卡尔曼滤波器及其应用基础

敬 喜 编

国防工业出版社

内 容 简 介

卡尔曼滤波器在国内外已广泛应用于自动控制、运动技术、火箭动力学、宇宙飞行以及其他工程领域。本书较系统地介绍了卡尔曼滤波器的基本理论和方法。全书共分三章。第一章，介绍卡尔曼滤波器的基本理论和方法。第二章，討论卡尔曼滤波器与控制。第三章，研究卡尔曼滤波器在飞行器的拦截与会合、船舶导航、宇宙飞行导航等方面的应用。

本书可供从事自动控制、遙控遙测、火箭技术、飞行器的拦截与会合、船舶和飞机导航等方面的科技人员和大专院校有关专业师生参考。

卡尔曼滤波器及其应用基础

敬 喜编

国防工業出版社出版

北京市书刊出版业营业許可証出字第074号

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

$850\times1168^{1}/_{32}$　印张$7^{13}/_{16}$　198千字

1973年6月第一版　1973年6月第一次印刷　印数：0,001–9,500册

统一书号：15034·1297　　定价：0.80元

目　录

卡尔曼滤波器及其应用基础

敬　喜　编

国防工业出版社

内容简介

卡尔曼滤波器在国内外已广泛应用于自动控制、运动技术、火箭动力学、宇宙飞行以及其他工程领域。本书较系统地介绍了卡尔曼滤波器的基本理论和方法。全书共分三章。第一章，介绍卡尔曼滤波器的基本理论和方法。第二章，討论卡尔曼滤波器与控制。第三章，研究卡尔曼滤波器在飞行器的拦截与会合、船舶导航、宇宙飞行导航等方面的应用。

本书可供从事自动控制、遙控遙測、火箭技术、飞行器的拦截与会合、船舶和飞机导航等方面的科技人员和大专院校有关专业师生参考。

卡尔曼滤波器及其应用基础

敬　喜编

*

国防工業出版社出版

北京市书刊出版业营业許可証出字第074号

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张7 13/16　198千字

1973年6月第一版　1973年6月第一次印刷　印数：0,001–9,500册

统一书号：15034·1297　　定价：0.80元

出版者的话

我国社会主义事业正在飞跃发展，科学技术日新月异。我国广大工人和科技人员在毛主席的无产阶级革命路线指引下，正在为高速度发展我国科学技术、赶超世界先进水平作出新的贡献。

卡尔曼滤波理论已在国内外引起了广泛的重视，它已应用于自动控制、遥控遥测、火箭技术、飞行器的拦截与会合、船舶与飞机导航、宇宙飞行等各个领域。为了满足广大读者的需要，我们出版了《卡尔曼滤波器及其应用基础》一书。

本书较系统地介绍了卡尔曼滤波器的基本理论和方法。全书共分三章。第一章，介绍卡尔曼滤波器的基本理论和方法。第二章，讨论卡尔曼滤波器与控制。第三章，研究卡尔曼滤波器在飞行器的拦截与会合、船舶导航、宇宙飞行导航等方面的应用。

本书可供从事有关专业的科技人员和大专院校师生参考。

由于水平所限，本书在所难免会有一些缺点和错误，恳请读者批评指正。

目 录

绪　言

我们知道，维纳（Wiener）[11]的统计预测和滤波理论对于工程科学是一个较大的贡献。但是，到目前为止，这个理论还很少实际应用。这是因为，测量随机过程的统计特性是这种理论的基础。虽然有时能用物理假设代替实验统计数据，仍然存在着一个主要问题，这就是最佳滤波器的计算问题。目前，尽管有一些计算方法[8~10]，然而这些方法所得出的分析答案仅适用于某些学术研究，并且这些方法很不适用于数字计算。在这些方法中，最后总是要遇到最佳滤波器的脉冲响应的问题。对于脉冲响应的问题，至今还没有一种完整的解决办法。一般说来，综合一个具有确定的脉冲响应的滤波器还没有一种简单的方法。在常用的方法中，还存在一个困难，这就是对时变问题是很难办的。

严格地讲，维纳问题并不真正是统计学问题，它是属于纯概率论范畴。在某些方面它类似于大数定律、中心极限定理等。正如我们所知道的那样，维纳方法要求精确已知随机过程的概率结构。

在维纳稍后，哥尔莫格洛夫关于滤波和预测问题有一系列的理论论述。这些理论（包括维纳的）曾被人们看做是“经典的”，也就是说，维纳-哥尔莫格洛夫的滤波和预测理论似乎已经很好地建立了一种技术领域，并且要想改进或推广它是不可能的。但是，事后不久，就有很多人研究了应用时畴的各种方法[13~17]。这些研究解决了非平稳滤波和预测理论中的某些长期存在的问题。这就令人信服地看到，上述那种看法是不正确的。

