内 容 简 介

本书是讲述流体流动有限元法的一本较系统的教科书，它在一定程度上反映了有限元法在流体力学各个领域中日益扩展的应用和最新成果．全书共分两大部分．第一部分介绍有限元法的基础知识，包括第一章的加权剩余法和变分法，第二章的有限元法和第三章的插值函数．第二部分着重介绍有限元法在流体力学若干领域中的应用，其中有理想流、多孔介质流动、浅水环流、粘性不可压缩流动和弥散问题．

本书可作为高等院校有关专业的教科书或参考书，也可供科技工作者参考．

J. J. Connor C. A. Brebbia

FINITE ELEMENT TECHNIQUES FOR FLUID FLOW

Newnes-Butterworths, 1976

流体流动的有限元法

〔美〕J. J. 康纳 C. A. 勃莱皮埃 著

吴望一 译

朱照宣 校

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街 137 号

中国科学院开封印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1981 年 1 月第 一 版	开本：787×1092 1/32
1981 年 1 月第一次印刷	印张：10 1/2
印数：0001—5,160	字数：237,000

统一书号：13031·1467

本社书号：2022·13—2

定价： 1.60 元

译校者的话

序　　言

直到最近，有限元法几乎只在结构工程问题中应用，但是现在它在其他工程领域中特别是流体力学中的潜在能力正越来越多地被人们所认识.

本书简要地介绍有限元法在流体力学中应用的最新进展. 作者主要想写一本易于自修的学生使用的教科书，但最后一部分内容无疑对于研究工作者也是有用的.

本书第一章讲基本原理，第二章和第三章介绍有限元的简单概念和模型，然后逐步引导读者研究更复杂的应用问题. 第四章讲流体运动的基本方程组，它之所以列入本书是想使本书更加完整，当然这并不是为了那些已经精通流体动力学的读者们写的. 第五章研究有势问题的解，第六章讲述多孔介质中粘性流动问题，这两类问题都很适合于用有限元法求解，而且工程师、应用数学家和物理学家对它们都有兴趣.

剩下的几章解决更专门一些的课题. 第七章讲如何用有限元法处理环流问题，第八章研究传质方程的解，第九章讨论不可压缩非定常一般流动问题的求解方法.

由于此书包含的材料多于标准课程中所能采用的，所以作者在目录中指出一些可以省略的章节，跳过它们无损于读者阅读其他部分. 对于沿海工程和输运型问题不感兴趣的学生还可以省去第七章和第九章.

最后，作者借此机会对那些使此书得以出版的先生们致谢，特别要感谢和作者一起搞研究的同事阿狄（R. Adey）博

士，洛顿赫斯(J. Rodenhuis)先生，司密斯(S. Smith)博士和王(J. Wang)博士。

作　者

1976年于索斯安普敦(Southampton)

目　　录

注：在导引性的课程中，带"*"号的标题可以略去不讲，而这并不影响内容的连贯性.

第一章　加权剩余法和变分法

1.1 基本定义

我们先来对函数序列

$$\phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \phi_3(x)\cdots\phi_n(x) \tag{1.1}$$

引入一些基本定义和基本性质．假设这些函数满足某些给定条件(称为容许条件)，这些条件牵涉到边界条件和连续程度．我们将在下面较详细地研究它们．

如果函数能线性地组合起来，例如

$$\phi = \alpha\phi_1 + \beta\phi_2, \tag{1.2}$$

其中 α 和 β 是数，则称它们为线性空间 R 的**元素**，并且下列性质成立：

$$\begin{gathered}\phi_1 + \phi_2 = \phi_2 + \phi_1,\\ (\alpha + \beta)\phi = \alpha\phi + \beta\phi,\\ \alpha(\phi_1 + \phi_2) = \alpha\phi_1 + \alpha\phi_2.\end{gathered} \tag{1.3}$$

两个函数 ϕ_1 和 ϕ_2 的**内积**用

$$\langle\phi_1,\ \phi_2\rangle \tag{1.4}$$

表示，它代表作用在 ϕ_1 和 ϕ_2 上的一种运算，比如

$$\langle\phi_1, \phi_2\rangle = \int_{x_1}^{x_2} \phi_1(x)\phi_2(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.5a}$$

