现代应用数学丛书

回转群和对称群的应用

〔日〕山内恭彦 堀江久 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

回转群和对称群的应用

〔日〕山内恭彦 堀江 久 著
張 质 賢 譯
宫 学 惠 校

上海科学技术出版社

內容提要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分3章。第1章緒論，說明了 Hamilton 函数对一次变換群的不变性、群元的算符的性質及連續群的无穷算符的定义。第2章回轉群的应用，介紹回轉群的表象，張量运算及回轉群在多粒子問題中的应用。第3章对称群的应用，前几节介紹对称群的基本事項，后几节叙述对称群在原子、原子核的殼层結构以及量子力学中的对称問題方面的应用。本书可供高等院校师生以及研究工作者参考。

現代应用数学丛书

回转群和对称群的应用

原书名 回轉群および对称群の应用

原著者 〔日〕山内恭彥 堀江久

原出版者 岩波书店，1958

譯者 張质賢

校者 宮学惠

*

上海科学技术出版社出版

（上海瑞金二路450号）

上海市书刊出版业营业許可証出093号

新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售

商务印书館上海厂印刷

*

开本850×1168 1/32 印張3 18/32 字数82,000

1962年12月第1版 1962年12月第1次印刷

印数 1—3,500

統一书号：13119·490

定价：（十四）0.62元

出版説明

这一套书是根据日本岩波书店出版的“現代应用数学讲座”翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

书名	原作者	譯者	书名	原作者	譯者
代数学*	弥永昌吉等	熊全淹	非綫性振动論*	古屋茂	吕紹明
几何学*	矢野健太郎	孙澤瀛	力学系与映射理論*	岩田义一	孙澤瀛
复变函数	功力金二郎	刘书琴	平面彈性論*	森口繁一	刘亦珩
集合·拓扑·測度*	河田敬义	賴英华	有限变位彈性論、变形几何学*	山本善之、近藤一夫	刘亦珩
泛函分析*	吉田耕作	程其襄	塑性論*	鷲津文一郎	刘亦珩
广义函数*	岩村联	楊永芳	粘性流体理論*	谷一郎	刘亦珩
常微分方程*	福原滿洲雄	張庆芳	可压縮流体理論*	河村龙馬	刘亦珩
偏微分方程*	南云道夫	錢端壮	网絡理論	喜安善市等	賈弃詧
特殊函数*	小谷正雄等	錢端壮	自动控制理論*	喜安善市等	翟立林
差分方程*	福田武雄	穆鴻基	回路拓扑学	近藤一夫	張鳴鏞
富里哀变换与拉普拉斯变换*	河田龙夫	錢端壮	信息論*	喜安善市等	李文清
变分法及其应用*	加藤敏夫	周怀生	推断統計理論	北川敏男	李賢平
李群論*	岩堀长庆	孙澤瀛	統計分析*	森口繁一	刘璋温
随机过程*	伊藤清	刘璋温	实驗設計	增山元三郎	刘璋温
回轉群与对称群的应用*	山内恭彥等	張质賢	群体遺傳学的数学理論*	木村資生	刘祖洞
結晶統計与代数*	伏見康治	孙澤瀛	博奕論	官澤光一	張鉞春
偏微分方程的应用	犬井鉄郎等	楊永芳	綫性規划	森口繁一	刘源張
微分方程的近似解法	加藤敏夫等	王占瀛	經济理論中的数学方法	安井琢磨等	談祥柏
数值計算法	森口繁一等	閻昌龄	随机过程的应用*	河田龙夫	刘璋温
量子力学中的数学方法*	朝永振一郎	周民强	計算技术	高桥秀俊	姚晋
工程力学系統*	近藤一夫等	刘亦珩	穿孔卡計算机	森口繁一	刘源張

