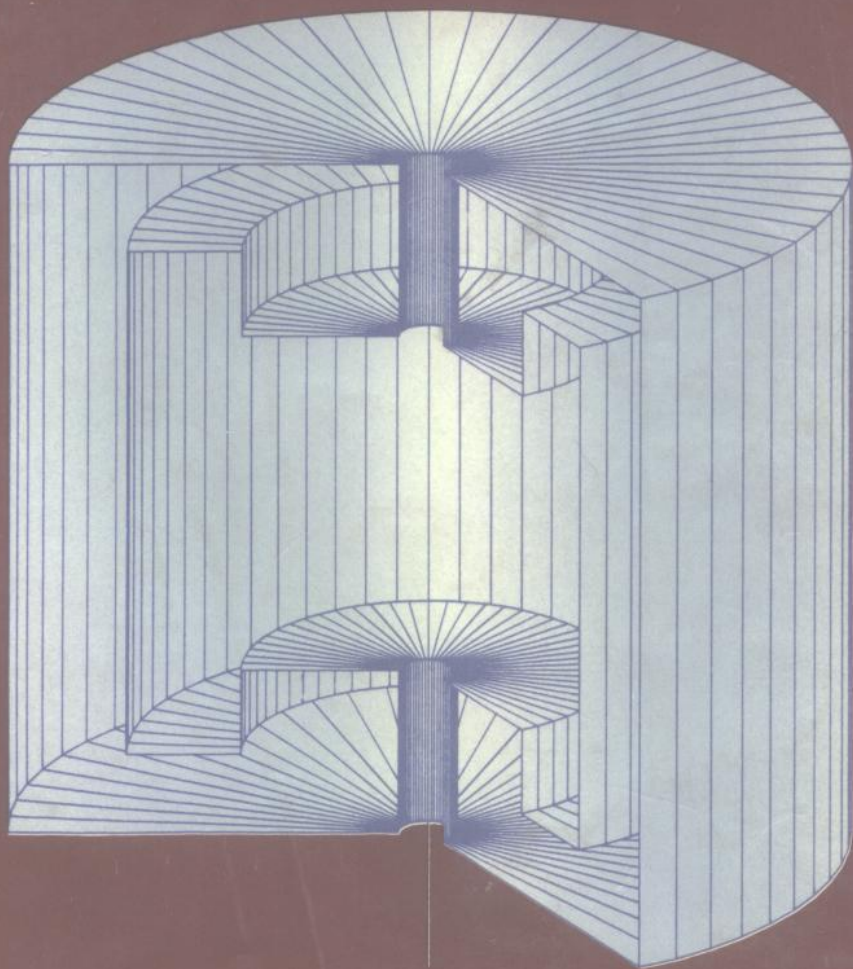


电磁场 理论及计算

许永兴 编著



同济大学出版社

电磁场理论及计算

Theory and Calculation of Electromagnetic Field

许永兴 编著

同济大学出版社

(沪) 新登字第 204 号

Dt49/10
内 容 提 要

本书在总体上把位函数的非齐次赫姆霍兹 (Helmholtz) 方程的求解作为最普遍的讨论基础, 对电磁场的计算手段介绍了经典差分法、基于变分原理的差分法、各种网格形状的有限元素法和积分方程求解法等。书中内容包括: 电磁场基本理论、变分法基础、二维和三维静电磁场计算、稀土永磁铁计算、波导及谐振腔中高频电磁场计算等。本书可作为大学电机、电器、电物理等专业的本科生和研究生教材, 也可供相关专业的科研和工程技术人员阅读参考。

责任编辑 张平官
封面设计 陈益平

电磁场理论及计算

许永兴 编著

同济大学出版社出版

(上海四平路 1239 号 邮编 200092)

