，要想逐项积分，或者交换两个无穷积分的次序，往往要加上一些很强的条件，但在许多问题中，这些条件是不具备的，或者虽然具备，但是验证起来麻烦，使得我们不能灵活的进行运算，所以我们确实有必要来对旧积分进行改革。

应该郑重提出，要摆脱限制，力求更灵活的运算，从来就是数学上的大问题。而这也往往正是物理学家对数学不满意之点。例如在近代物理学上越来越显得重要的广义函数论①，其所以被重视的原因之一，就在于它解决了一批极限交换次序的问题。再如我们设想没有Fubini定理②，那么，有着广泛应用的积分变换理论简直就很难发展了。

是否可以这样说，近代分析学，由于实际问题的需要，常常要针对着某些特殊的要求，来扩大旧的概念以包括新的对象，例如实数理论，广义函数论等；来引进新的极限手续，例如弱极限③，以及泛函分析学上针对着各种微分方程问题而引进的许多抽象空间④；使得我们能更好的描述物质世界，更灵活的进行运算。倘若如此，那末，本课程的主要内容测度论和积分论就正是这方面的典型。

我们认为Lebesgue测度和积分（以下简称为L-测度，L-积分）理论的产生，最初是为着使关系积分的运算充分灵便。许多时候是这样，问题的开始和结尾都是关系连续，甚至可微函数的。但是L-积分出现在运算过程中，就使运算简单化，免于纠缠在许多

繁琐的，非本质的问题上，比较快的达到结论。这正是 L-积分的优点。所以我们不该把注意力过分集中在 L-积分本身。

新的积分理论扩充了以前人们所研究的函数的范围和极限的意义。及至近代，我们可以清楚的看到这种推广是颇有些意思的。以下且举两个例子来说明这点。例如从某些物理问题所提出的偏微分方程边值问题，根本就没有可微的解。我们能否因此就认为那个物理问题没有意义呢？这显然是不对的。要知道方程中的系数并非绝对精确，它们也只是一种近似而已。所以我们应该用近似的观点来对待边值问题。为此 С.Л. Соболев 引进了广义解的概念，其中有一种就是利用 L_2 型空间[5]来作的。更进一步来说，假如我们从 Hamilton 原理出发，那么许多物理问题就首先表成关系积分的等式。只是对于所要求的解，加上二次可微之类的条件后，才得出通常的数理方程。所以广义解的产生是自然的，并且可以比古典解更好的反映物理实质[6]。倘若我们固执在可微函数范围内讨论物理问题，那末，面对着这种事实，是会感到出乎意料之外的。再以著名的 Riesz-Fisher 定理为例，微分方程，积分方程，计算方法等方面的许多重要的存在定理都是建立在它之上的。从这两个例子，我们可以进一步看到新的函数与极限理论对于旧理论所作的推广或者说补充，确实反映客观世界中的一些量的关系，它是探讨自然现象的一种数学工具。

时至今日，实变函数论已经渗入数学的许多分支中，首先应该提到的是 А.Н.колмогоров 把概率理解为一种抽象测度。他说“要把一向显得特异的概率论基本概念很自然地归入近代数学一般概念的行列中去，在 Lebesgue 测度论和积分论未产生以前，这问题几乎是没有解决希望的。有了 Lebesgue 的研究以后，集合测度与事件概率之间的相似性，以及函数的积分与随机变量的数学期望值之间的相似性就了如指掌了。这相似性还可以更推进一

步，例如独立随机变量的许多性质与正交函数的相应性质是完全相似的…，⑦”这样就使概率论的面目完全改观，并且拓广了概率论的研究范围。

Hilbert 的特征值理论,无穷维线性空间的概念和实变函数论的概念结合起来,就产生了 Hilbert 空间理论。迄至现在,它还是量子力学的较好的数学基础。它是一切抽象空间中最近似于欧氏空间者，泛函分析各分支因它的带动而得到了巨大的发展。自从 С. Л. Соболев 在偏微分方程中引入实变函数的观念以来,现在我们已经可以说,泛函方法是偏微分方程论中的重要方法了。总之,实变函数论促进了泛函分析的诞生，并且通过泛函分析而影响及于微分方程理论,计算数学和近代物理学。