注：有 * 者已在1962年出版。

目　录

第1章 緒　論

§1 緒　言

我們都知道，原子的稳定状态，是用表示总角动量 **J** 的大小的量子数 j 来标志的。$|\mathbf{J}|$＝一定，是有心力場中的运动的特征，这不外乎是古典力学中的 Kepler 第二定律的推广。这种特性是由力場对圍繞着中心 O 旋轉的不变性而得来的。对于作用于粒子的力場，如果对于粒子的坐标的某种变换群不变时，则必有相当于运动方程的积分的量存在，在量子力学里，可以用表示积分的量的数值来确定稳定状态。于是这样的量，可以用群的不可約表象賦予特征（正如量子数 j 与 $2j+1$ 阶的回轉群相对应）。本編的目的就是把这样的問題，用各种群来加以系統的处理，使它对解决量子力学問題起一定的作用。

§2 使 Hamilton 函数不变的群

根据量子力学理論知道，由 n 个粒子构成的系統的稳定状态，由 Schrödinger 方程

$$H\psi=E\psi \tag{2.1}$$

来决定。这里 H 是系統的总能量（动能＋位能）的算符：

$$H=-\hbar^2\sum\frac{\Delta_k}{2m_k}+U(x_1,\ y_1,\ z_1,\ \cdots,\ x_n,\ y_n,\ z_n), \tag{2.2}$$

并且称为 Hamilton 函数。$x_k,\ y_k,\ z_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是第 k 个粒子的坐标，Δ_k 表示算符，即

$$\Delta_k=\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_k^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_k^2}, \tag{2.3}$$

$\psi=\psi(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)$是方程(2.1)满足适当边界条件的解，$E$是使这样的解存在而采取的特定的数值，$\psi$，$E$分别称为算符$H$的本征函数(或本征矢量)与本征值。在物理学中，$E$是系統可能具有的能量的数值，有离散的，也有連續的。以下就是对某种特定的本征值E来加以考察。

在本編里所要叙述的，是当粒子的坐标$x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n$經过某种变换时，$H$的表达式不变的情况。

对于各个粒子的坐标变换(2.3)：$\Delta=|\mathrm{grad}|^2$具有与矢量模的平方相同的变换規則。另一方面，在沒有外場作用时，位能U只与粒子間的相互作用有关，故可由粒子的相对坐标决定。因此H与坐标原点及坐标軸方向的选取无关，所以H的形式不因坐标系的平行移动T而变更：

$$
\begin{aligned}
&T_x:\ x'_k=x_k+a_1, \quad T_y:\ y'_k=y_k+a_2,\\
&T_z:\ z'_k=z_k+a_3, \quad (a_1,\ a_2,\ a_3\ \text{为常数}),
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

也不因繞x, y, z軸的回轉R而变更：

$$
\begin{aligned}
&R_x:\begin{cases} y'_k=y_k\cos\varphi_1+z_k\sin\varphi_1,\\ z'_k=-y_k\sin\varphi_1+z_k\cos\varphi_1,\end{cases}\\
&R_y:\begin{cases} z'_k=z_k\cos\varphi_2+x_k\sin\varphi_2,\\ x'_k=-z_k\sin\varphi_2+x_k\cos\varphi_2,\end{cases}\\
&R_z:\begin{cases} x'_k=x_k\cos\varphi_3+y_k\sin\varphi_3,\\ y'_k=-x_k\sin\varphi_3+y_k\cos\varphi_3\end{cases}\\
&\qquad(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3\ \text{为常数}).
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

如果构成系統的粒子全部都是相同的，例如对于n个电子的集团，因为$m_1=m_2=\cdots=m_n=m$，对粒子編号的改变，即相当于$1, 2, \cdots, n$的置换$P\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ 1' & 2' & \cdots & n'\end{pmatrix}$的坐标变换

$$
x'_k=x_{k'}, \quad y'_k=y_{k'}, \quad z'_k=z_{k'} \tag{2.6}
$$

是使H不变的。这些使H不变的变换称为“粒子系所許可的变

换”。

对于原子問題，以原子核所在位置O为力場的中心，若认为原子核不属于粒子系統，則由O所生成的力場，对于电子系統是以O为对称中心的外場，其平行移动T不是許可变换，只有圍繞O的回轉R是許可变换。对于二原子的分子，可以假定两个不动的原子核位于z軸上，因为外場对称于z軸，只有R_z是許可变换。若令原子核是由Z个质子（編号为$1, 2, \cdots, Z$）与N个中子（編号为$Z+1, \cdots, Z+N$）所构成的，在数字$n=N+Z$的置换中，只有$1, 2, \cdots, Z$間的置换与$Z+1, \cdots, Z+N$間的置换是許可的（暂且把质子和中子看作不同的粒子）。

