

高等学校教学用书

濾 流 理 論

上 册

В. И. 阿 拉 文 著
С. Н. 努美罗夫

高等教育出版社

高等學校教學用書



濾 流 理 論

上 冊

B. H. 阿 拉 文 著
G. H. 努美罗夫
王 仁 东 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書系根据苏联国立技术理論書籍出版社(Гостехиздат)出版的阿拉文(В. П. Аравин)和努美罗夫(С. Н. Нумеров)合著的“液体和气体在不变形多孔介質內流动的理論”(Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде)1953年版譯出。原書在序言中也把这个理論叫作濾流理論(Теория фильтрации),因此,中譯本为了簡便起見,就采用了“濾流理論”这个書名。原書經苏联文化部高等教育总署审定为高等工業学校的教学参考書。

本書中譯本分上下兩册出版。上册內容是关于濾流理論在苏联的發展簡史,濾流理論的物理基础和数学基础,以及一維和二維定常濾流的理論研究方法。主要的数学工具是保角变换法。使用不同形式的函数,可应用于有压濾流和無压濾流等不同类型的問題,并充分列举例題以說明其方法。

濾 流 理 論

上 册

В. П. 阿拉文, С. Н. 努美罗夫著

王仁东譯

高等教育出版社出版 北京宣武門內承恩寺7号
(北京市书刊出版业营业許可証出字第054号)

商务印书館上海厂印刷 新华书店发行

統一書号 13010·464 开本 850×1168 1/32 印張 10 10/16
字數 255,000 印數 1—1,500 定价(8) 洋 1.20
1958年9月第1版 1958年9月上海第1次印刷

序 言

水、石油和天然气在土壤或其他多孔介質里面流动的理論，也就是濾流理論，对于水力工程和水力土壤改良工程的建設和經營，对于开采石油和天然气以及矿冶工業，都有很大的价值。从苏維埃政权成立的第一年起，上面所說的工程技术部門在苏联迅速發展，而此項發展給予濾流理論和它在工程上的应用以强有力的推动。

联共第十九次代表大会的決議规划了苏联水力工程建設的又偉大又空前的發展。这样的建設計劃的实行，提供給濾流的研究者以新的重要任务，而促使这門科学繼續迅速地發展。

濾流理論的苏联学派的創始人是：H. E. 茹可夫斯基，H. H. 柏夫洛夫斯基，和 I. C. 列依宾松。这几位学者和他們的許多学生和后繼人的著作，是苏联濾流学派成長和發展的基础，而这一学派今天在世界科学界已居于领导地位。这本书是根据苏联学者的著作写成的，可显示这一学派的輝煌成就。

这本书是供給在水力工程学院、水利学院、石油学院和矿业学院學習濾流理論的学生用的，也可供这几个專業的研究者和科学工作者参考。因为这本书有这許多用途，所以相当广泛地包括了不可壓縮性重流体、气体和含气液体的濾流理論問題，而且著者努力要在統一方法的基础上来叙述所有这些問題。后一情况使著者不可能接触到若干实际上需要应用濾流理論的工程技术各部門中特有的專門問題。在編写这本书的时候，也照顧到在不同类型的学院中講授濾流理論的时候可以删去个别章节的便利。

在這本書里面，只講到在不变形多孔質里面的濾流。要注意，近几年来，在苏联出現了好些討論在变形的多孔質里面的濾流問題的著作，这些著作在這本書里面是沒有反映的。这方面的著作里面可举出：H. M. 盖尔西瓦諾夫，B. A. 福祿林，Л. E. 包尔兴等人对土質凝結問題的研究；A. H. 柏脫拉西夫，B. C. 衣絲陶米娜，Ю. M. 帥赫脫孟，Л. M. 明茲等人对于土壤的机械的冲刷和堆淤的研究，B. H. 沙尔客契夫，И. A. 却尔尼等人对彈性多孔質（濾流的彈性物系）里面輕度可壓縮性流体的濾流研究。这些問題，按照著者們的意見，應該在关于可变形多孔質里面濾流的理論的專著里面叙述。