实变函数论与 Fourier 分析,遍历理论,积分方程理论之间的紧密连系，那是众所皆知的。测度论给予空间点集一种定量的描述，从此出发来研究数学分析上的许多基本概念就得到比前大为深刻的结果⑧。除此之外，实变函数论还用于微分方程定性理论,动力系统,解析函数的边界值问题等方面。

根据上述大量事实，可见实变函数论有着广泛而且深刻的应用，确是数学的重要分支。它在各支数学中的应用成了现代数学的一个特征⑨。所以凡是想了解并且掌握近代数学的人，都应该认真的学习实变函数论这门课程。

实变函数论和那么多的数学分支有关,已如前述,但是在一般学校的教学计划中,那些分支如概率论，数理方程，泛函分析等都列在实变函数论之后,因此在本书中只能适当的提到它们,否则就会弄成喧宾夺主之势，弄得什么都没有学好。我们建议读者不要在那些粗略的,一提而过的地方，花费太多的精力，因为其中有些是不可能在现阶段彻底弄懂的。所有用小字排印的部分以及附录,是为读者进一步学习时参考之用,不一定要在课堂上讲授。根

据我们的经验此书正文部分，估计在60学时左右可以讲完。

最后要说一下此书编写的经过。在1958年春季吴智泉同志根据我过去的讲稿(已由原高等教育出版社出版)作了若干修改和补充，这次我们又在他所写讲稿的基础上，补充了一些材料，在文字方面也稍加润饰。但迫于时间，仓促成书，谬误之处，恐怕是难免的。我们诚恳的希望读者提出意见，以便将来有机会再版时，根据大家的意见来进行修改。

应该特别感谢我系党总支的正确领导和鼓励。几年来，总支一直提醒我们重视教材工作，并且给予许多原则性的指示。还该感谢我系的十余名教师同志帮助我们来作编辑加工。所以这本虽然并不成熟的书，倘若没有党的领导，关怀以及群众的热烈支持，也是不可能和读者见面的。

江泽坚

1961年4月15日

① I.海尔比林，广义函数论导引。(王光寅译)

② 见本书。

③ Л.А.刘斯铁尔尼克与B.И.索伯列夫，泛函分析概要，§24—25。(杨从仁译)

④ 吴新谋，数学物理方程，第三卷。

⑤ С.Л.索波列夫，数学物理方程，第XXII讲。(钱敏等译)

⑥ А.Д.亚历山大洛夫等，数学——它的内容、方法和意义，第二卷，第六章§6。(秦元勋等译)

⑦ А.Н.柯尔莫哥洛夫，概率论基本概念，序言。(丁寿田译)

⑧ 例如Looman-Menchoff的结果(见S. Saks, Theory of the Integral, 1937, Ch. vl, §5)以及Г.П.托尔斯托夫的一系列工作。(见注9所引书第一节)

⑨ Н.К.巴利等，度量性实变函数论，(三十年来的苏联数学)前言。(孙以丰译)

