天津大學叢書

劉登勝 齊植蘭 編著

AN INTRODUCTION TO FUNCTIONAL ANALYSIS AND ABSTRACT HARMONIC ANALYSIS

泛函分析與抽象調和分析引論

天津大學出版社

天 津 大 学 丛 书

泛函分析与
抽象调和分析引论

刘登胜　齐植兰　编著

天津大学出版社

内 容 提 要

本书是根据美国麻州大学（*University of* Massachusetts）数学系刘登胜教授来华讲学的内容整理编写的。内容包括Banach空间的基本理论，Banach代数，群代数上的Gelfand理论，Hilbert空间的基本理论，B^*-代数，正规算子的谱理论以及交换群上抽象调和分析的基本理论。本书可作为数学或应用数学专业高年级学生及研究生学习泛函分析或抽象调和分析的教材或教学参考书，也可供高等学校教师或研究人员作为参考书。

（津）新登字012号

泛函分析与
抽象调和分析引论

刘登胜　齐植兰　编著

*

天津大学出版社出版
（天津大学内）
河北省邮电印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米1/32　印张：9 3/4　字数：252千字
1992年2月第一版　1992年2月第一次印刷
印数：1—4 000
ISBN 7-5618-0250-1
O·28
定价：5.90元

序

本书是根据1980年3月至7月我在天津大学给应用数学专业和一些其它院校的教师们讲课的内容，由齐植兰教授整理编写而成的．本书就泛函分析较重要的分支：Banach空间的基本理论，Banach代数，Hilbert空间算子理论的主要内容，特别是Banach代数的Gelfand表示理论作了较详细的介绍，并在此基础上介绍了抽象调和分析的基本理论．

为了便于读者阅读，本书将许多基本知识如实分析与泛函分析的一些重要定理，L^p空间，测度空间等汇集在一起作为第一章．第二章介绍了Banach空间的几个重要定理：Hahn-Banach定理，Banach-Steinhaus定理，开映射定理等．第三章介绍了Banach代数的主要理论，着重讨论了Banach代数上的谱理论及Banach代数的Gelfand表示理论，特别给出了群代数$L^1(\boldsymbol{R})$、$L^1(\boldsymbol{T})$、$L^1(\boldsymbol{Z})$上的Gelfand理论，同时还扼要地讲解了向量值函数的微分与积分，给出了Stone-Weierstrass定理．第四章在介绍熟知的Hilbert空间的同构性与自共轭性的基础上，引出了对合概念，研究了具有对合的Banach代数及B^*-代数的性质，同时介绍了有关正泛函的理论．第五章介绍了Hilbert空间正规算子的谱分解，给出单位分解概念及谱定理，讨论了正算子的平方根．最后一部分介绍调和分析的基本理论．在第六章中介绍了拓扑群概念，着重讨论了局部紧拓扑群上Haar测度的存在性，以此作为第七章的基础．在第七章中介绍了交换群上的调和分析，给出了特征标群的概念和对偶定理以及子群和商群的特征标群的特性，最后给出了局部紧交换群的

结构定理.

本书有些部分写得比较详细，这是针对不同读者考虑的. 本书可以作为数学专业学习泛函分析的教学参考书，或作为选修课调和分析的教材，也可以作为数学系教师和研究生的参考书。

1980年在我讲课过程中，天津大学的三位教师祝肇栋、陈代旺和齐植兰根据讲稿和笔记曾整理出油印本“泛函分析讲义”. 86年至88年间我和我的合作者齐植兰教授对讲义作了进一步的讨论和修改，编成此书. 本书基本上保持了原讲义的面貌，是我的合作者齐植兰教授精心整编、辛勤劳动的果实，也是对我在天津大学工作和生活过的那段美好时日的纪念.