这些使H不变的粒子坐标的一次变换集合构成群G。若S_1，S_2使H不变，它們的合成变换$S=S_1S_2$也使H不变（满足群公理的証明很簡单，故略）。把粒子的坐标一个一个用$(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n)$写出来很麻煩，所以把它用一个字$X$来表示（也可以看成以$x_1, y_1, z_1, \cdots, z_n$为分量的$3n$維空間的矢量）。于是，象(2.4)，(2.5)，(2.6)的一次变换可以写为

$$X'=SX. \tag{2.7}$$

这样就可以把S作为群G中元素的記号来使用。

§3 对应于群元素的算符

前节的(2.7)是使H不变的变换，而

$$\psi'(x_1', y_1', z_1', \cdots, x_n', y_n', z_n')=\psi(x_1, y_1, z_1, \cdots, x_n, y_n, z_n), \tag{3.1}$$

即

$$\psi'(X')=\psi'(SX)=\psi(X), \tag{3.2}$$

对应于这个变换，可以定义一个函数，即

$$\psi'(X)=\psi(S^{-1}X), \tag{3.3}$$

这就規定了由函数 $\psi(X)$ 导出 $\psi'(X)$ 的演算，記为

$$\psi'(X)=S\psi(X). \tag{3.4}$$

S 既具有群元素(对坐标 X 的一次变換)的意义，又具有作用于 ψ 的算符的意义。

用坐标 X (以及关于 X 的导数) 表示 Hamilton 函数 (2.2) 时，記为 H_X. H 对 S 的不变性，記为

$$H_{SX}=H_X \quad (S\in G). \tag{3.5}$$

因此又有(由于 $S^{-1}\in G$) $H_X=H_{S^{-1}X}$. 再利用(2.1)可得

$$\begin{aligned} H_X\psi'(X)&=H_X\psi(S^{-1}X)=H_{S^{-1}X}\psi(S^{-1}X)\\ &=E\psi(S^{-1}X)=E\psi'(x). \end{aligned} \tag{3.6}$$

上式表示 $\psi'(X)$ 是属于 H 的本征值 E 的本征函数。把这种关系用算符 S 表示，則为

$$HS\psi=SH\psi=ES\psi, \tag{3.7}$$

这表明 S 与 H 为“可对易”:

$$HS=SH. \tag{3.8}$$

量子力学的意义是 S 为“运动常量”，即“不随时間而变更”。

假定 E 是 f 重的本征值，而且 $\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_f$ 是它的綫性独立的本征函数系，則(2.1)的任意解，可以用綫性組合

$$\psi=x_1\psi_1+x_2\psi_2+\cdots+x_n\psi_n \tag{3.9}$$

来表示。即属于本征值 E 的本征函数 ψ_k $(k=1, 2, \cdots, f)$ 是 H 的本征空間 $R(E)$ 的基底，$x_1, \cdots, x_f$ 是矢量 ψ 的对于这些基底的分量。这些可以取为么正基底

$$(\psi_j, \psi_k)=\int\overline{\psi}_j\psi_k dV=\delta_{jk}. \tag{3.10}$$

由(3.7)可知 $\psi'_k=S\psi_k$ 是属于 $R(E)$ 的本征矢量，所以可用

$$\psi'_k=S\psi_k=\sum_l \psi_l a_{lk}(S) \tag{3.11}$$

来表示。于是决定了各个 $S\in G$ 的从基底 ψ_k 到基底 ψ'_k 的一次变

换。可以用下面的方法来説明这种变换是么正的。

設我們所考察的使 H 不变的变换 S 同时能使体积元素 $dV_X = dx_1dy_1dz_1\cdots dx_ndy_ndz_n$ 不变：

$$dV_{X'} = dV_{SX} = dV_X,$$

因而

$$\begin{aligned}(S\psi_j,\ S\psi_k) &= \int \overline{S\psi_j(X)}\,S\psi_k(X)\,dV_X \\ &= \int \bar{\psi}_j(S^{-1}X)\,\psi_k(S^{-1}X)\,dV_{S^{-1}X} \\ &= (\psi_j,\ \psi_k) = \delta_{jk}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

所以从基底 $(\psi_1, \cdots, \psi_f)$ 到基底 $(\psi_1', \cdots, \psi_f')$ 的变换是么正变换。把这种在 $R(E)$ 內的一次变换記为 $A(S)$.