目　录

序 ……………………………………iv

第一章　集合及其基数 …………1

§1. 集合及其运算……………1

§2. 集合的基数………………6

§3. 可数集合…………………10

§4. 不可数集合………………15

第二章　点集 ……………………17

§1. 聚点、内点、边界点Bolzano-Weierstrass 定理…………18

§2. 开集、闭集与完备集………22

§3. p进位表数法……………27

§4. 直线上的开集、闭集及完备集的构造…………………30

§5. 点集间的距离与隔离性定理……………………………32

第三章　测度理论 ………………35

§1. 引言………………………35

§2. 外测度定义及其基本性质…………………………………36

§3. 可测集合…………………40

§4. 可测集合(续)……………47

§5. 乘积空间…………………51

第四章　可测函数 ………………57

§1. 非负可测函数……………57

§2. 可测函数…………………62

§3. Егоров 定理………………66

§4. 可测函数的结构. Лузин定理……………………………69

第五章　积分理论………………73

§1. 有界函数的积分的定义……73

§2. 新旧积分的关系…………79

§3. 积分的一些初等性质………81

§4. 可积函数…………………85

§5. 测度地逼近, Riesz 定理, Lebesgue 收敛定理………94

§6. 一般可测集合上的积分…108

§7. Fubini 定理………………112

§8. 不定积分…………………117

§9. Lebesgue-Stieltjes 测度与 Lebesgue-Stieltjes 积分……………………………130

第六章　平方可积函数…………137

§1. L_2空间…………………137

§2. 平均收敛…………………143

§3. 基本叙列, L_2空间的完全性…………………………147

§4. 可分离性…………………150

§5. 非局部列紧性……………152

§6. 坐标系统的引进…………153

§7. 封闭系统, В. И. Стеклов 的定理………………………160

§8. 三角系统…………………163

附录一　Bernstein 定理 ………165

附录二　关于集合的可测性 ……168

第一章 集合及其基数

§1. 集合及其运算

近代实变函数论，是在集合论的观点与方法渗入数学分析的基础上产生的。在这部理论中，集合论的许多基本概念，得到广泛的应用。因此我们现在必须先介绍一些有关集合论和点集论的基本知识。

要想把“集合”是什么说得很清楚，并不容易。正好象在几何中的“点”和“直线”一样，要说清楚什么是集合，必需引入一组特定的公理。不过“集合”这个概念对任何人来说，都不是陌生的。因此我们用不着在说明什么是集合这个问题上纠缠。我们认为一个集合就是被我们设想成了一个单一的整体的许多事物。集合中的“事物”以后就称为这个集合的元素。如果A是一个集合，x是A的元素，我们就记作$x\in A$；x不是A的元素则记为$x\overline{\in} A$。

设$p(x)$是某一与x有关的条件，所有合于这个条件的事物x作成一个集合，我们用$\underset{x}{E}[p(x)]$或$E[x;p(x)]$表示。例如$p(x)$表示“数x的平方等于1”，则$E[x;p(x)]$就是由1和-1这两个数作成的集合$\{-1, 1\}$。此处我们用$\{\ \ \}$表示把1和-1放在一起看成一个整体。这种加上括号以表示集合的办法，有时使用很方便，所以我们以后也将经常引用。如果$f(x)$是在某一集合E上定义的一个实函数，则$E[x;f(x)>a]$就是表示E中所有使$f(x)$的值大于a的x所组成的集合。

现在我们假设有A, B二集合，如果它们所包含的元素一样，则A和B就是同一个集合。此时我们说A和B相等，记作$A=B$。如果A是由$-1, 1$两个数所组成的集合$\{-1, 1\}$，B是由方程式

$x^2-1=0$ 的根所作成的集合，则 $A=B=\{-1,1\}$。

对于集合 A 和 B，如果属于 A 的元素都属于 B，则说 A 是 B 的子集，或者说 A 包含于 B，记为 $A\subseteq B$。A 包含于 B 有时也称为 B 包含 A，记作 $B\supseteq A$。

没有元素的集合称为空集，记为 0。我们认为任何集合都包含空集。

定理 1. $A=B$ 的充要条件是 $A\supseteq B$ 且 $B\supseteq A$。

定理 2. 对于任意集合 A,B,C，均有

i) $A\subseteq A$,

ii) 若 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

在实变函数论中，经常要将集合按照需要作各种各样的合并与分解。这就是说要进行集合的运算。

设 A,B 是二集合，如果将它们所共有的元素取出来作成一个新的集合，则这个新的集合就叫做 A 和 B 的积或交。记为 AB。因此

$$AB=E[x;\ x\in A \text{ 且 } x\in B]。$$

例如 $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{3,4,5,6\}$，则 $AB=\{3,4\}$。

从定义即知 $AB=BA$。

除了考虑两个集合的积以外，还需要考虑更一般的情况。设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是一串集合，定义 $\prod\limits_{i=1}^{n}A_i=E[x;$ 对于每一 $i\leqslant n$，都有 $x\in A_i]$，$\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i=E[x;$ 对于一切自然数 i，都有 $x\in A_i]$。

例 1. 若 $A_i=E\left[x;0\leqslant x<1+\dfrac{1}{i}\right]$，则

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=E\left[x;0\leqslant x<1+\frac{1}{n}\right],\ \prod_{i=1}^{\infty}A_i=E[x;0\leqslant x\leqslant 1].$$

例 2. 设 $A_i=E\left[x;i\leqslant x\leqslant i+\frac{3}{2}\right]$，则 $\prod_{i=1}^{\infty}A_i=0$.