新华书店上海发行所发行

同济大学印刷厂印刷

开本: 787×1092 1/16 印张: 11.25 字数: 280 千字

1994 年 12 月第 1 版 1994 年 12 月第 1 次印刷

印数: 1—1000 册 定价: 12.00 元

ISBN7-5608-1529-4/TM·26

序

电磁场理论是研究电磁场中场源和场量之间、电场和磁场之间相互关系的一门科学，它们的全部行为由麦克斯韦 (Maxwell) 方程所表征。为了计算和表述原因，引进了动态位的概念，无论是动态标量位还是动态矢量位，都可由统一的赫姆霍兹 (Helmholtz) 方程来描述。电磁场理论是现代科学技术的重要基础之一，因此，它在众多的领域得到了广泛的应用，但由于具有偏微分方程形式的赫姆霍兹方程本身的复杂性以及具体应用场合的边界条件的多样性，使电磁场理论长期以来在实际应用中遇到了困难。

在本世纪 60 年代，由于计算机技术上的突破和数值计算方法的兴起，使得用计算机方法来研究电磁场规律成为可能，从而使电磁场的计算出现了十分重要的转机。整个 70 年代是电磁场数值计算的重要发展阶段，从电磁场计算的各种计算量的分析比较、其相应数学方程的归结到各种数值计算方法的推出，都得到了实质性进展。到 80 年代以后，这个势头达到高潮，它主要表现在二维电磁场问题相对成熟，并被广泛地应用于工程技术设计和科学研究的各有关领域中。学科的主攻方向已对准三维问题及非线性解法的优化。同时，由于高磁能积的稀土永磁的产生和超导磁体应用日益受到人们重视，电磁场的计算正向纵深方向发展。

电磁场的计算机方法近年来得到迅速发展，它主要来自两个方面的激励：一个是电机、电器、波导系统等技术学科发展的需求。科学进步使得它们对场量的研究由积分意义上平均值的估算提高到微分概念上空间分布的精确计算。这种更高水平上的研究和探索，对电磁场计算方法提出了全新的要求；另一个发展的动力来自于核物理与高能物理及核能源利用的领域。能量不断提高的粒子加速器的建造，对加速器中电磁场分布的准确性提出了越来越高的要求。粒子加速器是带电粒子在电磁场作用下获得能量的装置，为了使加速过程稳定，应精确地配置对带电粒子聚焦约束和加速的电磁场。众所周知，大型粒子加速器耗资十分浩大，即使在发达国家，往往也不是一个国家的国力所能承担的，因而科学家特别追求设计方法的可靠性和精确性，而电磁场的计算机方法正是顺应了这种现实需要而迅速发展起来的。

从电机或高频波导系统角度来描绘电磁场的计算，国内已见专著。本书将从

电物理的角度来阐述电磁场的计算机方法，并用一定篇幅来讨论该领域的前沿：三维电磁场问题的求解和稀土永磁系统的分析计算。本书是根据作者在中国科学院近代物理研究所为电物理装置专业的硕士研究生讲授“电磁场理论及计算”课程所用讲稿修订而成的。它集中了作者近年来在这个领域中的科研成果和散见于国内外论著中的有用资料，力求反映这个学科在国际上的主要成果。

在本书稿的写作过程中，作者一直得到中国科学院近代物理研究所魏宝文研究员的关心和支持；在三维磁场的修正标量位算法探讨中，得到复旦大学谷超豪教授和李大潜教授的具体帮助和有益的建议；在超导磁体计算方法研究上，得到美国德克萨斯州立大学的 D.Youngblood 教授许多帮助和鼓励；上海科技大学（现上海大学）许澍均教授认真审阅了本书全稿，提出了不少宝贵的意见；上海电视大学黄清云校长及刘煜海校长助理十分关心本书的出版，在此一并表示衷心感谢！

