廣義相對論的數學基礎

流形上的張量分析

R.L. 毕晓普　S.I. 戈德堡　著
萧　欣　忠　林　静　仪　译

曉園出版社
世界图书出版公司

018

廣義相對論的數學基礎

流形上的張量分析

R.L.毕晓普　S.I.戈德堡　著

萧欣忠　林静仪　译

曉園出版社

世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安

广义相对论的数学基础　流形上的张量分析
R. L. 毕晓普　S. I. 戈德堡　著
萧　欣　忠　林　静　俶　译
晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印
北京朝阳门内大街 137 号
北京中西印刷厂印刷
新华书店北京发行所行　各地新华书店经售
*
1995 年 5 月第一版　开本：850×1168 1/32
1995 年 5 月第一次印刷　印张：13.5
印数：0001－600　字数：32.4 万字
ISBN：7－5062－1773－2/O・124
定价：17.00 元（WB9312/8）

作者序言

「這些表明透過高斯、黎曼、Christoffel 、Ricci …… 等人所建立起來的一般微積分方法之一大勝利」。── 愛因斯坦

自從Ricci 於 1887 年至 1896年間建立起張量分析以後，儘管這些理論在廣義相對論裏成爲非常有用的數學利器，而且在微分方程，幾何以及物理學的許多問題中都被應用開來，可是這理論一直沒有很好的展望，因爲張量分析一直受到其中之符號以及上下指標之操作所局限了。這本書的一個主要目標就是在學生們剛剛接觸這些張量分析時，就立刻拓展他們的眼界，使他們知道張量分析並不只限於一些怪異的上下指標符號之操作。事實上我們可以將張量分析看如高等微積分的後繼課程，具有邏輯的完整性與嚴格的數學論證。因此在課程的安排上可以將其與複變函數論以及線性代數等等並列。

對於物理系的學生們，這本書的好處是提供他們機會把零亂的數學知識有系統的組織整理起來。對於數學系的學生們，本書正好可以當作他們進一步修習近代微分幾何的入門書。

有許多古典及近代的符號與用法都在本書裏充分的加以解釋並彼此貫串起來。因此學生們於讀完本書之後若想查閱較早期的像卡當類型的文獻，或者想查閱現時的各類文獻大概都不致於有什麼困難。

我們按照數學結構之層次，從較一般性的然後才進入較特殊性的討論來編排組織本書的題材。最初的一章並不屬張量分析的範圍，但卻爲學生所必備的知識，因此我們將其記爲第零章。這章目的只做爲學生們隨時翻閱參考而已，並不是寫來做爲有系統教材之用的。第一章與第二章彼此互相獨立，分別代表張量分析的兩方面。第一章所討論的是其函數論的方面，而第二章卻處理其代數結構的方面。然後我們在第三章與第四章就結合這兩方面而發展出張量分析為一套理論來，是在隨便一個可微流形上都可以擁有的標準理論。要等到最後的第五、六兩章我們才研究一些特別的數

學結構，像黎曼流形或半黎曼流形等等。尤其在第六章所考慮的一些特別結構讓我們可以充分發揮第三、四章有關張量分析的各項結果，因此我們就藉此來澄清許多古典力學中模糊不清的概念了。

本書所要求的先修科目爲高等微積分以及基本的微分方程式論。在高微中特別跟本書有關的部分是：多變函數之理論，隱函數定理還有多重積分理論（第四章）。至於微分方程式論中跟本書有關的部分就是微分方程式系統之解的存在及唯一性定理。我們並不要求學生們眞的擅長實際把這些解搞出來。因此對於物理系的學生來講，大概要到大四才適合來讀這本書。至於數學系中有志於繼續進修研究所的學生們，大概到大三時就可以研習這本書了。可是我們想，要是他們能預先讀完線性代數以及矩陣理論之後才來讀這本書，那麼效果一定更好而且進步也會更快。其他有助於消化吸收本書題材的課程還有實變函數論以及拓樸學等等。

有許多習題都對正文的進一步發展具有重要性。另外一些習題則是設計來加強對某一定義或某一定理之充分理解並應用的。當然也有一些習題用來涵蓋正文中所省略不提的材料。爲方便讀者我們也提示如何解某些基礎性的習題。

在表明函數之値的符號中，我們儘量鼓吹不用括號的寫法。因此像 $f(x)$ 就常常直接寫成 fx 。另外每當我們完成證明時，我們就在末尾加上一個□形的符號。最後我們要對許多協助本書之書寫，校閱，印刷等工作提供幫助的朋友們表達我們由衷的謝忱。

本書大部分的內容可以分成兩個學期來讀完。這時可以省略第零章，第六章以及如下的章節：2.14；2.22；2.23；3.8；3.10；3.11；3.12；第三章三個附錄；4.4；4.5；4.10以及5.6 等等。可是如果想讀完第六章的話，那麼第2.23；4.4 以及附錄A就不可以省略。如果只預備開一個學期的課，那麼大概應以讀完第一章，第二章以及第三章的前半爲目標。由於第二章的內容涉及許多的線性代數，因此如果已經熟習線性代數，則花在第二章的時間就可以大大的縮減下來。這樣當讀完第三章以後可能還有時間讀完第四章或者讀第四章前面三節及第五章全部。因爲事實上第五章的題材與第4.4節到第4.10節的內容無關。盼望這些粗