例 3. 设 $A_i=E\left[x;-\frac{1}{i}<x<\frac{1}{i}\right]$，则

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=E\left[x;-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}\right],\prod_{i=1}^{\infty}A_i=\{0\}.$$

两个集合的和或并，我们定义作将两个集合中的元素合在一起所作成的新集合，A 和 B 的和记之为 $A+B$①，和有时也称为并集(注意，在作和 $A+B$ 时，A 与 B 所共有之元素，只"算"一次，比如 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$ 则 $A+B=\{1,2,3,4,5,6\}$ 而不是$\{1,2,3,4,3,4,5,6\}$)。写出来就是 $A+B=\underset{x}{E}[x\in A$ 或 $x\in B]$，自然这个和的定义也可以推广到一般的情形。即

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n=\underset{x}{E}[\text{有 } i\leqslant n,\text{使 } x\in A_i],$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}A_i=A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots=\underset{x}{E}[\text{有自然数 } i,\text{使 } x\in A_i]。$$

例 4. 设 $A_i=\{i\}$，$i=1,2,3,\cdots$，则

$$\sum_{i=1}^{n}A_i=\{1,2,\cdots,n\},\sum_{i=1}^{\infty}A_i=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}.$$

例 5. 设 $A_i=\underset{x}{E}[i-1<x\leqslant i]$，则 $\sum_{1}^{\infty}A_i=(0,\infty)$。

---

① 由于在向量空间中，除了要考虑 A,B 两集合的并集外，有时还要考虑向量加法，因此近来常把 $A+B$ 记作 $A\cup B$，$\sum_{i=1}^{n}A_i$ 记作 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$\sum_{i=1}^{\infty}A_i$ 记作 $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，由于相近的理由，将 AB 记作 $A\cap B$，$\prod_{i=1}^{n}A_i$ 及 $\prod_{i=1}^{\infty}A_i$ 记作 $\bigcap_{i=1}^{n}A_i$，$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$.

例6. 设 $A_i=\underset{x}{E}\left[-1+\frac{1}{i}\leqslant x\leqslant 1-\frac{1}{i}\right](i=1,2,3,\cdots)$，则

$$\sum_{i=1}^{\infty}A_i=(-1,+1)。$$

根据和与积的定义，直接可以推出：

定理3. 下列各式恒成立：

(1) $A+(B+C)=(A+B)+C,\ A(BC)=(AB)C$;

(2) $A(B+C)=(B+C)A=AB+AC$;

(3) $A+A=A,\quad AA=A.$

定理4.

(1) $AB\subseteq A\subseteq A+B$;

(2) $A_i\subseteq C(i=1,2,3,\cdots)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq C$;

(3) $A_i\supseteq C(i=1,2,3,\cdots)$，则 $\prod\limits_{i=1}^{\infty}A_i\supseteq C$;

(4) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(A_i+B_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i+\sum\limits_{i=1}^{\infty}B_i$;

(5) $A\sum\limits_{i=1}^{\infty}B_i=\sum\limits_{i=1}^{\infty}AB_i$.