在叙述不变形多孔質里面的濾流的时候，著者們考慮到达西定律的应用范围广，而且現在对于超出这定律应用限度的濾流問題研究得还比較少，所以就只限于討論服从达西定律的濾流。

在叙述計算濾流的理論方法的时候，著者只限于討論一些在理論方面不太复杂而已得到最大的發展和实际上可广泛应用的方法。在选择列入本書的工程問題的时候，首先注意到，这些問題應該能够清楚地說明应用这里所叙的理論的方法，而且这些問題本身在实际上也应该有比較广泛的应用。

在叙述研究濾流的实验方法的时候，特別提出 H. H. 柏夫洛夫斯基的电模拟法，因为这个方法特別在最近有很大的發展和实际上广泛的应用。

本書各章的内容可簡述如下：

第一章簡要地介紹濾流理論在苏联的發展历史。

第二章專叙述濾流理論的物理基础和数学基础。

第三章叙述不可壓縮性重流体、气体和含气液体的一維定常濾流的理論。

第四章至第八章叙述不可壓縮性重流体的二維定常濾流。

第九章叙述不可压缩性重流体和气体的平面定常流。

第十章叙述不可压缩性重流体、气体和含气液体的不定常流(一維的,二維的和平面的)。

第十一章叙述流的近似算法(片段解法,图解法和差分解法)。

第十二章叙述 H. H. 柏夫洛夫斯基的电模拟法。

第十三章简述研究流的实验室和现场方法。

書末附有各章所用 1952 年 6 月以前出版的参考资料的目录。

本書假定讀者已熟悉水力学和流体力学的基础,以及高等工业学校教学大纲所规定的高等数学教程内容,此外須补充复变函数理论和数学物理方程式方面比較不多的知識。关于后者的知識,在本書的附录里面有簡單的備考性質的叙述。

在編写本書的时候,虽然各章是不同著者所分別編写的,但各位編写人之間却保持着密切的联系。第一至第三章,第十一至第十三章,除第十二章的 §§135—136, §§141—144 以外是 B. И. 阿拉文所写的,第四至第十章和附录是 С. Н. 努美罗夫所写的,第十二章的 §§135—136, 141—144 是著者邀請 Н. И. 特路齐宁所写的。

这还是在苏联第一次出版的高等工业学校用的流理论教本,所以关于选择实际资料方面或方法方面,不免有許多缺点。讀者如来信提出自己對本書的批評和希望,推动本書的改进,是編者們所热誠感謝的。来信請寄下列地址: Москва, Б. Калужская, д. 15, Гостехиздат, Редакция литературы по механике.

上册目录

序言	6
第一章 濾流理論在苏联發展的簡史	1
§ 1. 濾流理論的实际价值和它的发展初期	1
§ 2. 在水力工程方面濾流理論的发展	5
§ 3. 濾流理論在石油和天然气开采問題中的發展	15
§ 4. 簡結	19
第二章 濾流理論的物理基础和数学基础	20
§ 5. 濾流現象的概念	20
§ 6. 土壤的物理性質	21
§ 7. 地下流体, 在土壤里面濾流的水的分类	24
§ 8. 濾流的理論方案	27
§ 9. 濾流的基本方程式	30
§ 10. 連續性方程式	34
§ 11. 濾流的阻力定律	39
§ 12. 土壤的濾流特性的确定	47
§ 13. 土壤按濾流性質的分类	53
§ 14. 不可壓縮性重流体的濾流方程式	57
§ 15. 有自由表面而沿着不滲透地層的流体濾流方程式	65
§ 16. 气体的濾流方程式	69
§ 17. 含气的(双相的)液体的濾流方程式	74
§ 18. 在介質的变滲透度和各向异滲透度情况下的濾流方程式	82
§ 19. 边界条件和初时条件	86
第三章 一維的定常濾流	89
§ 20. 一維的定常濾流的方程式	89
§ 21. 不可壓縮性重流体的均匀濾流	93
§ 22. 气体的均匀濾流	97
§ 23. 含气液体的均匀濾流	99
§ 24. 不可壓縮性液体的不均匀濾流	101
§ 25. 在长方形的土壤河床里面的不均匀濾流	104