我要对祝肇栋、陈代旺、齐植兰三位教师表示诚挚的感谢，并特别提出我的合作者齐植兰老师，要是没有她的努力，这本书能成为今天这个样子是不可能的. 最后我要对天津大学出版社能使本书顺利出版表示谢意。

美国麻州大学数学系
刘登胜
1988年5月于天津

目　录

第一章　予备知识

§1.1　集合

集合是可以互相区别的事物的汇集，也就是具有某种特定属性的事物的全体。构成一个集合的事物称为该集合的元素或元；用大写字母表示集合，用小写字母表示元素。

x是集合A的元素。我们说“x属于A”记为$x\in A$；x不是集合A的元素，说“x不属于A”，记为$x\notin A$。

不含任何元素的集合称为空集，记为ϕ。

如果集合A中的元素都是集合B的元素，则说集合B包含集合A，记作$B\supset A$；或说A含于B，记作$A\subset B$；也称A为B的子集。显然，每个集合均含于它自身之中，即对任何集合A都有$A\subset A$。集合A的任一异于A本身的非空子集合，称为A的真子集合。

我们规定空集是任何集合的子集合，即对任何集合A有$\phi\subset A$。

如果两个集合A、B有$A\subset B$，而且$B\subset A$，这时A、B由相同元素组成，是同一个集合，称A等于B，记作$A=B$。

一个集合X的一切子集合的集合，称为X的幂集合，或称为X的子集簇，记作PX．显然空集ϕ及X自身必为PX的元素，即$\phi\in PX$，$X\in PX$。

下面介绍集合的运算。用记号

$$A=\{x|\ x\text{具有性质}P\}$$

表示集合A是具有性质P的元素的全体。

集合$\{x|\ x\in A\text{或}x\in B\}$称为集合$A$与$B$的并，记为$A\cup B$。

集合$\{x|\ x\in A\text{且}x\notin B\}$称为集合$A$与$B$的差，记为$A\setminus B$。当$B\subset A$

时称差$A\setminus B$为B关于A的余集，记为C_AB。若在一个固定的集合A中讨论子集B时，也将B关于A的余集简称为B的余集，记作B^c或B'.

集合$\{x|\ x\in A$且$x\in B\}$称为集合A与B的交，记为$A\cap B$。

不难验证集合的并（加）和交（乘）的运算满足以下规律：

（1）$A\cup B=B\cup A$. （交换律）

（2）$A\cap B=B\cap A$. （交换律）

（3）$A\cup\phi=A$，$A\cup A=A$.

（4）$A\cap\phi=\phi$，$A\cap A=A$.

（5）$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$. （结合律）

（6）$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$. （结合律）

（7）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. （分配律）

（8）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. （分配律）

（9）$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$.（De Morgan 定律）

集合$\{x|\ x\in A$但$x\notin B$或$x\in B$但$x\notin A\}$称为集合A与B的对称差，记作$A\Delta B$.

由定义知$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$，且$A\Delta B=B\Delta A$.以上指出对称差也是二集之并，但这两个集$A\setminus B$与$B\setminus A$互相排斥，与任意二集之并是不同的。