[证明] 我们只证明(2)和(5)。(2)的证明，设 $x\in\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，则有 n，使 $x\in A_n$。而 $A_n\subseteq C$，所以 $x\in C$，这说明 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i\subseteq C$。

(5) 的证明 第一步：设 $x\in A\sum\limits_{1}^{\infty}B_i$，则 $x\in A$，且有 i_0 使 $x\in B_{i_0}$，于是 $x\in AB_{i_0}$，从而更有 $x\in\sum\limits_{i=1}^{\infty}AB_i$，所以 $A\sum\limits_{i=1}^{\infty}B_i\subseteq\sum\limits_{i=1}^{\infty}AB_i$。

第二步：设 $x\in\sum_{i=1}^{\infty}AB_i$，则有 i_0 使 $x\in AB_{i_0}$，从而 $x\in A$ 且 $x\in B_{i_0}$，当然 $x\in\sum_{i=1}^{\infty}B_i$，所以 $x\in A\sum_{i=1}^{\infty}B_i$，即 $\sum_{i=1}^{\infty}AB_i\subseteq A\sum_{i=1}^{\infty}B_i$。于是由定理 1 即得。

设 A,B 是二集合，我们定义 $A-B$ 为所有在 A 内而不在 B 内的元素所作成的集合，即 $A-B=\underset{x}{E}[x\in A$ 而 $x\bar{\in}B]$，显然，一般说来 $(A-B)+B$ 未见得等于 A。

如果 $S\supseteq B$，则定义 $S-B$ 为 B 对于 S 的余集，记作 $\mathscr{C}_SB$。如果没有必要标明集合 S 时，就记为 $\mathscr{C}B$，简称为 B 之余集。

定理 5.

(1) $\mathscr{C}S=0$, $\mathscr{C}0=S$;

(2) $A+\mathscr{C}A=S$, $A\mathscr{C}A=0$;

(3) $\mathscr{C}(\mathscr{C}A)=A$.

定理 6.

(1) 若 $A\supseteq B$，则 $\mathscr{C}A\subseteq\mathscr{C}B$;

(2) $\mathscr{C}(A+B)=(\mathscr{C}A)(\mathscr{C}B)$, $\mathscr{C}(AB)=\mathscr{C}A+\mathscr{C}B$;

(3) $\mathscr{C}\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\prod_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$, $\mathscr{C}\left(\prod_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$.

[证明] 以(3)的第二式为例。

第一步：设 $x\in\mathscr{C}\left(\prod_{i=1}^{\infty}A_i\right)$，即 $x\bar{\in}\prod_{i=1}^{\infty}A_i$. 所以至少有一个正整数 k 使 $x\bar{\in}A_k$。于是 $x\in\mathscr{C}A_k$，从而 $x\in\sum_{1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$，所以 $\mathscr{C}\left(\prod_{i=1}^{\infty}A_i\right)\subseteq\sum_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$.

第二步: 设 $x\in\sum_{1}^{\infty}\mathscr{C}A_i$,则至少有一正整数 k 使 $x\in\mathscr{C}A_k$。从而 $x\bar{\in}A_k$, 所以 $x\bar{\in}\prod_{i=1}^{\infty}A_i$, 即 $x\in\mathscr{C}\left(\prod_{i=1}^{\infty}A_i\right)$. 所以 $\sum_{i=1}^{\infty}\mathscr{C}A_i\subseteq\mathscr{C}\left(\prod_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

习　题

1. 证明定理 4 的(3)和(4)及定理 6 的(3)的第一式。
2. 设 $A\subseteq B$, 证明 $(B-A)+A=B$.
3. 证明 $(A-B)+B=(A+B)-B$ 之充要条件是 $B=0$.
4. $A-B=A\mathscr{C}B$.

§2. 集合的基数

在抽象地研究集合时（即对于集合中的元素的性质不加考虑时），一个集合中元素的多少应该是最基本的概念。比如一个由五个苹果作成的集合和一个由五本书作成的集合，当然是不同的两个集合，是互不相干的。但是如果我们不去计较它们的元素(苹果和书)的具体属性时，有一点总是共同的，即它们的元素个数是相同的，即都是由五个元素组成的，而一个由五个苹果组成的集合和一个由六个苹果组成的集合，虽然它们都是由苹果组成的，但在抽象地研究集合时，它们就没有这种共同点，可见在抽象地研究集合时元素的多少这是一个极其值得重视的属性。

对于由有限多个元素作成的集合，表示元素的多少的自然就是元素的个数，空集的元素的个数是零，而任意一个不空的有限集合的元素的个数则一定是一个正整数，为了求得一个有限集合 M 的元素的个数，我们只要一个个地去数它的元素就可以了，数到最后那个数是多少，元素的个数就是多少。但是我们一个个地去数集合 M 中的元素事实上也就是给 M 中每一个元素编上一个号，