§ 26. 沿着水平隔水平面的不均匀濾流,有透吸的存在	111
§ 27. 关于不均匀的濾流的几点补充	114
§ 28. 不可压缩性流体的对軸对称的有压濾流	118
§ 29. 鄰接的渗透性地層間有連系存在时,不可压缩性流体的有压对軸对称 濾流	121
§ 30. 气体的对軸对称濾流	125
§ 31. 含气液体的对軸对称濾流	128
§ 32. 重流体的对軸对称無压濾流	131
§ 33. 有地面透吸存在时的对軸对称無压濾流	135
§ 34. 关于向水井或油井濾流的补充	137
§ 35. 不可压缩性流体的球形濾流	143
§ 36. 气体的球形濾流	145
§ 37. 向着未完成井的濾流	147
第四章 不可压缩性重流体的二維定常濾流	150
§ 38. 关于二維濾流的概念	150
§ 39. 基本方程式,和复变函数理論的連系	151
§ 40. 边界条件	155
§ 41. 在划分两个土壤層,和两种密度不同的流体的边界上的条件	158
§ 42. 速度端圓	160
§ 43. 構作速度端圓区的例子	163
§ 44. 均質一各向异性土壤的情况	168
§ 45. 关于不可压缩性重流体的二維定常濾流問題的解法概況	172
第五章 保角变换的第一个方法(柏夫洛夫斯基的方法)	175
§ 46. 柏夫洛夫斯基的方法	175
§ 47. 有绝对不透水板箱的二維流床	176
§ 48. 在水流或水池底下的排水溝	201
§ 49. 关于柏夫洛夫斯基方法的其他应用	203
§ 50. 近似的保角变换法的应用	206
§ 51. 局所水头损失的总和計算法	212
§ 52. 有压的銳变濾流的基本形式的研究	213
§ 53. 应用局所水头损失总和計算法的例子	231
第六章 保角变换的第二个方法(維其尼科夫-柏夫洛夫斯基 方法)	239
§ 54. 維其尼科夫-柏夫洛夫斯基方法	239
§ 55. H. E. 茹可夫斯基的水平排水溝	241
§ 56. 关于环境板箱流动的 H. E. 茹可夫斯基問題	252

§ 57. 从曲线截面的沟渠出来的滤流	256
§ 58. 关于雅其尼科夫-柏夫洛夫斯基方法的其他应用	262
§ 59. 在土壤水的自由表面上有透吸或蒸发情况中的雅其尼科夫-柏夫洛夫斯基方法的变态法	264
§ 60. 向着 H. E. 茹可夫斯基水平排水窄沟群的滤流	265
第七章 保角变换的第三个方法(速度端图法)	270
§ 61. 速度端图法的第一方式	270
§ 62. 从灌溉系统的灌水道出来的水的滤流	272
§ 63. 在二维流床基础里面的有压-无压滤流	277
§ 64. 水平的滤过口	283
§ 65. 通过有曲线斜岸的堤坝的滤流	289
§ 66. 关于速度端图法的第一方式的其他应用	297
§ 67. 速度端图法的第二方式	299
§ 68. 铅直排水窄沟	301
§ 69. 土质建筑物的斜岸上, 土壤水的滤流	310
§ 70. 在曲线截面的疏水沟渠中的滤流	317
§ 71. 速度端图法的第三方式	322
§ 72. 通过土坝的三角形核心的滤流	323
§ 73. 速度端图法的第四方式	326