由于作者学识所限，书中欠缺和不足在所难免，恳望读者批评指正。

作者
1994.7

目 录

序		
第一章	导言	1
第二章	电磁场的基本理论	16
§ 2-1	麦克斯韦方程组	16
§ 2-2	麦克斯韦方程积分形式及交界面条件	17
§ 2-3	位函数, 罗仑兹规范及位函数方程	19
§ 2-4	非齐次赫姆霍兹方程变分形式及其尤拉方程	22
§ 2-5	电磁场解的唯一性	24
第三章	变分法的基本概念	26
§ 3-1	伯努利命题	26
§ 3-2	泛函、变分以及变分预备定理	27
§ 3-3	多元函数泛函及其极值问题	30
第四章	二维静电磁场计算	36
§ 4-1	经典有限差分法	36
§ 4-2	基于变分原理的差分法	43
§ 4-3	三节点三角形单元的有限元素法	46
§ 4-4	六节点三角形单元的有限元素法	51
§ 4-5	边界条件的处理	57
§ 4-6	轴对称系统中三角形单元的有限元素法	67
§ 4-7	一个实用计算程序的介绍	71
第五章	三维静电磁场计算	81
§ 5-1	修正标量位 ψ 及矢量 C 描述有源磁场, 四面体单元有限元素法	81
§ 5-2	有限元素法中等参数概念, 八节点单元有限元素法	90
§ 5-3	有限元素法在积分方程中应用, 磁化强度 M 为计算量	99
第六章	稀土永磁场计算及其应用	106
§ 6-1	稀土永磁的 $H-B$ 关系及其静磁方程	107
§ 6-2	永磁铁产生的三维磁场的计算	108

§ 6-3	用复数表示法计算永磁二维磁场	109
§ 6-4	稀土永磁的多极子	113
§ 6-5	稀土永磁的二维有限元素法	122
第七章	高频电磁场	125
§ 7-1	波导理论的一般概念	125
§ 7-2	赫兹矢量 Z_e , Z_m 及其波动方程, Z_e , Z_m 物理意义的解释	131
§ 7-3	二维波导的有限元素法及其边界条件的建立	135
§ 7-4	谐振腔(TE 模式和 TM 模式)的频率, 品质因数及其 功率损耗计算	142
§ 7-5	谐振腔计算的应用	147
附录 A	重要的矢量公式和积分定理	150
附录 B	$\iint_s L_1^\alpha L_2^\beta L_3^\gamma dx dy = 2S \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)}$ 公式推导	152
附录 C	有限元素法计算二维静磁场程序 MT2D	155
参考文献		

第一章 导 言

电磁场理论的计算机方法在电机、电器、微波技术以及电物理装置等领域的设计计算中有着广泛的应用，并越来越被人们所重视。本书主要是从粒子加速器——一种主要的电物理装置设计的角度来讨论电磁场的数值计算。虽然书中所涉及例子具有一定的特殊性，它们往往是粒子加速器中的典型部件，但计算所涉及的理论和处理方法却是普适的，它们能直接用于上述的其他领域。

粒子加速器是带电粒子与电磁场相互作用的一种物理装置。粒子在加速过程中的运动方程为

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = Ze(\vec{V} \times \vec{B}) + Ze\vec{E}$$

其中 \vec{P} ——粒子动量；
 \vec{V} ——粒子具有速度；
 \vec{B} ——粒子所受到的磁感应强度；
 \vec{E} ——粒子所受到电场强度；
 Z_e ——粒子带有的电荷量；
 t ——时间。

它表明带电粒子在方程右端项的电磁力作用下受到引导、聚焦和加速，其运动方式完全由粒子加速器电磁场分布形态所决定。为了得到人们所期待的高质量粒子束，就必须对粒子加速器的电磁场性质作精确分析。符合一定规律并具有相当精度的电磁场的建造自然成为粒子加速器设计中最重要课题之一。

图 1-1 为一个超导回旋加速器的剖视图，它主要由超导线圈、磁轭、极头、扇形块、高频加速 D 盒、注入系统等部件组成。加速器设计者为了减少加速器的尺度，卷折了被加速粒子的轨迹，使带电粒子在极面间磁场引导下作圆周运动。带电粒子在加速过程中圆周半径逐渐扩展，最后达到一定半径（对应于一定能量）而被引出。粒子能达到的最高能量是由磁铁的磁刚度 BR 所决定的，即