比如数到了 5，那就是说从集合M中挑出了一个元素 e，把它叫做了第五号，因此一个集合M如果含有 n 个元素，则经过这个数的过程以后，就排成了下述形状：

$$M=\{e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n\}.$$

现在我们假设$M'=\{e'\}$是另外一个也是由 n 个元素组成的集合，则它自然也可以排成

$$M'=\{e'_1, e'_2, e'_3, \cdots, e'_n\}.$$

因为两个集合M和M'的元素个数是相同的，因此两个地方的 n 是同一个，如果我们叫M'中的元素 e'_i 和M中的元素 e_i 对应起来 $(i=1, 2, \cdots, n)$，则这个对应关系是一对一的，反之如果另有一个集合$M''=\{e''\}$，它的元素 e'' 能与M的元素 e 1—1 对应起来，则M''的元素的个数也自然就应该是 n。

以上的分析说明了一个极其重要的事实，即要说明两个有限集合M和M'具有同样多的元素我们并不需要真正知道它们元素的个数，比如都是由 1005 个元素组成，而只要能在它们的元素之间建立起一个 1—1 对应的关系来就可以了，这个事实启示我们如何去研究无穷集合中元素的多少，因为对于无穷集合来说，“元素的个数”这个概念是完全没有意义的。

定义. 设 A, B 是二集合，若有对应关系 φ 存在，使于 A 中任意点 x，通过 φ 在 B 中都恰有一点 y 与之对应，而于 B 中的任意点 y，也一定恰是 A 中某一点 x 通过 φ 在 B 中的对应点。则我们就说 A 与 B 1—1 对应。

对于两个集合 A 和 B，如果存在对应关系 φ，使 A 和 B 成为 1—1 对应，则 A 和 B 便叫做是具有相同基数的或对等的，记作 $A \sim B$. （注意：$A \sim B$ 与 $A=B$ 不一样）

显然，两个集合“具有相同的基数”是有限集合的“具有同样多的元素”这概念的推广，因为对于有限的集合来说，A 和 B 具有相

同的基数的充要条件就是它们的元素的个数相同。

例 1. 设 A 是全体正整数所作成的集合，B 是全体负整数所作成的集合，则 $A\sim B$。事实上只要令 A 中的每一正整数 n 对应 B 中的负整数 $-n$ 即可。

例 2. 设 A 是全体正整数所组成的集合，B 是全体偶数组成的集合，即

$$A=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\},$$
$$B=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}.$$

则 $A\sim B$，事实上只要令 n 对应于 $2n(n=1,2,\cdots)$ 即可。

注意 B 现在是 A 的一个真部分集合，因此例 2 揭示出一个极其重要的事实，即对于无穷集合来说，它可以和它的一个真部分集合 1—1 对应，这对于有限集合来说，显然是永远办不到的，这个现象说明了无穷集合与有限集合的区别。

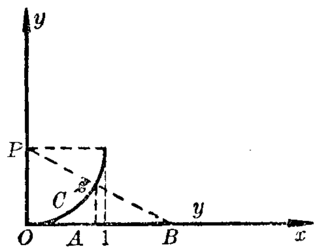
将来我们还可以证明(§3, 习题 6)任何一个无穷集合也必然和它的一个真子集对应。因此能与一个真子集 1－1 对应是无穷集合的特征性质。即一个集合是无穷集合的充要条件是它能与它的一个真子集 1－1 对应。这个性质我们可以用来作为无穷集合的定义，事实上直到目前为止我们也还没有定义过什么样的集合叫做一个无穷集合的。或许大家会想："不是有限个元素所作成的集合，就叫做无穷集合"。可是什么叫做"有限"呢？这还是没有加以适当定义的概念，因此定义一个集合是无穷集合的最好的办法是说它能与它的一个真子集 1－1 对应。当然如果是这样去定义无穷集合的话，"任何一个无穷集合都可以和它的一个真子集 1－1 对应"这个命题就是无需证明的。

例题 2 还说明一个重要性质，即"全量大于部分量"这条算术公理在讨论集合的基数时是不成立的，因为 B 是 A 的一部分，但是 B 的基数 $\overline{\overline{B}}$ 却是"等于" A 的基数 $\overline{\overline{A}}$ 的。

例 3. 设 A 是开区间 $(0,1)$ 上所有的点作成的集合，B 是半轴 $(0,\infty)$ 上所有的点作成的集合，则 $A\sim B$.