若将集合运算的并与交和代数运算的加法与乘法相对比，可以看出它们所遵循的规律有的相同，有的则不同。例如分配律（8）对代数运算是成立的，但（7）则不成立。

§1.2 群与环

定义1 如果在一个非空集合G上定义了一个乘法运算，记为$a\cdot b$（或定义一个加法运算，记为$a+b$），满足以下条件：

（1）$a\in G$，$b\in G$，则$a\cdot b\in G$ $(a+b\in G)$；

(2)对于G中任意元素a、b、c有

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \quad (a+(b+c)=(a+b)+c);$$

(3)在G中有一个元素e适合

$$e\cdot a=a\cdot e=a,\ \forall a\in G$$

(在G中有一元素0，适合

$$0+a=a+0=a,\ \forall a\in G);$$

(4)对于G中的每一个元素a，都有一个元素$a^{-1}\in G$，使得

$$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$$

(对于G中的每一个元素a，都有一个元素$-a\in G$，使得

$$a+(-a)=(-a)+a=0);$$

则称G为一个群．元素e称为单位元素，a^{-1}称为a的逆元素（对于加法运算，0也称为零元素，$-a$也称为a的负元素）．

如果在群G中，对任意$a,b\in G$有$a\cdot b=b\cdot a(a+b=b+a)$，则称$G$为一交换群．

定义2 设在非空集合R上定义了加法运算和乘法运算，满足

(1)关于加法运算形成交换群，即

1) $(a+b)+c=a+(b+c),\ \forall a,b,c\in R;$

2) $a+b=b+a,\ \forall a,b\in R;$

3) 在R中有零元素0，使得$0+a=a,\ \forall a\in R;$

4) 对R中任一元素a，在R中有一个元素b，使得$a+b=0$；

(2)关于乘法满足结合律

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,\ \forall a,b,c\in R;$$

(3)关于加法和乘法满足分配律

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$$

$$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a,\ \forall a,b,c\in R;$$

则称R为一个环．

例 PX关于代数运算对称差Δ及交$\cap$形成一个环．

解 只需用定义来验证．

(1)首先验证PX关于加法—对称差Δ形成交换群．

1) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$, $\forall A,B,C\in PX$;

显然，因为等式两边都是由只属于集合A、B、C中某一个集合而不属于其它两个集合中任何一个集合的元素与同属于三个集合的公共元所组成的集合.

2) $A\Delta B=B\Delta A$, $\forall A,B\in PX$;

由对称差的定义，上式显然成立.

3) 空集合ϕ是零元素,$A\Delta\phi=\phi\Delta A=A$, $\forall A\in PX$;

4) A的逆元素即其自身$A\Delta A=\phi$, $\forall A\in PX$.

(2)结合律和分配律显然成立.

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C,$$

$$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C).$$

以上所给出的环具有以下两个特点:

(1)存在单位元素X.

因为 $X\cap A=A\cap X=A$, $\forall A\subset PX$;

(2)$A\cap A=A$, $\forall A\in PX$; 此时称PX为幂等的.

具有单位元素且是幂等的环是我们今后要研究的主要对象.

§1.3 布尔代数(Boolean Algebra)

定义 3 设R是一个环,若R具有关于乘法的单位元e且是幂等的，即存在$e\in R$,对任意元素$x\in R$有$xe=ex=x$,而且$x^2=x$,则称R为一个布尔代数.

例1 X的子集簇PX，以对称差Δ为加法．以交$\cap$为乘法；由上一节讨论知构成一个布尔代数，记作($PX,\Delta,\cap$).

例2 集合$A=\{0.1\}$，按以下方法定义加法和乘法

+	0	1
0	0	1
1	1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

则$\{A,+,\times\}$为一个布尔代数.

例 3 已给集合$X(\neq\phi)$，研究集合$\{\phi,X\}$，以对称差为加法，以交集为乘法，则与例 2 完全相同，$\{X,\Delta,\cap\}$也是一个布尔代数.

布尔代数R具有以下重要性质：

(1)$x+x=0$，即$-x=x$；$\forall x\in R$.

(2)$xy=yx$；即环R是可交换的.

证明 任给$x,y\in R$，由于R是幂等的，有

$$x+y=(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x+xy+yx+y,$$

所以
$$xy+yx=0. \qquad (1)$$

在(1)式中取$y=x$，得

$$x^2+x^2=x+x=0$$

性质(1)得证.

利用性质(1)有

$$xy+xy=0, \qquad (2)$$

由(1)、(2)式，利用逆元素的唯一性得

$$xy=yx.$$

性质(2)得证.

§1.4 格

定义 4 集合X中的元素之间的一个关系$x\prec y$称为半序关系，如果满足

(1)对于X中的每个元素x有$x\prec x$；

(2)$x\prec y$，$y\prec x$蕴涵$x=y$；

(3)$x\prec y$且$y\prec z$蕴涵$x\prec z$.