$$E/A = K(Z/A)^2$$
$$K \propto (B_e R_e)^2$$

其中 E/A ——粒子单核能;
 Z/A ——粒子荷质比;
 B_e ——加速器引出处磁感应强度;
 R_e ——加速器引出半径。

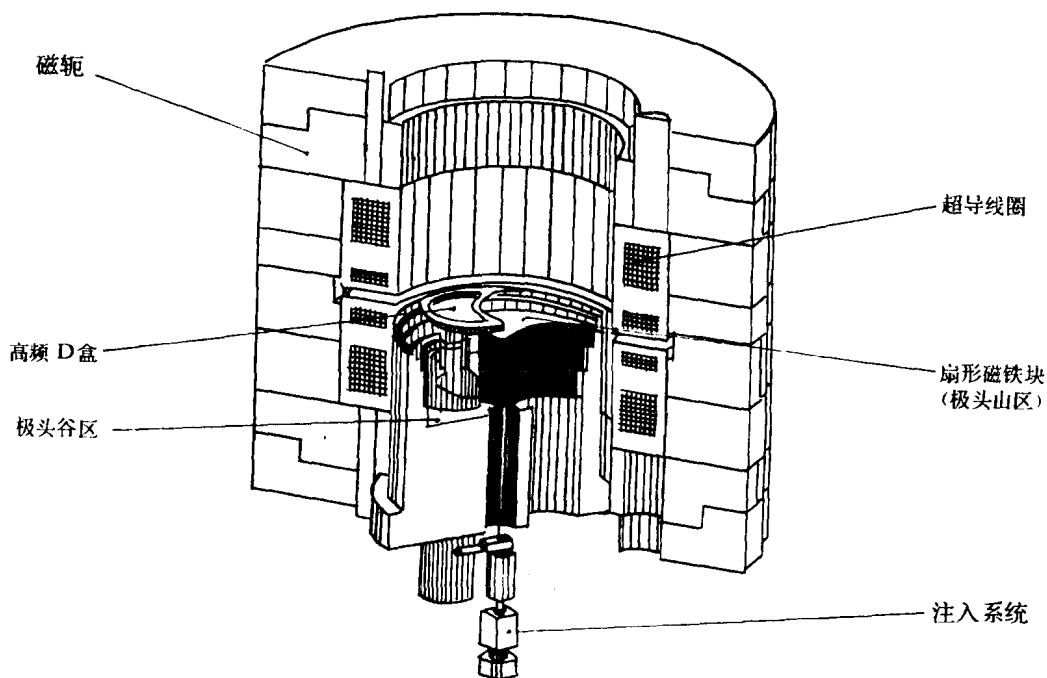


图 1-1 超导回旋加速器的剖视图

对一定引出半径的加速器而言，要得到尽可能高的能量，就要采用尽可能高的磁感应强度。这就是为什么当今世界建造加速器频频采用磁场在 5T 以上的超导磁体。但在高场强下，由于铁磁材料的饱和效应而引起对电磁场分布的影响应引起充分注意。

为了使整个加速过程稳定，对被加速的带电粒子在径向和轴向都要聚焦。磁场沿方位角变化、弯曲的扇形磁铁产生的磁场、磁场沿半径方向变化都会影响带电粒子的轴向和径向聚焦。在磁铁极面上山与谷周期性分布而导致磁场沿方位角不均匀分布可用磁场调变度 f 来表示，扇块磁铁弯曲程度可用螺角 ψ 来描述，由垫补线圈来实现沿径向不均匀分布可用场指数 n 来表征。 n 、 ψ 、 f 的定义如下：

$$n = - \frac{R}{B} \left. \frac{\partial B}{\partial r} \right|_{r=R}$$

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{r d\varphi}{dr}$$

$$f = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2}$$

其中 $B(r, \varphi, o) = B_0(r) \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \sin(kN\varphi + \theta_k(r)) \right]$

N ——扇块数;

ε_k ——磁场各次谐波的相对振幅;

r ——半径;