略的說明能夠對讀者研習本書有些幫助。

作者：Richard L. Bishop
Samuel I. Goldberg 謹識

譯者序言

當我們快完成劇變論譯叢的時候，我有機會來到柏克來進行一些研究工作。在一些湊巧的機緣裏認識沙克斯教授以及他的巨著：為學數學的人所寫的廣義相對論。沙教授對於我們推動整套劇變論譯叢的工作很感興趣，他認為這樣的譯叢一定能夠對於中國的現代化運動產生正面的貢獻。我就邀請他給我適當的建議與指導，也許我們也能逐漸發展出第二套有關廣義相對論方面的譯叢。

在我們譯好沙教授那本書以後，我們深深覺得他在書中所做讀者應具有近代微分幾何知識的假設可能對於這譯本的中文讀者有點銜接不上。為了方便讀者隨時參考，我們這兒也把包含所有這些數學基礎知識的教材，就是現在這本由 Bishop 與 Goldberg 所合寫的「流形上的張量分析」譯出來。這樣就能夠讓讀者很穩固的打下廣義相對論方面的數學基礎了。

沙教授已經幫我擬好了一系列的精彩好書可以列入我們這一套廣義相對論的譯叢。盼望我們人力能調動得好，而且國立編譯館也能適當的配合，而使得這套新譯叢能夠在最短的時間內逐漸成形。而且如同劇變論譯叢一樣對於中國的現代化努力貢獻我們的一份心力與祝福。

如果一切順利，我們接下去預備推出的第三本書是比較具有物理學家風格的一本廣義相對論方面的必讀名著：就是由Misner，Thorne 及 Wheeler 三位教授所合寫的「重力論」。這樣我們就可以很紮實的在物理方面認識廣義相對論的內涵。當然我們也可以同時推出另外一本有關廣義相對論的入門書，比較一般性的概述這理論的各項有趣問題，特別從宇宙論的角度來加以衡量。所有這些

進一步發展都要看我們的力量以及國立編譯館的協助配合而定。

感謝沙教授的熱心指導以及國立編譯館的贊助，使我們有機會發展起來這新的工作。願這書能充分的配合第一本書，而讓您順利的建立起來全部所需用的數學知識。最後也感謝這譯本審查者認真的態度與指教並排印者辛苦的校對。

譯者：蕭欣忠、林靜儀
加州柏克來大學

目　　錄

第二章　張量代數　91

第零章

集合論與拓樸學

前半段：集合論

我們無法以這麼短的篇幅來傳達集合論的重要性。因此這兒所著重的在於給出邏輯的完整性並固定我們未來所要使用的符號。我們給出各樣的定義並歸結出各項有關集合論的性質與結果。

0.1 集合

集合論裏所關心的是一些抽象的客體（object）以及由這些客體所組成的各種集合之間的各種關係。我們並不再花功夫從哲學的觀點定義什麼是一個集合，我們這兒就直接接受一般集合的概念而將其當做基礎，用以建立我們的理論。集合（set）在英文中有下列的同義字：class（種類，年級，階級），collection（收集，堆積），conglomeration（集塊，密集固結），bunch（串，束，捆），aggregate（集合，總計）。因此所謂集合就是把隨便一些抽象的客體放在一起加以考慮成一個對象的意思。在上面幾次提到的客體（object）的概念我們在這兒也直接接受爲最初步的觀念而不另加解釋。其同義字有element（元素），point（點）等等。最後我們也把存在於集合與元素之間的關係，例如某個元素落在某個集合裏的概念算爲最初步的觀念而不另加解釋。這時以符號$\in$來表達一個元素落在某集合之中。如果反過來要說某個元素不落在某集合裏，則記爲$\notin$。

就像所有近代的數學一樣，當我們把這些最初步的術語給定之後，我們就可以提出一套運用這些最初步概念的公設（axioms）系統，然後把集合論發展成一連貫的定義與定理系統。有興趣的讀者不妨參考J.Kelly的「一般拓樸學」一書的附錄。我們這兒並不是專門要介紹集合論。因此並不需要用這樣嚴格的方法來講，我們所選用的是一種比較直觀的講法，因

爲這是最自然也最常習用的。

有時我們可能必須考慮某個集合其中所含的元素本身是個集合。因此有可能我們會同時提到 $x \in A$ 以及 $A \in \tau$。這時右邊的 A 與 τ 被解釋成集合，左邊的 x 與 A 被解釋成元素，而說 x 屬於 A，又說 A 屬於 τ。因此同一個 A 或被看成元素，或被看成集合主要隨文義而定。事實上在形式的集合論裏，元素與集合的概念是不需加以區別的。