或

$$\langle\phi_1,\ \phi_2\rangle_c = \int_0^t \phi_1(t-\tau)\phi_2(\tau)d\tau. \tag{1.5b}$$

第二种定义称为卷积．这里只考虑第一种定义．

对于实函数而言，内积具有下列性质：

$$\langle\phi_1, \phi_2\rangle = \langle\phi_2, \phi_1\rangle,$$
$$\alpha\langle\phi_1, \phi_2\rangle = \langle\alpha\phi_1, \phi_2\rangle,$$
$$\langle\phi_1, \phi_2 + \phi_3\rangle = \langle\phi_1, \phi_2\rangle + \langle\phi_1, \phi_3\rangle, \tag{1.6}$$
$$\begin{aligned}\langle\phi_1, \phi_1\rangle &> 0 \quad 若\ \phi_1 \neq 0\\ &= 0 \quad 若\ \phi_1 = 0,\end{aligned}$$

其中 $\phi_1 = 0$ 是空间R中存在的“零”函数.

可以取ϕ对自身的内积的平方根作为函数ϕ的尺度(范数),并用$\|\phi\|$表示之:

$$\|\phi\| = \sqrt{\langle\phi, \phi\rangle}. \tag{1.7}$$

如果只有当所有 α_i 都等于零时,

$$\alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \cdots + \alpha_n\phi_n = 0 \tag{1.8}$$

才成立,则称函数序列(1.1)为线性无关.

如果给定某一容许的但完全任意的函数 u,总可以找到一个数N和一组常数 α_i 使

$$\left\|u - \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\phi_i\right\| < \varepsilon, \tag{1.9}$$

其中 ε 是任一小量,则称此线性无关序列为完备的.

函数 ϕ_i 称为基函数,系数 α_i 是傅里叶(Fourier)系数.

如果规范化基函数是相互正交的,则

$$\langle\phi_i, \phi_j\rangle = 0, 若\ i \neq j,$$
$$\langle\phi_i, \phi_i\rangle = 1. \tag{1.10}$$

在线性无关的完备序列ϕ_i中取每一个附加项将引进一个相应的 α_i. 对于N级近似而言,我们有

$$u^{(N)} = \sum_{1}^{N} \alpha_i\phi_i,$$

于是当 $N \to \infty$ 时

$$\|u^{(N)}\| \to \|u\|. \tag{1.11}$$

对于某一相互正交的完备序列来说（如果序列不正交我们认为总可以将它化成正交的），$u^{(N)}$ 的范数是:

$$\|u^{(N)}\| = \sqrt{\left\{\left\langle \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \phi_i, \ \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \phi_j \right\rangle\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{N} \ \sum_{j=1}^{N} \ \alpha_i \alpha_j \langle \phi_i, \ \phi_j \rangle\right\}}, \tag{1.12}$$

因为 $i \neq j$ 时 $\langle \phi_i, \ \phi_j \rangle = 0$，我们有

$$\|u^{(N)}\| = \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{N} \ \alpha_i^2 \langle \phi_i, \ \phi_i \rangle\right\}} \tag{1.13}$$

和号中的每一项都是正的，因此当N增加时，$\|u^{(N)}\|$ 是从下面逼近 $\|u\|$ 的，即

$$\|u^{(N)}\| \leqslant \|u^{(M)}\| \leqslant \|u\|, \text{ 当 } N < M \text{ 时}. \tag{1.14}$$

一个算子 $\mathscr{L}()$ 定义为这样一种过程，当它作用到一给定函数 u 上时，就产生另一函数 p:

$$\mathscr{L}(u) = p. \tag{1.15}$$

如果

$$\mathscr{L}(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha \mathscr{L}(u_1) + \beta \mathscr{L}(u_2), \tag{1.16}$$

则此类算子称为线性的．上述算子定义是一般的，但是我们在这里只考虑微分算子．

对于算子也可以定义类似于矩阵的对称性和正定性一类的性质．考虑方阵 $\mathbf{a} = [a_{ij}]$．若 $\mathbf{a}^T = \mathbf{a}$ 则称 $\mathbf{a}$ 是对称的，其中 $\mathbf{a}^T$（$\mathbf{a}$ 的转置）是 $\mathbf{a}$ 的行列对换后形成的方阵． 对称性要求 $a_{ij} \equiv a_{ji}$．另一种定义对称性的方法是：对于任意的两矢量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 要求

$$\langle \mathbf{y}, \ \mathbf{ax} \rangle \equiv \langle \mathbf{x}, \ \mathbf{ay} \rangle. \tag{a}$$