φ ——方位角。

描述粒子在 r 方向及 z 方向聚焦特性的聚焦频率 ν_r, ν_z 可表述如下:

$$\nu_r^2 = 1 - n + \frac{f^2}{8} \left(\frac{5}{2} + \frac{23}{9} \operatorname{tg}^2 \psi \right)$$

$$\nu_z^2 = n + \frac{f^2}{16} (9 + \operatorname{tg}^2 \psi)$$

从以上分析不难看出, 要获得在径向和轴向具有良好聚焦的高质量束流, 按一定要求来配置径向和方位角方向不均匀分布的电磁场是极为重要的。

粒子在加速器中是由高频电场来加速的。由于粒子在加速过程中能量不断增加, 其质量是按相对论性增加的。在高频电场频率固定的情况下, 为了使加速相位固定, 或者确切地说, 为了使滑相很小, 我们必须造就一个平均磁场沿径向是按相对论因子 γ 上升的场, 这样才能使带电粒子的回旋频率基本不变, 即

$$B = \gamma B_0$$

式中 B_0 ——磁铁中心处的磁感应强度。

为了保证粒子纵向运动的稳定性, 粒子加速器对电磁场的空间分布提出了这样新的要求。

从以上对一个具体加速器的粗略分析不难看出, 一个高质量的粒子加速器离不开电磁场的合理的、精确的配置。

在粒子加速器设计中, 对电磁场的求解的经典方法是用解析法获得的, 如镜像法、分离变量法及保角变换法等, 但这些方法往往有其局限性。例如, 在研究平面或某些具有圆柱面磁边界的磁场问题时, 常用到镜像法。这种方法的本质是用一个(或一组)镜像电流来代替铁磁边界的影响, 从而使磁场求解得到简化。在加速器磁场设计中, 为了估计极面间的垫补线圈的贡献量, 往往用到镜像法, 使载流线圈在二极面间来回镜反射来代替铁极面的效应, 如图 1-2 所示, 其镜

像电流 I' 可如下求解:

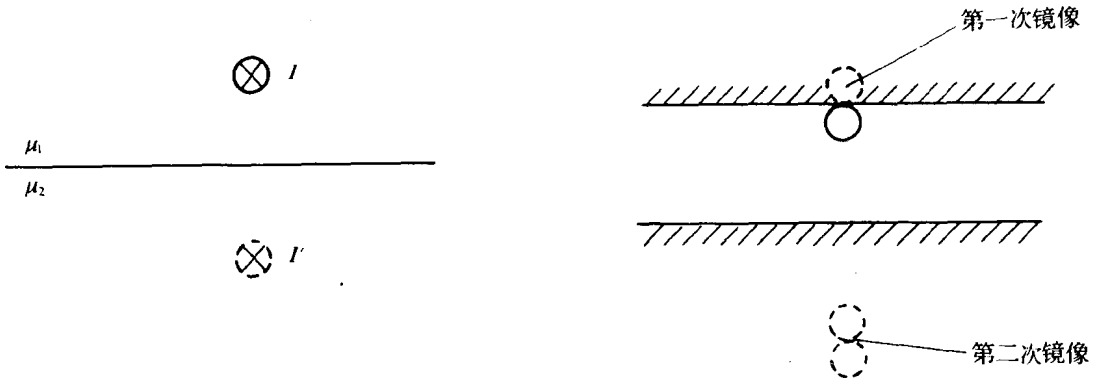


图 1-2 两磁极面间连续镜像

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I$$

其中 μ_1 ——载流导线区介质的导磁系数;

μ_2 ——铁磁介质区的导磁系数。

当 $\mu_2 \gg \mu_1$, 即磁铁处于非饱和状态时

则 $I' = I$

当线圈形状不规则时,可用比奥-沙伐 (Biot-Savart) 定律求线圈电流在磁中心平面上磁感应强度贡献量。

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I(d\vec{l} \times \vec{r}_0)}{r^2}$$