第一章 濾流理論在苏联發展的簡史

§1. 濾流理論的实际价值和它的發展初期 濾流理論研究液体、气体或它們的混合物(含气液体),在多孔質或多縫質里面运动的規律。濾流理論滿足了实际上的需要,是由于在各种結構的設計、建造和运用中,創造了計算濾流的方法。在水工結構的設計方面,計算濾流是非常重要的。在水工結構里面和濾流斗争的問題,决定着这些結構的構造和尺寸。在設計混凝土坝、木坝、土坝时或設計船閘和水閘时,情况就是这样的。水会濾流过这些結構的基础的下面,和环绕它們的四周——岸側。这时候濾流会加压力于結構,力圖冲去它底下的土壤。濾流对于結構的这种影响可能造成严重的事故。研究了过去水工結構所有的事故后可得到結論:这些事故大部分是由于濾流的毁坏作用而产生的。从这里可以看出,在設計水工結構时,正确地預測濾流,并确定防止它的方法,是怎样地重要了。

在建造水工結構的时候,用堤坝圍住的建筑穴內,應該把水放尽,而濾流水則要用放水設備,例如用降水井系統来阻止流入。用濾流計算来确定降水深度,以保証建筑穴內的正常工作,并确定进入放水設備的水流量;这些都是必要的。

在某些地区,由于攔水坝的承压作用,地下水的水平会漲高,就可用濾流理論来預先決定这区域内的濾流的方式。这类的預測对于从經濟观点来选择水电站在河流上的分布位置,有很大的价值。

濾流的計算对于选择排水系統的方案和構造,有决定性的价

值。在灌溉設計中，往往需要确定溝渠內的水因濾流而逃失的量。这些計算可由濾流理論所拟制出来的方法进行。

居民区域的給水往往必須利用土壤水。为此需利用各种聚水設備如水井、水槽、水渠，其产水量可以用濾流理論方法准确地計算出来。

濾流理論为現代开采石油和天然气的工程技术奠定了基础。在實踐中遇到的关于石油、天然气和含气液体的濾流問題，是复杂而多种多样的。这里可首先提出关于石油在極不相同的情况下流向油井系統的問題。这些不同的情况就是：油源区有不同的地形、石油受水排挤的情况、計算流体的彈性、計算儲油地層頂的滲透性、濾流狀況跟時間而变化的情况等等。还有和石油开采有关的一系列問題，都可以靠濾流理論的帮助来解决。属于这方面的問題的，举例說有在地層內油井的合理分布問題，关于石油和天然气的儲藏量的計算，关于把水或气体压灌入儲油地層以提高石油产量的問題以及其他的問題。

在采矿工業中可应用濾流理論来确定天然气和地下水对矿穴的流入量。在許多情况下，由矿穴中把土壤水汲出，是在矿穴經營中的重要工作，而且消耗很大的費用。

濾流理論在水文地質学的範圍內有广大的应用。在今天我們可以用根据于濾流理論的各种方法来研究濾流的形式和其特征（流量、速度和压力）。

必須着重指出，濾流理論在以上所举各項範圍內的应用，近几年来在苏联已获得很大的發展。

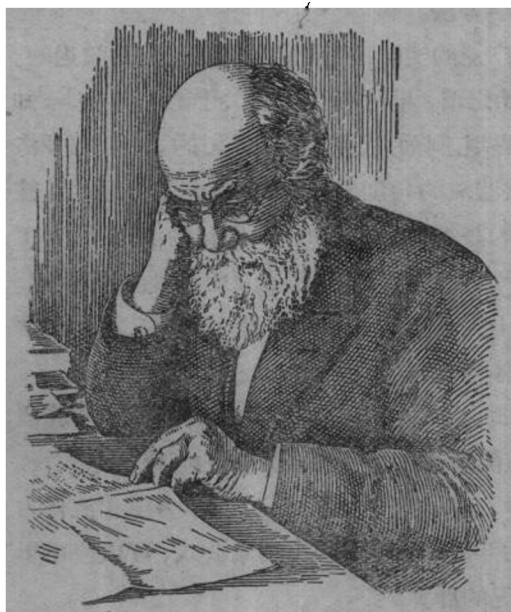
由于我們的水力工程，石油和采矿工業的大規模發展，旧日根据人为的假定，或粗糙的比拟法的濾流計算方法，已不再能应用于实际。因此，二十五年来苏联濾流理論的發展飞躍前进，那是很自然的。在解决濾流理論的問題的时候，广泛使用了現代的数学解