将式 (a) 展开并注意到 $(\mathbf{bc})^T = \mathbf{c}^T \mathbf{b}^T$，有

$$\langle \mathbf{y}, \ \mathbf{ax} \rangle = \mathbf{y}^T \mathbf{ax}, \tag{b}$$

$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{a}\mathbf{y}\rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{a}\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{a}^T\mathbf{x}. \tag{c}$$

这就证明式(a)等价于 $\mathbf{a}^T = \mathbf{a}$. 后一种定义更便利于推广到算子中去. 正定性定义为：对所有的 $\mathbf{x}$ 有

$$\langle \mathbf{x},\ \mathbf{a}\mathbf{x}\rangle \geqslant 0, \tag{d}$$

其中等式只有当 $\mathbf{x}$ 是零矢量时才成立. 这个性质在确定解的方案以及用变分叙述问题时特别重要.

以此为基础，我们考虑区域 V 内的一组齐次方程

$$\mathscr{L}(u) = 0, \quad x \in V. \tag{1.17}$$

作 $\mathscr{L}(u)$ 和另一函数例如 v 的内积. 在这里式(b)，式(c)中的矩阵转置运算等价于 $\langle \mathscr{L}(u),\ v\rangle$ 的分部积分，而且分部积分一直进行到 u 的导数消失时为止. 这就导致内积的"转置"形式和边界项. 结果可写为：

$$\langle \mathscr{L}(u), v\rangle = \langle u,\ \mathscr{L}^*(v)\rangle + \int_S (F(v)G(u) - F(u)G^*(v)\,\mathrm{d}S, \tag{1.18}$$

其中 S 是外表面，而 F，G 是微分算子，它们的形式在分部积分后自然形成. 根据定义，$F(v)$ 包含第一次分部积分时得到的 v 项而 $G(u)$ 包含对应的 u 项. 下面将举出若干例子说明上述运算.

算子 $\mathscr{L}^*$ 称为 $\mathscr{L}$ 的伴随算子. 如果 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}$，则称 $\mathscr{L}$ 为自伴算子. 此时也有 $G^* = G$. 算子的自伴性类似于矩阵的对称性. 除了决定算子是否自伴之外，分部积分还产生两种不同类型的边界条件. 规定 $F(u)$ 的一类称为本质边界条件，而规定 $G(u)$ 的那一类则称为非本质或自然边界条件. 我们可以在区域边界上指定任一类边界条件，但是为了使解是唯一的，必须在某些点上满足本质边界条件. 令 S_1 和 S_2 代表整个表面 S 互余的两部分，则自伴问题（$\mathscr{L}^* = \mathscr{L}$）的边界条件可叙述为：

$$\begin{aligned}&\text{在 } S_1 \text{ 上规定 } F(u),\\&\text{在 } S_2 \text{ 上规定 } G(u),\\&S_1 + S_2 = S.\end{aligned}\tag{1.19}$$

自伴算子的正定性可定义为要求

$$\langle \mathscr{L}(u),\ u\rangle > 0,\tag{1.20}$$

其中 u 是所有满足齐次型边界条件的非平凡函数. 要确定 $\mathscr{L}$ 是否正定，可以把内积积分出来，一直积到积分中只包含同阶导数的乘积. 这个运算是 $\mathscr{L}$ 变到 $\mathscr{L}^*$(即方程(1.18))的中间运算.

例 1.1

(i) 考虑

$$\mathscr{L}(u) = \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2},\ 0 < x < 1.\tag{a}$$

作出内积,积分后给出

$$\begin{aligned}\int_0^1 v\mathscr{L}(u)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 v\,\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x\\&= \left| v\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\&= \left| v\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right|_0^1 + \int_0^1 u\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}\,x.\end{aligned}\tag{b}$$

利用式 (1.18) 的记法,我们有

$$\begin{gathered}F(v) = v,\\G(u) = \mathrm{d}u/\,\mathrm{d}x,\ G^*(v) = \mathrm{d}v/\,\mathrm{d}x,\\\mathscr{L}^* = \mathscr{L}.\end{gathered}\tag{c}$$

可见算子是自伴的. 规定 u 的是本质边界条件，规定 $\mathrm{d}u/\,\mathrm{d}x$ 的是自然边界条件.