当线圈形状是圆的时,则直接可用椭圆积分求之, 其公式为

$$B_s = \frac{k\mu_0 I}{2\pi a}$$

这里

$$k = \sum_{i=1}^{15} \frac{2\mu}{\mu+1} \left(\frac{\mu-1}{\mu+1} \right)^{i-1} \left\{ F_i + \frac{1-r^2-d_i^2}{(1-r)^2-d_i^2} E_i \right\} \times \left\{ (1+r)^2 + d_i^2 \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

其中 $d_i = (2i - 1)d$

a ——线圈平均半径;

d ——以 a 归一的半气隙;

r ——以 a 归一的径向坐标位置;

μ_0 —— $4\pi \times 10^{-7} H / M$;

F_i, E_i ——模为 $K_i^2 = \frac{4r^2}{(1+r)^2 + d_i^2}$ 的第一类、第二类完全椭圆积分。

这里, 镜像次数 $i=15$, 所以这公式的精度是足够的。由于镜像时假定铁边界是无穷大的, 所以用这种方法计算磁铁边缘处的线圈会有较大误差。镜像法虽然很简单, 但要依靠少量的参数来满足边界面上每一点的边值, 并不是经常可能的。

当磁铁系统边界和交界面与正交坐标系的坐标曲线重合时, 分离变量法是一种有效而简便的方法。它的本质是在特定的坐标系里把表示成偏微分方程的拉普拉斯 (Laplace) 方程分解成几个常微分方程, 然后求解各常微分方程, 将其各特解线性叠加得到通解, 最后用边界条件确定解中待定系数, 在粒子加速器设计中, 有时也用到这种方法。例如: 在粒子加速器出口处由于磁铁的杂散场影响, 使输运管道中束流轨道发生偏离中心线的偏转, 其偏转角可描述为:

$$\theta = \frac{\int B dl}{B\rho}$$

其中 $B\rho$ ——以磁刚度形式表示的粒子动量;

$\int B dl$ ——沿着粒子运动轨迹的 B 的积分量。

粒子偏转角度与杂散场的大小及粒子的磁刚度有关。在超导回旋加速器出口处, 其杂散场可达 $0.15T$, 为了避免束流中心与束流运输线几何中心的偏离, 往往用软铁管来屏蔽外杂散场, 这屏蔽效应原则上可用分离变量法来求解。如图 1-3 所示的无源系统, 可用标量磁位 φ 来描述, 磁场强度 $H = \nabla\varphi$, 由于是空心圆柱体, 可采用圆柱坐标。对二维的拉普拉斯方程有

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1-1)$$

令

$$\varphi = R(r)\Theta(\theta)$$

代入式(1-1)可得

$$\frac{\Theta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0$$

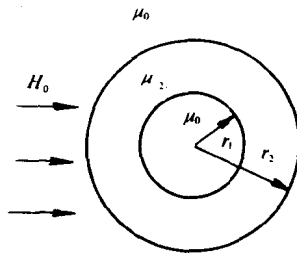


图 1-3 处于外场中磁屏蔽

各项乘以 r^2 , 除以 $R\Theta$ 则可得

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

显然这个方程该为常数 n^2 。因而可得如下两个方程:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = n^2$$

即

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - n^2 R = 0$$

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0$$

其解为

$$\Theta = k_1 \cos n\theta + k_2 \sin n\theta$$

由于水平对称性

$$\varphi(r, \theta) = \varphi(r, -\theta)$$

故

$$\Theta = k_1 \cos n\theta$$

又因为过圆心的垂线是等位线, 并选为磁位的参考面即 $\Theta(\pm \frac{\pi}{2}) = 0$

所以 $n = 1, 3, \dots$ 奇数

$$R = k_3 r^n + k_4 r^{-n}$$

所以其通解在三个区域里为

$$\begin{cases} \varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n r^n \cos n\theta + \frac{B_n \cos n\theta}{r^n} \right) & (0 < r < r_1) \\ \varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n r^n \cos n\theta + \frac{D_n \cos n\theta}{r^n} \right) & (r_1 < r < r_2) \\ \varphi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n r^n \cos n\theta + \frac{F_n \cos n\theta}{r^n} \right) & (r_2 < r) \end{cases} \quad (1-2)$$