析法和实验研究的物理学方法。

濾流理論虽有这样广泛的实际应用,但其創始却是比較迟的。無疑地,在濾流理論創始之前,早已有了不少关于濾流的实际知識。俄国旧时所構造的堤坝,例如生活在十八世紀的 K. I. 福罗洛夫所設計的这种結構,从濾流的角度看来,大多是非常合理的。按照我們从文件上所得到的証据,在十七和十八世紀的俄国石油工作者,也遵守了许多关于石油在岩層里面濾流的正确的实际观点。但濾流理論的發展仅从十九世紀的后半叶开始。自然、科学的解决濾流問題的根据是流体濾过时所受阻力的定律。

在 1852 至 1855 年間,法国的工程师 T. 达西曾作砂土中濾流的試驗,而創造了水的濾流速度和水头損失之間的直綫关系式,称为濾流定律,或达西定律。有了这个关系式,以及水力学和流体力学的发展,在十九世紀后半叶,得到了几个理論公式,可以应用于实际上最簡單的濾流情况的計算。

以濾流直綫定律做根据的最早的濾流理論研究,是由 M. 瞿彼开始的。他的研究接触到土質河床內的濾流,和向着深达不透水的水平岩層面的水井的对軸匀称濾流。这些研究的时期是在十九世紀的六十年代。后来在八十年代,Φ. 福赫盖梅尔开始研究了較复杂的,有水平隔水面存在的濾流問題。但在 1889 年以前,还没有濾流的普遍理論和普遍微分方程式。这方面第一篇著作是由俄国杰出的数学家和力学家 H. E. 茹可夫斯基所写的。这篇著作的名称是“关于土壤下面水的运动的理論研究”。在这篇著作里, H. E. 茹可夫斯基导出了濾流的微分方程式。作这些方程式的推导时, H. E. 茹可夫斯基采用了濾流中阻力的观念。H. E. 茹可夫斯基指出了:水头是濾流地区坐标的函数,而且满足拉普拉斯方程式,他又指出了濾流和热傳导在数学上的类似性。属于这段时期的著作,还有 K. Θ. 林柏克关于土壤水向水平溝渠和水井的不



Н. Е. 茹可夫斯基。

定常濾流的研究。

在 1922 年, Н. Н. 柏夫洛夫斯基的一篇著作, “水工結構底下土壤水运动理論和它的主要应用” 給予濾流理論的發展一个新的推动。这篇論文是苏联濾流学派在水力工程方面發展的基础。

Л. С. 列依宾松根据二十年来所作理論和实验研究的結果, 發表了一系列关

于石油, 天然气, 和含气液体濾流的著作。在 1934 年, 列依宾松刊行了一本关于石油和天然气开采問題的濾流理論專著。这本專著表出了苏联濾流学派在另一方向中, 即关于石油和天然气的濾流問題方面的观念和方法。

苏联濾流学派在上述两个方向中, 为了解决不同的国民經济和建設部門所提出的問題而工作着, 但他們却有共同的理論和物理方面的基础。有些濾流理論的問題, 对于兩方面学者是共同的。例如对于濾流中阻力定律的进一步研究, 和井穴系統的操作問題等等。