从滤波和预测理论的历史发展上看，古典的方法是坚持着“频率范畴”的观点，这与工程中的实际问题是分不开的。事实

上，在工程中出现的随机问题，多数都发生在通信系统的范围内（耦合场），对这类系统所常见的描述，正好是属于“频率范畴”的。但是，这里所提到的频率范畴的方法，对于研究非线性系统或者具有时变参数的线性系统都是不适用的。然而，无数的工程实践的发展，就迫切要求我们采用“时间范畴”的方法，即要求解决时变滤波和预测的问题。

卡尔曼的滤波和预测理论[1,2]，就是坚持“时畴”的方法（观点）所获得的结果，它给出了标准的滤波和预测的新方法。其新奇之处在于综合了两个众所周知的概念：

（1）叙述动态系统的“状态转移”的方法；

（2）把线性滤波作为希尔伯特（Hillbert）空间的正交投影。

所得结果的重要性在于，卡尔曼滤波方法得出了对偶原理。这个对偶原理便把随机滤波理论和确定的控制理论两者联系起来了。由于对偶性，就可以把线性控制系统的最优设计结果直接应用到维纳问题上去。

依据“状态转移”的分析方法所建立起来的卡尔曼滤波方法，实际上就是对系统应用矢量矩阵的表示法。它使主要结果的叙述变得既简单又清楚，而且与特定问题的复杂性无关。这就是用卡尔曼滤波方法能够处理多个变量的滤波问题并没有增加任何理论上的复杂性的原因。

上面提到了对偶原理的作用，现在看一看它是怎样起到这个作用的。

首先，对于用普通微分方程决定的线性动态系统，我们总可以用一个确定的方程来描述，这个方程的确定形式和系统的输出为：

$$\frac{dX}{dt}=F(t)X+G(t)u(t)$$

$$Y(t)=H(t)X(t)$$

这里，X是n维向量，叫做状态，它所有的座标x_i叫做状态变量；$u(t)$是m维向量，叫做控制函数；$F(t)$、$G(t)$和$H(t)$分别是$n\times n$、$n\times m$和$p\times n$阶矩阵，这些矩阵中的每一个元素都是时间t的连续函数。此动态系统的转移矩阵为$\Phi(t_0,t)$。

现在，我们介绍在控制理论中由最优调节器问题产生的最优估值的对偶问题。

首先，我们定义与上述微分方程所决定的动态系统对偶的（或伴随的）动态系统，令

$$\left.\begin{aligned} t^* &= -t \\ F^*(t^*) &= F^T(t) \\ G^*(t^*) &= G^T(t) \\ \Phi^*(t^*,t_0^*) &= \Phi^T(t_0,t) \end{aligned}\right\}$$

我们把它叫做对偶关系。这样，对偶动态系统的微分方程为：

$$\frac{dX^*}{dt^*}=F^*(t^*)X^*+G^*(t^*)u^*(t^*)$$

用这些约定的符号，我们就可以叙述最优调节问题。考虑对偶线性动态系统，寻求具有某种性质的“控制规律”：

$$u^*(t^*)=K^*(X^*(t^*),t_0^*)$$

为了选择$u^*(t^*)$，假设“性能指标”是

$$V(X^*;t^*,t_0^*;u^*)=||\Phi^*(t_0^*;X,t^*;u^*)||^2P_0$$
$$+\int_{t^*}^{t_0^*}\{||\Phi^*(\tau;X^*,t^*;u^*)||^2Q(\tau^*)+||u^*(\tau^*)||^2R(\tau^*)\}d\tau^*$$

的下界。

这是众所周知的以均方误差积分为性能指标的一类调节器最优化问题。这样，我们看到了，由于对偶原理，就可以将最优调节器问题的数学理论和结果直接地应用到最佳估值问题上，在前面的对偶关系的条件下，解决最优估值问题和研究最优调节器问题是等效的。

另一方面，如果估值问题的解是线性的，并且对偶原理是正确的，那么，对于最优调节问题同样是正确的，也就是说，最优控制规律 K^*必须是 X^*的线性函数。

如果我们推广最优调节器问题，用

$$\|Y^*(\tau^*)-Y_d^*(\tau^*)\|^2 Q(\tau^*)$$

来代替性能指标中的被积函数的第一项，其中 $Y^*(\tau^*)$ 是测量输出，$Y_d^*(\tau^*)\neq 0$，是希望的输出。换句话说，如果我们用伺服机构或随动系统问题代替调节器问题，那么，由于 $u^*(t^*)\neq 0$，最优调节器问题就成了最优估值问题的对偶。