回到式 (b), 若取 $v = u$ 并满足齐次边界条件,第一次分部积分给出

$$\int_0^1 u\mathscr{L}(u)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x. \tag{d}$$

于是 $\mathscr{L}(u) = \mathrm{d}^2u/\mathrm{d}x^2$ 是负定的.

(ii) 其次我们考察一个更一般的算子

$$\mathscr{L}(u) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(a_1(x)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_2(x)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) + a_3(x)u,$$

$$0 < x < 1. \tag{a}$$

第一次分部积分给出

$$\int_0^1 v\mathscr{L}(u)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left\{a_1\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2} - a_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + a_3uv\right\}\mathrm{d}x + \left| v\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_1\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right) + a_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right\} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\left\{-a_1\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right\}\right|_0^1. \tag{b}$$

如果我们继续做下去，我们将会发现 $\mathscr{L}^* = \mathscr{L}$. 从式 (b) 导出的边界项归纳如下:

本质边界条件

$$\text{规定}\begin{cases} F_1(u) = u, \\ F_2(u) = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}. \end{cases} \tag{c}$$

自然边界条件

$$\text{规定}\begin{cases} G_1(u) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(a_1\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right) + a_2\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \\ G_2(u) = -a_1\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}. \end{cases} \tag{d}$$

考虑到式 (b)，我们可以写出

$$\langle u, \mathscr{L}(u)\rangle = \int_0^1 \left\{a_1\left(\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 - a_2\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)^2 + a_3u^2\right\}\mathrm{d}x, \tag{e}$$

其中 u 满足齐次边界条件. 如果在区间 $0 < x < 1$ 中 a_1,

$a_3 > 0$, $a_2 < 0$, 则算子显然是正定的.

(iii) 对

$$\mathscr{L}(u) = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u \tag{a}$$

进行运算给出

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + u \right) v \, dx = \int_0^1 \left(\frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{dv}{dx} + v \right) u \, dx$$

$$+ \left| v \left(\frac{du}{dx} + u \right) - u \left(\frac{dv}{dx} \right) \right|_0^1. \tag{b}$$

由于存在一阶导数项,此算子是非自伴的. 奇阶导数项将导致 $\mathscr{L}^*$ 和 G^* 中出现斜对称项. 规定 u 的是本质边界条件. 本例取规定 du/dx 的为非本质(自然)边界条件.

1.2 加权剩余法

加权剩余法是一种逼近微分(或积分)方程组解的数值方法. 设方程的形式为:

$$\mathscr{L}(u_0) = p, \quad x \in V, \tag{1.21}$$

边界条件为

$$\mathscr{S}(u_0) = g, \quad x \in S, \tag{1.22}$$

其中 x 代表空间坐标 x_1, x_2 和 x_3; S 是连续体的外表面; u_0 是准确解. 函数 u_0 由一组函数 $\phi_k(x)$ 的组合

$$u = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k \tag{1.23}$$

所逼近,其中 α_k 是未定参数, ϕ_k 是取自完备序列的线性无关函数.

我们一开始要求这些函数满足问题中所有边界条件 [方程 (1.22)] 并且具有足够程度的连续性使得式 (1.21) 的左边部分不等于零. 下一节将讨论一种对边界条件放松要求的方

法.

将式(1.23)代入式(1.21)得到误差函数 ε:

$$\varepsilon = \mathscr{L}(u) - p \neq 0 \tag{1.24}$$

这样的误差函数称为剩余. 注意对于准确解来说 ε 等于零. 我们在平均意义下迫使此误差为零, 为此令剩余的加权积分等于零:

$$\langle \varepsilon, \omega_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{1.25}$$

其中 w_i 是一组权函数. 下面我们首先回顾几种加权剩余法, 然后再详细地讨论伽辽金 (Galerkin) 方法.

(a) 配置法

在此法中, 我们只在一组选定点上满足微分方程. 对于给定的逼近函数

$$u = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \phi_k \tag{1.26}$$

我们有:

$$\varepsilon = \mathscr{L}(u) - p = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \mathscr{L}(\phi_k) - p. \tag{1.27}$$

在区域中 N 个点上强加条件 $\varepsilon = 0$, 由此来确定参数 α_i.