几位著名的濾流学專家胜利地領導着上述兩方向的工作。

把苏联学者在濾流理論方面所有的建議一一記錄下来, 并列举他們的方法所解決的問題將成为一部巨大的著作。我們在 § 2

和 § 3 內，仅能講到濾流理論發展的几个主要阶段，并提到一些有特殊的理論价值和实际价值的問題。后面各章講到有关問題的时候，还将更詳細地談到苏联学者在濾流領域內的工作。

§ 2. 在水力工程方面濾流理論的發展 从本世紀二十年代开始，可認為是濾流理論發展的一个新阶段。在最近三十年来，在苏联出版了許多关于濾流理論和应用的科学著作。有些是屬於專著性質的，其他是关于各个問題的解案性質的。在这短短的篇幅內，想把三十年来关于濾流方面所出版的著作完全提到，是很困难的。所以在下面我們只能主要講到有原則性价值的著作。

上面已經提到，在 1922 年出版了 H. H. 柏夫洛夫斯基的一本專著“在水工結構底下土壤水运动理論和它的主要应用”。在这本淵博的專著里面，首先对于水工結構底下水的濾流問題給出了深入的科学見解。H. H. 柏夫洛夫斯基的著作开辟了水力工程的新途徑，在它的基础上，很快地創立了濾流理論的一个学派。現在我們來談談 H. H. 柏夫洛夫斯基專著里面最重要的几个原則。

H. H. 柏夫洛夫斯基研究了几个学者关于土壤里面的濾流所做的实验之后，就注意到濾流能够应用直綫定律的标准，應該是雷諾数。他分析了已有的实验紀錄之后，就給出



H. H. 柏夫洛夫斯基。

了表征着开始离开直綫定律的雷諾数“临界”值的第一个公式。后来苏联学者把 H. H. 柏夫洛夫斯基这个見解加以發展,提出了其他根据同一个原則的雷諾数临界值的公式。属于这类的公式有 B. H. 沙尔客契夫和 M. Д. 米里翁西科夫所得到的公式(發表于四十年代)。

关于这个问题,可指出:苏联学者还曾作了一系列关于濾流阻力定律的研究工作。

在 1912 年 A. A. 克拉斯諾波爾斯基提出了一个多縫石層內的濾流公式,根据这公式,水头的損失和濾流速度的平方是成正比的。H. II. 普齐萊夫斯基在 1930 年又提出了石層中濾流的类似公式。紧接着,С. В. 衣齐白希研究了粗粒材料中的濾流,并在他的論文里面,采用了濾流和雷諾数相关的公式。

在 1934 年,Л. С. 列依宾松把濾流定律加以广泛的普遍化;在这普遍化的基础上,得到了一个普遍的公式,把所有的濾流定律都包括进去了。

Е. А. 柴麦林和 И. И. 柴烏衣尔勃萊提出确定土壤濾流系数的新公式,这个公式是根据于土壤的机械分析的。

М. А. 維里根諾夫則研究了关于濾流中阻力的普遍公式的結構問題。

还可以注意到 Г. М. 洛米齐在 1951 年發表的著作里面,对于多縫石層內的濾流有广泛的研究。

研究了关于水工結構底下有压濾流問題的所有共同性之后, H. H. 柏夫洛夫斯基首先把这問題作为数学物理的問題来解釋。叙述了問題的綱要后, H. H. 柏夫洛夫斯基就应用保角变换法来做解答。这个方法使 H. H. 柏夫洛夫斯基解出了一系列关于水工結構的流床下面的濾流的特殊問題;这些問題在水力工程中有重大的实际价值。