［证］ 设 C 是下图所划圆弧上的点作成的集合（不算端点）。

通过从P点的中心投影，我们自然可以将C中的z和B中元素y 1－1对应起来，而另一方面通过将圆弧往OX轴上的垂直投影又可以将A中的点x和C中的点z 1－1对应起来，于是A中的点x与B中的y也就1－1对应起来了。



（图 1）

到底什么是一个集合的基数呢？我们不打算给出一个明确的回答，而且事实上也很难给出一个明确的回答，因为这是一个很复杂的问题，我们只是说基数是集合的一个性质，任何两个集合，如果它们能对等，它们便有相同的基数，集合A的基数以后就记作$\overline{\overline{A}}$，A和B有相同的基数便记作$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$. 显然基数的相等是有对称性和传递性的，即若$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$则$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{A}}$，且$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{C}}$，则$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{C}}$（参看例3）。

大家现在或许会想大概任意两个无穷集合都可以使之1－1对应吧！假如真是这样的话，“对等”这个概念也就没什么大意思了。在§4中我们将证明确实在有些无穷集合之间是不能存在1－1对应的关系的。如果用基数来说，就是确实存在那样的无穷集合，它们具有互不相同的基数。

前面我们说过基数这概念是“元素个数”这概念的推广，引入基数的概念是为了研究无穷集合的元素的多少，因此我们需要考虑基数之间的大小关系。根据我们对有限集合元素多少的了解，我们给出下述定义。

定义. 设A，B是二集合，假如A与B的某子集1－1对应，而A不能与B本身1－1对应，则我们就说A的基数$\overline{\overline{A}}$小于B的基数$\overline{\overline{B}}$，即$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，或$\overline{\overline{B}}>\overline{\overline{A}}$。

显然，这个定义，确实是有限集合A的元素个数小于有限集合B的元素的个数这概念的推广，因为若A的元素的个数是n，B的元素的个数是m，$n<m$，则A必然可以和一个由n个属于B的元素所作成的一个B的子集B^* $1-1$对应。

上述定义中A不能和B本身$1-1$对应这个条件的添加，是因为若A是无穷集合，则它是可以和它的一个真子集$1-1$对应的(参看上面的例2和例3)，所以如果取$B=A$，则A和B的一个真子集$1-1$对应，可是我们当然不应该得出结论说$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{A}}$来的，因此我们必须加上$A$不和$B$本身$1-1$对应这样的限制。在加上了这样的限制以后，可以证明$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，永远不可能有两个同时成立。显然$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$和$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$，$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$和$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$是不会同时成立的。为了断定$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$和$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$不能同时成立，即需证明在$A$不和$B$对等的前提下，不可能既有$B$的真子集$B^*$与$A$ $1-1$对应，又有A的真子集A^*与B $1-1$对应，也就是说，需要证明下述的：

定理1. 设A，B是二集合，若有A之子集A^*及B之子集B^*存在，使$A\sim B^*$，$B\sim A^*$，则

$$A\sim B.$$

有关这个定理的证明，我们在附录中进行讨论。

[注] 基数有时也称作“势”，“蕴度”，“权”，“浓度”等。

习 题

1. 作出一个$(-1,1)$和$(-\infty,+\infty)$的$1-1$对应来，并写出这个对应关系的解析表示式。

2. 证明将一球面去掉一点以后，余下的点所作成的集合和整个平面上的点所作成的集合是对等的。

§3. 可数集合

定义. 凡能与全体自然数所作成的集合N对等的集合均称之为可数集合。因为全体自然数所作成的集合N是可以排成一个无穷叙列形式的，即

$$1,2,3,4,5,\cdots.$$