令 $S = S_2S_1$, 則

$$S\psi_k = \sum_j \psi_j a_{jk}(S),$$

$$\begin{aligned}S_2S_1\psi_k = S_2\sum_l \psi_l a_{lk}(S_1) &= \sum_l S_2\psi_l a_{lk}(S_1) \\ &= \sum_{l,j} \psi_j a_{jl}(S_2)\,a_{lk}(S_1).\end{aligned}$$

于是

$$a_{jk}(S) = \sum_l a_{jl}(S_2)\,a_{lk}(S_1), \tag{3.13}$$

即对于 $S = S_2S_1$, 有

$$A(S) = A(S_2)\,A(S_1) \tag{3.14}$$

的关系式成立。由此可知变换的集合 $\{A(S)\}$ $(S\in G)$ 是空間 $R(E)$ 中的群 G 的表象 D.

令 $$\psi' = \sum x_j'\psi_j, \quad \psi = \sum x_k\psi_k,$$

又因 $$\psi' = S\psi = \sum_k x_k S\psi_k = \sum_{k,j} x_k\psi_j a_{jk},$$

所以，对于矢量 (3.9)，$\psi\in R(E)$，上面的变换可以用

$$x_j' = \sum a_{jk}x_k \tag{3.15}$$

的一次变換表示。

这样的表象，不能保証永久是不可約的。在例外的情况下，也有可約的(卽所謂“偶然重合”)。但是，卽使对一个 H 是可約的，若使 H 在群 G 的許可范圍内变化，“偶然重合”可以消失，而分解为不可約的表象。因此在一般情况下，可以认为“表象 D 是不可約的”(这是由經驗的事实得来的結論)。从而可以說“系統的各稳定状态或能級，可以用使 H 不变的群的不可約表象 D 来标志”。而群的不可約表象又可以用它的特征标来表明，所以又可說“系統的能級，可以用群的不可約表象的特征标 $\{\chi(S)\}$ 来标志”。如果能用比特征标更簡单的方法来决定不可約表象，那么当然更便利了。例如回轉群的不可約表象 D 可以用它的阶数 $f=2j+1$ 来决定，所以 D 可由数字 $j=0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \cdots$ 来唯一确定，記为 D_j.

§4　对于連續群的无穷小算符

由(3.8)，已知对应于群 G 中元素 S 的算符 S 是运动常量，但是 S 是么正算符，而不是 Hermite 算符，所以 S 不是物理量。也就是說，它的本征值不是用实数能表示的量。这样，使 S 本身具有物理意义是困难的。但是如果 G 是連續群，由考虑无穷小算符，就可以找出具有物理意义的量来。

現在考察連續群的元素可以用有限个参数表示的情况。例如平移群 T(2.4) 的 a_1, a_2, a_3，回轉群 R(2.5) 的 φ_1, φ_2, φ_3，就是属于这种情况。如果当参数 t 有无穷小变化 dt 时，与此对应的 x_k, y_k, z_k 的变化为 $dx_k=\frac{dx_k}{dt}dt$, $dy_k=\frac{dy_k}{dt}dt$, $dz_k=\frac{dz_k}{dt}dt$，由于 $x'_k=x_k+dx_k$, $y'_k=y_k+dy_k$, $z'_k=z_k+dz_k$ 的逆变换为

$$x'_k=x_k-dx_k,\ y'_k=y_k-dy_k,\ z'_k=z_k-dz_k,$$

則按 $\psi(X)=\psi(x_k, y_k, z_k)$ 有

$$\psi' = \psi + d\psi = \psi(x_k - dx_k,\ y_k - dy_k,\ z_k - dz_k)$$
$$= \psi - \sum_k \left(\frac{\partial\psi}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial\psi}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial\psi}{\partial z_k} dz_k \right)$$
$$= \psi + C\psi dt.$$

这里 C 是算符

$$C = -\sum_k \left(\frac{dx_k}{dt} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{dy_k}{dt} \frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{dz_k}{dt} \frac{\partial}{\partial z_k} \right). \tag{4.1}$$

对于平移 T_x，由于 $x_k = x_k^0 + a_1$[1]，所以 $t = a_1$，$\frac{dx_k}{dt} = \frac{dx_k}{da_1} = 1$.
由 (4.1) 可得

$$C = -\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \tag{4.2}$$

同样，对于 T_y, T_z 的无限小算符可以写为

$$C = -\sum_k \frac{\partial}{\partial y_k},\quad C = -\sum_k \frac{\partial}{\partial z_k}. \tag{4.3}$$

对于回轉 R_z:

$$\begin{cases} x_k = x_k^0 \cos\varphi_3 + y_k^0 \sin\varphi_3, \\ y_k = -x_k^0 \sin\varphi_3 + y_k^0 \cos\varphi_3, \end{cases}$$

$$\frac{dx_k}{d\varphi_3} = -y_k,\quad \frac{dy_k}{d\varphi_3} = x_k, \tag{4.4}$$

所以 R_z 的算符 C 为

$$C = -\sum_k \left(x_k \frac{\partial}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right). \tag{4.5}$$

同样，R_x, R_y 的算符 C 为

$$C = -\sum_k \left(y_k \frac{\partial}{\partial z_k} - z_k \frac{\partial}{\partial y_k} \right),\quad C = -\sum_k \left(z_k \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial z_k} \right). \tag{4.6}$$

由于在

$$(\psi, \psi) = \int \overline{\psi}\psi dV \tag{4.7}$$

---

[1] 把变换改写为 $x_k^0 \to x_k$ 的形式。

里，dV 对 S 是不变的，用与(3.12)同样的方法可以証明 S 是么正算符。所以

$$\frac{d}{dt}(\psi,\psi)=\left(\frac{d\psi}{dt},\psi\right)+\left(\psi,\frac{d\psi}{dt}\right)$$
$$=(C\psi,\psi)+(\psi,C\psi)=0.$$

又因为

$$(a\varphi,\psi)=\bar{a}(\varphi,\psi),\quad(\varphi,a\psi)=a(\varphi,\psi),$$

若令 $C=iQ$，则得

$$-i(Q\psi,\psi)+i(\psi,Q\psi)=0,$$

即
$$(Q\psi,\psi)=(\psi,Q\psi),$$

所以 Q 是 Hermite 算符。对于 T, R 則分別有

$$\left.\begin{aligned}p_x&=-i\sum\frac{\partial}{\partial x_k},\\ p_y&=-i\sum\frac{\partial}{\partial y_k},\\ p_z&=-i\sum\frac{\partial}{\partial z_k},\end{aligned}\right\}\tag{4.8}$$

及

$$\left.\begin{aligned}L_x&=-i\sum_k\left(y_k\frac{\partial}{\partial z_k}-z_k\frac{\partial}{\partial y_k}\right),\\ L_y&=-i\sum_k\left(z_k\frac{\partial}{\partial x_k}-x_k\frac{\partial}{\partial z_k}\right),\\ L_z&=-i\sum_k\left(x_k\frac{\partial}{\partial y_k}-y_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right).\end{aligned}\right\}\tag{4.9}$$

(4.8)，(4.9)的本征值都是实数的物理量。实际上，(4.8)是动量的 x, y, z 的分量，(4.9) 是角动量的 x, y, z 的分量，大家知道这些量都是一定的。

这样对于具有有限个参数的連續群，由导入无穷小算符，能使它与物理量对应。

第2章　回轉群的应用

§5 回轉群的不可約表象

在一般情況下，表象空間（如§3中的$R(E)$）可分解为子空間$R'(E)$，$R''(E)$，若属于表象D的所有变换都使各个子空間不变，則称D为完全可約的。若令在$R'(E)$，$R''(E)$内的表象为D'，D''，則有

$$D=D'+D'' \tag{5.1}$$

的关系式成立。象这样把D分解为两个表象的和称为把D簡約。如果D，D'还是完全可約的，則对它們再施行簡約，最后分解为不能再簡約的表象的和，即

$$D=D_1+D_2+\cdots+D_k. \tag{5.2}$$

簡約完全实行后所得的各个表象，叫不可約表象。这样把D簡約为不可約表象的和之后，再对表象空間的基底施以适当的一次变换，就可以象图(5.1)那样，表象矩陣$A(S)$的k个不可約成分矩陣沿对角綫排列，其他部分都是0。如(3.12)所示，我們所研究的量子力学系統的变换是么正的，也就是說，它的表象是么正的。因为任何么正表象都是完全可約的，所以我們所考慮的回轉群，平移群，置换群的任意表象D都是完全可約的，而且，可以象(5.2)那样簡約为不可約表象的和❶。

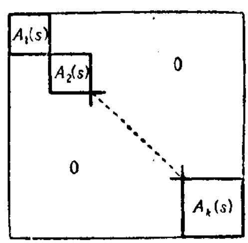

图 5.1

---

❶ 关于回轉群的可約性的直接的証明，可参看山內恭彥著：回轉群及其表象（回轉群とその表現）（岩波）p. 77.

已經知道回轉群的任意表象，可以簡約为不可約表象之和，以下的問題就是求出回轉群的不可約表象。为此我們先考慮在前节导出的角动量算符 L_x, L_y, L_z(4.9)．在这些角动量算符的成分之間，有下面的对易关系成立：

$$\left.\begin{aligned}[L_x,\ L_y]&=iL_z,\\ [L_y,\ L_z]&=iL_x,\\ [L_z,\ L_x]&=iL_y,\end{aligned}\right\}\tag{5.3}$$

这里 $[A, B]=AB-BA$。我們暫时把 L_x, L_y, L_z 是由空間回轉导出的无穷小算符这件事忘記，而把满足(5.3)对易关系的算符組当作一般的回轉群无穷小算符，把記号也改写为 J_x, J_y, J_z，再利用对易关系：

$$\left.\begin{aligned}[J_x,\ J_y]&=iJ_z,\\ [J_y,\ J_z]&=iJ_x,\\ [J_z,\ J_x]&=iJ_y\end{aligned}\right\}\tag{5.4}$$

来求回轉群的表象。为此，用 J_x, J_y, J_z 还不如用

$$J_{\pm}=J_x\pm iJ_y,\quad J_z=J_z\tag{5.5}$$

較为便利。因为 J_+, J_-, J_z 之間的对易关系是

$$[J_z,J_+]=J_+,\quad [J_+,J_-]=2J_z,\quad [J_-,J_z]=J_-,\tag{5.6}$$

与(5.4)相比較，第一式中只含有 J_z, J_+，第三式中只含有 J_z, J_-，所以便于处理。若以 j 为 J_z 的本征值，則在表象空間里应当有满足 $J_z\boldsymbol{u}_j=j\boldsymbol{u}_j$ 的矢量 $\boldsymbol{u}_j$ 存在。由(5.6)可得

$$J_zJ_+\boldsymbol{u}_j=J_+J_z\boldsymbol{u}_j+J_+\boldsymbol{u}_j=(j+1)J_+\boldsymbol{u}_j,$$
$$J_zJ_-\boldsymbol{u}_j=J_-J_z\boldsymbol{u}_j-J_-\boldsymbol{u}_j=(j-1)J_-\boldsymbol{u}_j.$$

因为 J_z 是 Hermite 算符，它的本征值是实数，且令 j 为其最大本征值，这样 $j+1$ 就不是本征值了，所以从第一式得 $J_+\boldsymbol{u}_j=0$。从第二式可知，如果 $J_-\boldsymbol{u}_j$ 不等于0，$j-1$ 也是本征值。若把(5.6)的对易关系中第三式反复使用 $j-m$ 次，則可得