现在看一个例子。假设信息过程是$X(t)$，它可用模型

$$\frac{dX}{dt}=F(t)X+G(t)u(t)$$

产生，观测信号是：

$$Z(t)=Y(t)+V(t)=H(t)X(t)+V(t)$$

其中，$u(t)$ 和$V(t)$ 同样都是均值为零的独立的随机过程(白噪声)，它们的协方差矩阵分别为：

$$COV\{u(t),u(\tau)\}=Q(t)\delta(t-\tau) \qquad (对于一切\ t,\tau)$$

$$COV\{V(t),V(\tau)\}=R(t)\delta(t-\tau) \qquad (对于一切\ t,\tau)$$

$$COV\{u(t),V(\tau)\}=0$$

其中，δ 是狄拉克 Δ 函数；$Q(t)$ 和$R(t)$ 都是对时间 t 连续可微的、对称、非负定矩阵。这个信息过程的一个特例是，信息过程的模型是一阶线性常系数的动态系统。现在令这个信息过程的模型所涉及的每个矩阵都是 1×1 阶的，并且分别是：

$$\left.\begin{aligned} F(t)&=[f_{11}]\\ G(t)&=[1]\\ H(t)&=[1]\\ Q(t)&=[q_{11}]\\ R(t)&=[r_{11}] \end{aligned}\right\}$$

显然，根据前面的对偶关系，这个模型与其对偶是相同的。那么，

对偶问题所涉及到的装置（自动调节器）是：

$$\frac{dX_1^*}{dt^*}=f_{11}X_1^*+u_1^*(t^*)$$

$$Y_1^*(t^*)=X_1^*(t^*)$$

并且性能指标是：

$$\int_{t^*}^{t_0^*}\{q_{11}[X_1^*(\tau^*)]^2+r_{11}[u_1^*(\tau^*)]^2\}d\tau^*$$

这就是估值问题和其对偶的问题。由此可见，解决最优估值问题和研究最优调节问题是等效的。

正是由于这种等效性（确切地说是由于对偶原理），才把随机估值问题和确定的控制问题联系在一起了。因此说，卡尔曼的滤波和预测理论推广和发展了维纳-哥尔莫格洛夫的滤波和预测理论，并为研究自动控制理论和在自动控制的应用领域开辟了新的道路。

就估值问题而论，维纳（或者说，旧的）方法与卡尔曼滤波方法之间是有明显的区别的。这些区别表现在如下的两个方面：

1. 在理论方面，旧的方法关心的主要问题是：

（1）解的一般形式；

（2）总是假定物理上是可实现的和最优滤波器是稳定的；

（3）用比较简单的数值结果表征一般结果，例如，信噪比、信息率、宽度等等。

新的方法，即时域方法，能够使我们不受模型不变性的限制。

2. 在计算方面，旧的方法一直局限在：如果其解能由一个公式来表达，则这种数学问题就认为是解决了。然而，事实并非如此简单，在公式中代以数字并不是一件轻易的事。现在关于维纳问题的文献里包含了许多不严格地推导得的公式，这些公式在系统的阶数较大时，对于实际的计算便是无用的。

在新的方法中，方差方程提供了一个在实际上是有用的，而且在理论上也是完整的数值计算方法。因为卡尔曼滤波方程的收

敛性是有保证的，因此，计算问题只不过是纯数值方面的问题而已。

现在，我们来摘要地叙述一下有关卡尔曼的滤波方法和结果。首先，它有两个基本假设：

（一）信息过程的足够精确的模型，是由白噪声所激发的线性（也可以是时变的）动态系统。

（二）每次的测量信号都包含着附加的白噪声分量。

根据这些假设，基于有限或无限的时间间隔里得到，而又被噪声曲解了的数据（过去的），我们来寻找信息的最优线性估值。那么，卡尔曼滤波方法给出了五个基本关系（方程）：

（1）滤波器的微分方程。它是由测量信号所激发的，并对信号给出最优线性估值；

（2）最优线性估值误差的微分方程；

（3）由误差所表达的最优滤波器的随时间而变化的权矩阵（或增益）；

（4）最优线性估值误差协方差矩阵的非线性微分方程——方差方程；

（5）预测公式。

现在，我们来叙述卡尔曼滤波方法所要解决的一个基本问题：考虑一个物理的激发系统。假设信息是随机过程$X(t)$，它可用模型

$$\frac{dX(t)}{dt}=F(t)X(t)+G(t)u(t)$$

产生，观测信号是

$$Z(t)=Y(t)+V(t)=H(t)X(t)+V(t)$$

式中假定$V(t)$和$u(t)$都是独立随机过程，它们的协方差矩阵分别为：

$$COV\{u(t),u(\tau)\}=Q(t)\delta(t-\tau)\qquad（对于一切 t,\tau）$$

$$COV\{V(t),V(\tau)\}=R(t)\delta(t-\tau)\qquad（对于一切 t,\tau）$$