其边界条件为

$$r = 0 \quad ; \quad \varphi_1 = 0 \quad (1-3)$$

$$r = \infty \quad \varphi_3 = -H_0 X = -H_0 r \cos\theta \quad (1-4)$$

$$r = r_1 \quad H_{1t} = H_{2t} \quad , \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (1-5)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \Big|_{r=r_1} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=r_1} \\ -\mu_0 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = -\mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=r_1} \end{cases}$$

$$r = r_2 \quad H_{1t} = H_{2t} \quad , \quad B_{1n} = B_{2n} \quad (1-6)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \Big|_{r=r_2} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \Big|_{r=r_2} \\ -\mu_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \Big|_{r=r_2} = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \Big|_{r=r_2} \end{cases}$$

对我们所求解的问题，可取 $n=1$ ，则式(1-2)可简化为

$$\begin{cases} \varphi_1 = \left(A_1 r + \frac{B_1}{r} \right) \cos\theta \\ \varphi_2 = \left(C_1 r + \frac{D_1}{r} \right) \cos\theta \\ \varphi_3 = \left(E_1 r + \frac{F_1}{r} \right) \cos\theta \end{cases}$$

由式(1-3)可得

$$B_1 = 0$$

由式(1-4)可得

$$E_1 = -H_0$$

由式(1-5)及式(1-6)可建立如下式子:

$$A_1 = C_1 + \frac{D_1}{r_1^2} \quad (1-7)$$

$$A_1 = \frac{\mu_2}{\mu_0} \left(C_1 - \frac{D_1}{r_1^2} \right) \quad (1-8)$$

及

$$C_1 + \frac{D_1}{r_2^2} = \frac{F_1}{r_2^2} - H_0 \quad (1-9)$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_0} \left(\frac{D_1}{r_2^2} - C_1 \right) = H_0 + \frac{F_1}{r_2^2} \quad (1-10)$$

由于四个方程可以解四个待定常数, 并我们只对圆柱管内的第一区域感兴趣, 所以我们只需计算 A_1 。

由式 (1-7) 及式 (1-8) 可得

$$C_1 = \frac{A_1}{2} \left(1 + \frac{\mu_0}{\mu_2} \right) \quad (1-11)$$

$$D_1 = \frac{A_1 r_1^2}{2} \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_2} \right) \quad (1-12)$$

由式 (1-9) 及式 (1-10) 可得

$$\frac{D_1}{r_2^2} \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) - C_1 \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} + 1 \right) = 2H_0 \quad (1-13)$$

把式 (1-11) 及式 (1-12) 代入式 (1-13), 即可得

$$A_1 = \frac{4H_0 \frac{\mu_2}{\mu_0}}{\left(\frac{\mu_2}{\mu_0} - 1 \right) \frac{r_1^2}{r_2^2} - \left(\frac{\mu_2}{\mu_0} + 1 \right)^2}$$

$$\vec{H}_1 = -\nabla\varphi_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} \vec{i} = -A_1 \vec{i}$$

$$\vec{H} = \frac{4H_0\mu_r}{(\mu_r + 1)^2 - (\mu_r - 1)^2 \frac{r_1^2}{r_2^2}} \vec{i}$$

其中, $\mu_r = \frac{\mu_2}{\mu_0}$ 为相对磁导率, 当 $r_1 = 8\text{cm}$, $r_2 = 10\text{cm}$ 时, $\mu_r = 1000$, 屏蔽系数

$\zeta = H_0 / H = 90$, 一般来说, 只有在边界的几何形状简单时, 才能用这种方法。

保角变换是求解二维无旋电磁场的一个重要手段。它利用共轭函数满足柯西-黎曼 (Cauchy-Riemann) 条件, 从而使复变函数 $\underline{W}(\underline{Z}) = \underline{W}(x + iy) = u + iv$ 中 u 和 v 都满足拉普拉斯方程。所以 $u = \text{常数}$ 和 $v = \text{常数}$ 的曲线族是相互正交。并且从 Z 平面变换到 W 平面具有保角性。柯西-黎曼条件可表述如下:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