我们可以将这些条件表成和式(1.25)相同的形式. 为此引进狄拉克 (Dirac) 函数 $\Delta(x_i)$, 使得对于区间 $x_i \pm c$ 外的 x 有 $\Delta(x_i) = 0$, 同时

$$\int_{x_i-c}^{x_i+c} \Delta(x_i)\, \mathrm{d}x = \int_{x_i-c}^{x_i+c} \Delta_i\, \mathrm{d}x = 1, \tag{1.28}$$

其中 c 是一小数(对点配置来说 $c \to 0$). 于是配置就等价于

$$\langle \varepsilon, \Delta_i \rangle = \langle \mathscr{L}(u) - p, \Delta_i \rangle = 0$$
$$i = 1, 2, \cdots N \tag{1.29}$$

例 1.2

考虑区域 $0 < x < 1$ 中的二阶方程

$$\mathscr{L}(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + u + x = 0, \tag{a}$$

其边界条件是:

$$\begin{aligned} x = 0 \text{ 处} \quad u = 0, \\ x = 1 \text{ 处} \quad u = 0. \end{aligned} \tag{b}$$

我们建议取

$$u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x + \cdots) \tag{c}$$

为逼近函数,对于任意的 α_i 它都满足边界条件.

如果在逼近函数中只取两项

$$u = x(1-x)(\alpha_1 + \alpha_2 x), \tag{d}$$

则误差函数为:

$$\begin{aligned} \varepsilon = \mathscr{L}(u) - p = x + (-2 + x - x^2)\alpha_1 \\ + (2 - 6x + x^2 - x^3)\alpha_2. \end{aligned} \tag{e}$$

我们选取 $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{1}{2}$ 为配置点. 这样的选取要求

$$\begin{bmatrix} \frac{29}{16} & -\frac{35}{64} \\ \frac{7}{4} & \frac{7}{8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix}. \tag{f}$$

解出式 (f) 得:

$$\alpha_1 = \frac{6}{31}, \ \alpha_2 = \frac{40}{217},$$

$$u = \frac{x(1-x)}{217}(42 + 40x). \tag{g}$$

将此结果和准确解进行比较,可作出下列表格:

x	$u_{近似}$	$u_{准确}$
0.25	0.045	0.044014
0.50	0.071	0.069747
0.75	0.062	0.060056

$$u_{准确}=\frac{\sin x}{\sin 1}-x. \tag{h}$$

(b) 最小二乘法

在此方法中,我们取误差对其自身的内积,并要求这样得到的量为极小. 从

$$\varepsilon=\mathscr{L}(u)-p \tag{1.30}$$

出发,我们定义 F 为

$$F=\langle\varepsilon,\ \varepsilon\rangle=\langle\mathscr{L}(u)-p,\ \mathscr{L}(u)-p\rangle. \tag{1.31}$$

如果逼近函数是

$$u=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\phi_k \tag{1.32}$$

则对 α_i 微分 F 并令

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=0\quad i=1,\ 2,\cdots N \tag{1.33}$$

就可使 F 极小化. 这给出

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\langle\varepsilon,\varepsilon\rangle=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\{\langle\mathscr{L}(\sum\alpha_k\phi_k),\mathscr{L}(\sum\alpha_k\phi_k)\rangle-2\langle\mathscr{L}(\sum\alpha_k\phi_k),p\rangle+\langle p,p\rangle\}. \tag{1.34}$$

当 $\mathscr{L}$ 是线性算子时,方程组 (1.33) 简化为:

$$2\langle\mathscr{L}(\sum\alpha_k\phi_k),\ \mathscr{L}(\phi_i)\rangle-2\langle\mathscr{L}(\phi_i),\ p\rangle=0, \tag{1.35}$$

它也可写成为

$$\langle\mathscr{L}(\sum\alpha_k\phi_k)-p,\ \mathscr{L}(\phi_i)\rangle=0. \tag{1.36}$$

例 1.3

考虑例 1.2 中处理的方程. 这里我们也取二阶近似.

$$u=x(1-x)\alpha_1+x^2(1-x)\alpha_2, \tag{a}$$

$$\varepsilon=x+(-2+x-x^2)\alpha_1+(2-6x+x^2-x^3)\alpha_2. \tag{b}$$

平方 ε 并对 α_1, α_2 极小化此函数得: