

[苏] Н.Я.维林金 著

数 学

李俊秀 译

何绍庚 盛世雄 校

测绘出版社

数 学

[苏]H·Я·维林金 著

李俊秀 译

何绍庚 盛世雄 审校

测绘出版社

数 学

【苏】 H.Я.维林金 著

李俊秀 译

何绍庚 盛世雄 审校

*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32·印张 14·字数 362 千字

1984 年 12 月第一版·1984 年 12 月第一次印刷

印数 1—7700 册·定价 2.60 元

统一书号: 13039·新 326

译 序

“万丈高楼平地起”，说明基础的重要性。数学也和其它科学一样，加强基础知识和基本理论尤为必要。本书渗透着集论、二元关系、代数运算、函数基本知识等近代数学思想。对理论材料的叙述，配合典型实例加以分析，辅以定向图、二元关系图等直观说明。内容新颖，自成一体，为数学基本理论的建设开辟了一条新的道路。

本书与我国现行中学数学教材紧密联系，对其中的一些重点内容，如命题、集合、关系、函数、极限、方程、不等式、代数运算、几何变换和数系等，都作了细致的分析研究。阅读本书，对于中学数学教师，可以居高临下，以更高的观点理解教材和分析教材，从而提高教学水平和教学质量。本书是中学数学教师较好的业务进修材料和教学参考书。

数学教育已经从数学中独立出来，成为一门新兴的边缘科学。本书原是苏联教育部审定的，作为师范学院“教育学和教学法”专业的教学参考书，对于我国，是一部有关数学教育的重要参考资料。要办好师范教育，要培养合格的中学数学教师，要从事数学教育研究，阅读本书，是会有帮助的。

李俊秀同志读过原著后，看到本书的内容对于数学教育理论方面有指导意义，就在老师们的支持和指导下，迅速译成此书。本书出版后，对数学教育的研究，会有新的启示，对我国中学数学教育质量的提高，也会有一定的促进作用。就是说，对我国的四化建设有所贡献。

魏庚人 1982年2月于陕西师范大学

序 言

目前正在中学进行的数学教学改革，使得连小学数学教程内容的修改也成为必要的了。现在，在这本教程中渗透着集论、二元关系、代数运算、函数基本知识的一般思想，改变了处理一系列问题的方法。毫无疑问，这一过程今后将会继续发展和深入。目前，由А·И·马尔库舍维奇编写的小学实验教科书中已经有图论初步、集论、二元关系等。在这个方向上国外的教科书走得更远。

所有这些使得培训低年级教师的数学教学改革也成为必要的了。二十一世纪讲课的教师必须熟悉上述一般数学概念，了解这些概念与中学教材间的联系。此种改革已经兴起——新的数学思想已经广泛列入现行的教学大纲。请读者注意，本教学参考书按教学大纲写成，仅在个别问题的叙述顺序上可能有些不同。例如，根据已有的教学经验，把与数的概念发展的有关问题移至书的末尾是合理的。

本书包括十一章。第一章专讲古典数理逻辑的基本概念——命题及其演算。在第二章里叙述了集论的基本概念，第三章是谓词的论理及其演算，而第四章是二元关系的理论。由Н·Я·维林金、А·М·贝什卡洛和Л·П·斯托依洛娃写成的这四章，构成了以后叙述的理论基础。由Н·Я·维林金写成的以后各章（在编写第九章和第十一章时使用了В·Б·罗日杰斯特文斯卡娅提供的材料），包括这些一般概念对各种问题的应用。在第五章中考察了代数式、方程和不等式，并研究了解析几何的一些概念。在第六章中叙述了数学分析初步（数值变量的数值函数的概念，数列、函数的极限，导数和不定积分）。第七章介绍了在中学几何现代

化叙述中起着重要作用的几何变换。其中叙述了位移群及其某些子群，以及位似变换和向直线的压缩变换。第八章介绍与代数运算相联系的一般概念(可交换性、可结合性、可分配性等等)。在这一章里还讲述了一些极重要的代数系统(群、环、域等)。这一章给出了最后几章叙述数的概念发展的理论基础。与一般采用的皮亚诺公理体系不同，作者曾设想出较简单的公理体系，其中以自然数的加法运算作为基本概念。在这几章中也叙述了非负整数的整除性以及有理数集和实数集的结构。

本书各章都划分为节，每节又分为段。每一段后附有习题，而在各段中理论材料的叙述配合着典型实例的分析。理论材料部分(包括某些较复杂的证明)用小号字排印。这些材料是否列入必学内容的问题，由讲课者决定。

作者希望指出本书可能存在的缺点。

Н.Я. 维林金

А.М. 贝什卡洛

В.Б. 罗日杰斯特文斯 卡娅

Л.П. 斯托依洛娃。

目 录

第一章 命题及其演算

§1. 属性和命题	(1)
1. 对象, 对象的类及其属性	(1)
2. 逻辑推理	(6)
3. 真假命题	(9)
§2. 命题的演算	(12)
1. 命题的否定	(12)
2. 命题的合取	(14)
3. 命题的析取	(16)
4. 命题的蕴涵	(19)
5. 命题的等价. 同语反复	(22)

第二章 集合, 排列, 组合分析

§1. 集合的运算	(25)
1. 集合	(25)
2. 给定集合的方法. 集合的相等	(27)
3. 子集. 欧拉——文恩图	(29)
4. 集的交	(32)
5. 集的并	(35)
6. 子集的补. 集的差	(37)
7. 欧拉——文恩图和逻辑推理式	(40)
§2. 组合分析初步	(41)
1. 两个集的笛卡尔积	(41)

2. 排列·····	(44)
3. 组合分析, 加法法则·····	(46)
4. 乘法法则·····	(47)
5. 重复排列·····	(49)
6. 有序集·····	(51)
7. 不重复的组合·····	(53)
8. 数 C_n^k 的性质·····	(55)

第三章 谓词和定理

§1. 谓词及其演算·····	(58)
1. 一元谓词·····	(58)
2. 量词·····	(60)
3. 谓词的演算·····	(62)
4. 谓词的蕴涵和等价·····	(65)
5. 多元谓词·····	(68)
§2. 定理·····	(71)
1. 定理的构成·····	(71)
2. 已知命题的逆命题·····	(73)
3. 已知命题的否命题·····	(75)

第四章 对应, 关系, 映射

§1. 对应及其运算·····	(78)
1. 二元对应·····	(78)
2. 对应的一些类型, 对应的运算·····	(82)
3. 在集上的关系·····	(85)
4. 二元关系图·····	(89)
§2. 等价关系·····	(92)
1. 把集划分为两两不相交的子集·····	(92)
2. 关系的基本性质·····	(94)

3. 等价关系.....	(69)
§3. 顺序关系	(100)
1. 严格的顺序关系.....	(100)
2. 不严格的顺序关系.....	(102)
3. 有序集.....	(103)
§4. 映射	(106)
1. 映射.....	(106)
2. 完全逆象, 逆映射.....	(108)
3. 等价集.....	(112)

第五章 坐标, 方程和不等式

§1. 直线上的坐标	(115)
1. 直线上的坐标.....	(115)
2. 直线上的坐标变换.....	(117)
3. 直线上解析几何的一些问题.....	(120)
§2. 平面上的坐标	(122)
1. 平面上的笛卡尔直角坐标系.....	(122)
2. 平面上的坐标变换.....	(124)
3. 平面上解析几何的一些问题.....	(126)
§3. 数字式与字母式	(128)
1. 数字式.....	(128)
2. 数值不等式.....	(131)
3. 数式的相等和不等.....	(133)
4. 含变量的式子.....	(134)
§4. 方程和不等式	(137)
1. 一元方程.....	(137)
2. 方程的同解性定理.....	(142)
3. 一元不等式.....	(144)
4. 二元方程.....	(148)

5. 圆的方程	(151)
6. 不等式的图象	(152)
7. 方程组和不等式组	(154)
§5. 线性方程	(157)
1. 带有斜率的直线方程	(157)
2. 直线平行和垂直的条件	(161)
3. 过已知点的直线束方程. 过两点的直 线方程	(163)
4. 两条直线之间的夹角	(166)
5. 直线的一般方程	(167)
6. 直线的交点	(170)

第六章 函数, 极限, 导数, 积分

§1. 数值函数	(173)
1. 函数与表示式	(173)
2. 正比例, 线性相关性及其图象	(177)
3. 反比例及其图象	(179)
4. 函数的合成(复合函数)	(181)
5. 反函数	(182)
§2. 函数图象的作图	(184)
1. 描点作图	(184)
2. 借助于坐标系的平移作图	(184)
3. 二次函数的图象	(187)
4. 分式线性函数的图象	(189)
§3. 数列	(193)
1. 数列	(193)
2. 递推数列	(194)
3. 无穷大和无穷小数列	(197)
4. 数列的极限	(201)
§4. 函数的极限	(203)

1. 增函数和减函数	(203)
2. 有界函数和无界函数	(206)
3. 无穷小函数	(207)
4. 函数在一点的极限	(210)
5. 函数在无穷大处的极限	(212)
6. 连续函数	(217)
7. 在闭区间上连续函数的性质	(220)
§5. 微分, 导数, 积分	(221)
1. 函数的增量	(221)
2. 函数的微分	(223)
3. 导数	(225)
4. 导数的力学意义	(227)
5. 微分法公式	(228)
6. 不定积分	(232)
7. 定积分	(234)

第七章 几何变换

§1. 变换群	(236)
1. 集的变换	(236)
2. 几何变换	(241)
§2. 平面上的位移群及其子群	(245)
1. 平面上的位移群	(245)
2. 轴对称	(248)
3. 平移	(253)
4. 平移的运算	(258)
5. 平面上的旋转	(262)
6. 中心对称和旋转对称	(266)
7. 自重合图形群, 花边和装饰物	(269)
§3. 相似和压缩的几何变换	(275)

1. 位似..... (275)
2. 位似与相似变换..... (277)
3. 向直线上的压缩变换..... (279)

第八章 代数运算和代数

- §1. 代数运算和代数 (281)
 1. 代数运算的一般概念..... (281)
 2. 代数..... (285)
- §2. 代数运算的性质 (288)
 1. 可结合的代数运算..... (288)
 2. 可交换性..... (290)
 3. 可分配性..... (292)
 4. 可约性..... (296)
 5. 逆运算..... (296)
 6. 单位元和吸收元..... (300)
 7. 对称元..... (301)
- §3. 一些代数类 (305)
 1. 群和半群..... (305)
 2. 环和域..... (307)

第九章 自然数

- §1. 公理体系及其性质 (311)
 1. 数学中的公理方法..... (311)
 2. 公理体系的模型..... (313)
 3. 公理体系的不矛盾性、独立性和完备性..... (315)
- §2. 自然数集的公理系统 (317)
 1. 自然数概念的产生..... (317)
 2. 自然数的量的理论..... (318)

3.	加法公理	(321)
4.	自然数集的顺序关系及其性质	(324)
5.	自然数集的无界性和离散性	(326)
6.	数学归纳法原理	(327)
7.	皮亚诺公理	(329)
§3.	自然数算术	(332)
1.	自然数乘法	(332)
2.	自然数的减法	(335)
3.	自然数的除法, 带余除法	(336)
4.	有序的和有量的自然数	(338)
5.	零	(339)
§4.	记数法	(341)
1.	非位置制的记数法	(341)
2.	位置制记数法	(344)
3.	十进制中自然数的写法	(346)
4.	其它进位置中数的写法	(348)
5.	十进制和其它进位制中数的加法	(354)
6.	十进制和其它进位制中数的减法	(357)
7.	十进制和其它进位制中数的乘法	(359)
8.	十进制和其它进位制中数的除法	(362)

第十章 非负整数的整除法

§1.	整除关系及其性质	(364)
1.	整除关系的性质	(364)
2.	整除性判别法	(367)
3.	其它进位制的整除性判别法	(370)
4.	倍数与约数	(370)
5.	最小公倍数与最大公约数的性质	(373)
§2.	质数及其性质	(376)

1. 质数与合数	(376)
2. 爱拉托斯散筛法	(378)
3. 自然数算术的基本定理	(380)
4. 数的标准分解式与数的运算	(382)
5. 欧几里得辗转相除法	(384)