能满足以上条件的 $\underline{W}(\underline{Z})$ 称为解析函数或正则函数。例如:

$$\underline{W} = A\underline{Z}^2 + C = u + iv = A(x + iy)^2 + C_1 + iC_2$$

$$u = A(x^2 - y^2) + C_1$$

$$v = 2Axy + C_2$$

当 $v = C$ 为等位线时, 则 $u = C$ 为磁力线, 由这简单的表达式可以得到理想的四极透镜的磁等位线形状及其磁力线, 如图 1-4 所示。

由于磁极形状的多样化, 靠一些简单的解析函数难以得到所需的解, 所以需要经过多次的保角变换把复杂的边界形状变换到解析函数能表达的简单形状。

所谓保角变换是指图形在不同平面的变换中具有保角性。已知解析函数 $\underline{W} = f(\underline{Z})$, $\frac{d\underline{W}}{d\underline{Z}}$ 存在, 则能将 Z 平面上图形变换(映射)到 W 平面上去。

$$\frac{d\underline{W}}{d\underline{Z}} = Re^{i\varphi}$$

$$d\underline{W} = Re^{i\varphi} d\underline{Z}$$

如图 1-5 所示, 只要把 Z 平面内小线段 PP' 放大 R 倍转以 φ 角, 就可以得 W 平面内对应线段 PP' , 同理把 Z 平面内小线段 PP'' 放大 R 倍转以 φ 角就可以得 W 平面内对应线段 PP'' , 不难看出, 两个平面内 $\angle P'PP''$ 相同, 即具有所谓保

角性。

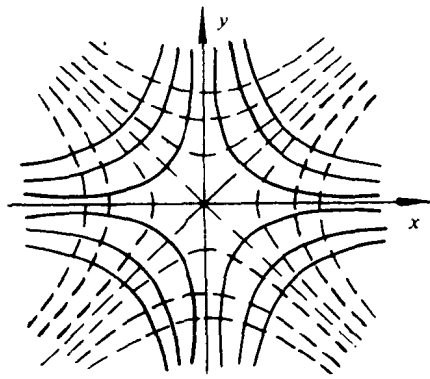


图 1-4 四极透镜等位线和力线

在保角变换中最有应用价值的是许瓦兹-克列斯托夫(Schwartz-Christoffel)变换。他们给出了 Z 平面中由折线组成的多边形变换成 t 平面上半空间的一般公式

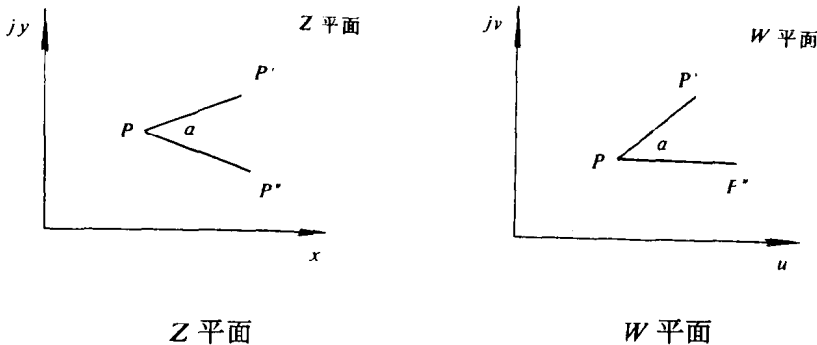


图 1-5 Z 平面和 W 平面间保角变换

$$\frac{dZ}{dt} = C(t - t_1)^{-\frac{\gamma_1}{\pi}} (t - t_2)^{-\frac{\gamma_2}{\pi}} (t - t_3)^{-\frac{\gamma_3}{\pi}} \dots$$

应注意 $\frac{dZ}{dt} = 0$ 时失去保角性，应用半径趋近于 0 的半圆将它包围起来，让它与 t 区域隔开，如图 1-6 所示。当上半平面存在着两个不同位值时，可用如下解析函数来描述场的分布