通常要給出一個集合最方便的方法就是把這集合中所有的元素放在兩個大括號之間，或者在這兩個大括號之間給出此集合之典型元素，並說明此典型元素所需滿足的條件。例如由最小的三個奇自然數所組成的集合可以簡單的寫成 $\{1,3,5\}$。另外如果以 Z 來代表所有整數的集合，則所有奇數所構成的集合可以寫成:

$$\{x \mid \text{存在 } n \in Z \text{ 滿足 } x = 2n+1\}$$

或者寫成：

$$\{x \mid x = 2n+1,\ \ n \in Z\}, \text{或} \ \ \{2n+1 \mid n \in Z\}.$$

如果集合 A 中所有的元素也都落在集合 B 之中，則說 A 這集合是集合 B 的子集合，而使用符號

$$A \subset B \ \ \text{或} \ \ B \supset A$$

來表示。注意上面用到的兩個符號 $\in$ 及 $\subset$ 都具有「屬於」的意思，然而前者表示元素而後者表示子集合，其意義不同，應該仔細從上下文加以辨別。對於一個單只包含一個元素的集合 $\{x\}$ 來講，$\{x\} \subset \{x\}$ 是有意義的。這時我們常省略大括號而把集合 $\{x\}$ 寫成 x，因此 $x \subset x$ 是有意義的。反之如果我們寫 $x \in x$ 就不具意義了。但是 $x \in \{x\}$ 卻又具有意義。因此有時爲了方便而省略符號時，我們必需特別小心辨別文義，免得混亂掉了。

兩個集合 A 與 B 相等當且唯當 $A \subset B$ 與 $B \subset A$ 同時成立。這時我們記爲 $A = B$。我們以後常以 iff 來簡寫「**當且唯當**」(if and only if) 這句話，因此就說：

$$A = B \text{ iff } A \subset B \text{以及} B \subset A.$$

0.2 集合之運算

任意給定兩個集合 A 及 B，則其**交集**(intersection) $A \cap B$ 就定義爲所有同時屬於 A 也屬於 B 的元素。至於其**聯集**(union) $A \cup B$ 則定義爲 A 與 B 中所有元素的全體。因此求兩個集合之交集與聯集的運算可以寫成：

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 以及 } x \in B\},$$
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或者 } x \in B\}.$$

由於有時所考慮的集合可能超過兩個，因此我們更好來給出交集與聯集的一般化定義。假設 J 代表**指標的集合**(index set)，現在考慮具有如下形狀之集合全體 $\{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$，而定義這些集合的交集與聯集爲：

$$\bigcap_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcap \{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$$
$$\bigcup_{\alpha \in J} A_\alpha = \bigcup \{A_\alpha \mid \alpha \in J\}$$

如果指標集合 J 是個有限個元素的集合，例如由頭 n 個正整數所構成，則上面的交集與聯集常可改寫成如下形式：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n,$$
$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n.$$

爲了使得當兩個集合沒有任何共同元素時其交集仍然是個集合，我們必須引入空集合的概念。所謂空集合就是其中不含任何元素的集合，通常以符號 $\varnothing$ 表示之。這種空集合非常有用，我們更可以把空集合看成就是任何集合的子集合。

兩個集合 A 與 B 的差集合 $A-B$ 定義爲所有落在 A 中但卻不屬於 B 中的元素。注意在這定義中 B 不見得是 A 的子集合。但是在特別的情形當 B 爲 A 之子集合時，我們就說 $A-B$ 爲 B 在 A 中的**餘集**(complement)。如

果A代表某個固定的集合，而我們是在處理這個固定集合中的子集合的問題，則我們常略去A不提，而直接以B'來代表B在A中的餘集。

習題 0.2.1 兩個集合A與B的對稱差（symmetric difference）定義爲：$A \triangle B = A \cup B - A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$。因此我們有$A \triangle B = B \triangle A$。試證明上面後一個等式。另外又證明如下的分配律成立：

$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C)$$

可是對於每個集合A，都有$A \triangle A = \varnothing$。

0.3 卡氏乘積（Cartesian product）

一個有序對（ordered pair）由一組有秩序的元素所組成，前面的元素稱爲此有序對的第一個元素或第一個座標，而後面的元素稱爲第二個元素或第二座標。如果一個有序對的第一個元素爲$a \in A$，而其第二個元素爲$b \in B$，則我們將此有序對記爲(a, b)。如果不考慮這兩個元素的前後秩序，則說他們構成一個無序對，而以通常的$\{a, b\}$表示之。這樣的無序對理應考慮兩個不相同的元素，因此$a \neq b$，而且$\{a, b\}$這組元素就是$\{b, a\}$這組元素。可是如果我們考慮有序對的話，前後兩個位置具有不同的意義，因此我們不妨考慮有序對(a, a)，就是其第一及第二座標同爲a的有序對。同時按定義$(a, b) = (c, d)$當且唯當$a = c$以及$b = d$。因此若$a \neq b$，則自然$(a, b) \neq (b, a)$。

設A，B爲兩個集合，我們可以考慮所有如下形狀之有序對的集合：

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

這集合稱爲A與B之卡氏乘積。

習題 0.3.1 $A \times B = B \times A$嗎？

我們可以重複進行卡氏乘積的運算。這時我們可以把$A \times (B \times C)$看