第十一章 有理数和实数

§1. 正有理数集	(387)
1. 线段的度量	(387)
2. 等价分数	(390)
3. 正有理数	(392)
4. 正有理数的加法	(393)
5. 加法的性质、减法	(395)
6. 正有理数的乘法和除法	(399)
7. 正有理数理论的公理结构	(401)
§2. 小数	(402)
1. 小数及其运算	(402)
2. 十进制中普通分数的变换	(405)
3. 无限循环小数	(407)
§3. 正实数	(409)
1. 不可公度的线段	(409)
2. 正实数和无限小数	(411)
3. 集 R 内的顺序关系	(413)
4. 集 R 内的加法与乘法	(414)
5. 正实数集的公理系统	(416)
6. 量的度量	(417)
7. 面积的度量	(418)
8. 曲边梯形的面积	(420)
§4. 实数集	(422)

1. 正数和负数.....	(422)
2. 实数的加法与减法.....	(424)
3. 实数集内的乘法和除法.....	(426)
符号表.....	(428)

第一章 命题及其演算

§ 1. 属性和命题

1. 对象，对象的类及其属性。围绕我们的世界由各种不同的对象——生物、房子、书、汽车、河、山等组成。在研究这些对象时，我们对它们的某些属性感兴趣，比方说质量、形状、大小、颜色、气味等。这些属性或者能用数(例如质量为76千克)，或者用其它的方式(颜色可能是红的、黄的、绿的、蓝的、黑的…)表示。围绕我们的世界的对象之间存在着各种关系(这个人住在这个房子，这本书放在这个书柜里，页是书的一部分)。说到对象和它的属性时，我们可以表示为这样或那样的论断，例如：“伊万·安德列维奇的身长等于186cm”，“一支粉笔放在黑板旁边”。每一个这样的论断或者是真的，或者是假的——伊万·安德列维奇的身长可能等于190cm，一支粉笔可能不在黑板旁边，而在课桌后面，等等。

许多论断不是就单个对象而言，而是就对象类而言的(“所有的狼——四足动物”，“一些猴子生活在动物园里”，“任何一个人的重量都小于一吨”。把对象联合成类反映了它们的共性，即它们属性的共同点。对象类用对应的词——“哺乳动物”，“植物”，“石头”等来表示。

把单个对象联合成类并建立相应的概念经历了重要的思维过程。在人的思维发展的第一阶段，产生了包括狭小的对象类的概念。看来，首先产生了表示树的单独种类的词——“松树”，“枫树”，“桦树”，“橡树”，然后产生了一般“树”的概念，而且这一概念还是更一般概念“植物”的特殊情况。在认识世界时，每

前进一步总是同引入更一般的概念相联系，研究它们之间的相互关系，以及包含这些概念的对象的属性。

科学研究的特征是使用诸如“化学元素”、“质量”、“能量”、“物质”、“数”、“几何图形”等抽象概念。抽象概念是人类丰富经验的概括，反映了物质世界的根本性质。这些概念中任何一个的引入都不得不摒弃具体对象的许多属性(例如，把物体看作几何图形，就摒弃了它的颜色、质量、密度，而仅对其形状和大小感兴趣)。同时，必须把考察的对象理想化。例如在几何中认为线段无限可分，而不顾现实物体是由原子构成的，且不能分成任意小的部分*。在立方体性质的研究时，不考虑现实物体不可能具有理想的光滑表面，而它们的棱的长度也不完全一致。为了判明这些理想化对象的属性，不能仅仅依赖已有的经验，还须依赖逻辑推理。

每一概念对应于它的外延，即这些概念所包含的全部现实的理想化对象的总合。例如，在“象”的概念的外延中，包括所有的象，既包括现在生活在地球上的，也包括早期生活在地球上的，而且还包括以后将要生活的象，有非洲象，印度象以及绝种的象。

如果一个概念的外延是第二个概念外延的一部分，则第二个概念称作第一个概念的概括，而第一个概念是第二个概念的特殊情况。例如，“鲸鱼”概念是“哺乳动物”概念的特殊情况，而“词类”概念是“动词”概念的概括。在数学中，“数”的概念是“自然数”概念的概括，“平行四边形”概念是“四边形”概念的特殊情况。

当研究概念时要给它们下定义。为此，通常先指出比较一般的种概念，然后指出我们所需要的特殊情况的属性(即属差)。例

* 原子也是可分的，但物质分为原子与原子的进一步分解有质的差异，而几何线段的无限可分却忽略了这种质的差异。——译注