H. H. 柏夫洛夫斯基的專著是关于有压濾流的。但后来濾流理論的發展指出了:保角变换方法在水工結構濾流計算問題的更广大的範圍內,也是最切实的理論方法。后来也用这个方法的一系列的交通方法来解决無压濾流的問題。

“土壤水运动理論”这篇著作的發表,是濾流學發展的新时代的开始。尽管 H. H. 柏夫洛夫斯基的著作刊印的份数極少,却在广大範圍內的学者和工程師間是熟知的。在二十年代,尤其在三十年代出現了 H. H. 柏夫洛夫斯基的學生們和後繼人們研究水工結構底下濾流一批著作。在这些著作里面,把 H. H. 柏夫洛夫斯基的二維濾流理論進一步發展了。例如, E. A. 柴麦林; H. T. 梅里新哥, H. K. 奇林斯基, H. H. 維里琴, C. H. 努美罗夫, И. Ф. 菲里却科夫等的著作,研究了一系列关于流床下面濾流有实际趣味的問題:例如在結構基礎底下某一地層中有承压土壤水的存在,在流床上有排水道或傾斜板樁的存在等等情况下的濾流。

H. H. 柏夫洛夫斯基对于水工結構底下有压濾流的著作中指出:如果結構的地下部分的輪廓是复杂的,若要用准确的方法来得計算的关系式,是極困难而往往是不可能的。所以有些学者的思想自然轉到創造近似的方法方面,尤其是近似的保角变换法。

参加發展近似保角变换法的有 H. T. 梅里新哥, M. A. 拉夫倫第叶夫, B. И. 西格尔, И. Ф. 菲里却科夫^①等人。

在 1920 年, H. E. 茹可夫斯基在其著作“經過堤壩的漏水”中討論了繞过土壩的水流問題,土壩具有板樁而立在無限深的透水性基礎上,在板樁底下形成浸潤曲綫。這個問題是用 H. E. 茹可夫斯基曾为研究水流运动而創造的“迹綫和母綫網絡”法来解出的。

① 詳細的情况參閱 § 50。

保角变换法的各种变通法,在研究均質土壤內的二維無压濾流时有很大用处。

Н. Е. 茹可夫斯基首先使用了一个特殊的函数,后来就称为茹可夫斯基解析函数。根据这个函数,В. В. 維其尼科夫和 Н. Н. 柏夫洛夫斯基又各自独立地提出了無压的濾流問題的解决方法。

用上面所說的方法,曾解决了一系列有趣味而实际上重要的問題。属于这类的問題有:从水渠中出来的濾流,土壤水向排水道或潭穴的流入,穿过堤坝的濾流等等。在这些問題的研究範圍內,除上述作者外,还可以提到 В. И. 阿拉文, А. П. 伏兴宁, С. Н. 努美罗夫, Ф. В. 尼里松-斯哥尼科夫等的著作。

一系列無压濾流問題,使用流体力学里面的速度端圖观念,可用保角变换法相当簡單而优美地解出。В. В. 維其尼各夫和 Н. Н. 柏夫洛夫斯基都应用了这个方法。有些無压濾流問題,則需用上述方法的变态方法。这种变态方法是 В. В. 維其尼科夫, Ф. В. 尼里松-斯哥尼科夫, В. В. 奇維松和 В. К. 李森客普夫所創造的。

除上面所提的作者外,用上述方法来研究新穎問題的还有 П. Я. 柏路巴林諾娃-客欽娜, С. Н. 努美罗夫, Н. Н. 維里琴 Ю. Д. 苏科洛夫等人。

П. Я. 柏路巴林諾娃-客欽娜建議在解有些濾流問題的时候,使用一种根据于应用微分方程式解析原理的方法。这个方法曾在 1938 年用来解穿过有透湿阶段的長方形堤坝的濾流問題。在 1932 年 В. В. 奇維松已給出同样問題的一个解法,可是計算是很复杂的。П. Я. 柏路巴林諾娃-客欽娜的方法又曾由 В. К. 李森客普夫补充过。

С. Н. 努美罗夫建議根据李曼-吉尔培脫問題来解無压濾流問題的方法。这个方法称为边界問題的方法,作者解出了一系列濾