此时也称集合X被关系“$\prec$”半序化.注意在以上定义中并不要求X中的每一对元素x、y都有$x\prec y$或$y\prec x$. 例如集合之间的包含关系是

一个半序关系。因为$A\subset A$对任何集合A总是成立的．$A\subset B$及$B\subset A$蕴涵$A=B$．若$A\subset B$，$B\subset C$则$A\subset C$．但对于任何两个集合，并非一定存在包含关系。

以上关系"$\prec$"也可读作"小于等于"，$a\prec b$读作a小于等于b（或a在b之前）。

半序集合X中的一个子集$\{a_\alpha\}$、称为一个链，如果对于该子集中的任意两个元素a_α，a_β都有$a_\alpha\prec a_\beta$或$a_\beta\prec a_\alpha$。

若H是半序集合X的一个子集，如果存在一个元素$u\in X$，使得对H中的每一个元素h有$h\prec u$，则称u为集合H的上界．自然要求u和H中的每一个元素是可比较的。同理，若存在$l\in X$，使得对于H中的每个元素h有$l\prec h$，则称l为h的下界。如果上界的集合中有一个最小元素，则称该元素为H的最小上界．记作$lubH$．同理，下界集合中的最大元素称为H的最大下界。记作$glbH$。

定义 5 如果一个半序集合中的每一对元素(x,y)都有一个最小上界和最大下界，则该半序集合称为一个格。

(x,y)的最小上界记作$x\vee y$，(x,y)的最大下界记作$x\wedge y$。

由以上定义知，所谓$z=x\vee y$（$z=x\wedge y$）是指z满足

(1)$x\prec z$，$y\prec z$（$z\prec x$，$z\prec y$）；

(2)若$x\prec u$，$y\prec u$则$z\prec u$（若$u\prec x$，$u\prec y$，则$u\prec z$）。

若在布尔代数R上，将"$x\prec y$"定义为$xy=x$，则R是半序的。因为容易验证"$\prec$"是一个半序关系．

(1°) $x\cdot x=x^2=x$，所以$x\prec x$。

(2°) $x\prec y\Rightarrow x\cdot y=x$，

$y\prec x\Rightarrow x\cdot y=y$，

所以 $x=y$。

(3°) $x\prec y\Rightarrow xy=x$，

$y\prec z\Rightarrow yz=y$，

又 $xz=xyz=xy=x$，故 $x\prec z$。

命题 关于"$\prec$"布尔代数R是一个格．

证 只需证对任意二元素$x, y \in R$，都存在$x \vee y$、$x \wedge y$.

首先证明$x \wedge y = xy$. 只需用最大下界的定义来验证.

(1′) $xy \cdot x = x \cdot xy = x^2 y = xy$， 所以 $xy \prec x$.

$xy \cdot y = xy^2 = xy$， 所以 $xy \prec y$.

(2′) 若$u \prec x$，$u \prec y$. 则

$uxy = ux \cdot y = uy = u$，故$u \prec xy$.

即xy为最大下界，$x \wedge y = xy$.

再证明 $x \vee y = x + y + xy$.

(1′) $(x+y+xy)x = x^2 + xy + xy = x$,

所以 $x \prec x + y + xy$;

同理，$(x+y+xy)y = xy + y^2 + xy = y$,

所以 $y \prec x + y + xy$.

(2′) 若 $x \prec u$，$y \prec u$ 则

$$u(x+y+xy) = ux + uy + uxy = x + y + xy,$$

所以 $x + y + xy \prec u$,

即 $x + y + xy$为最小上界，$x \vee y = x + y + xy$.

又由$x \in R$，$y \in R$ 知 $x + y \in R$，$xy \in R$，故 $x + y + xy \in R$,

即 $x \wedge y \in R$，$x \vee y \in R$. 所以R是一个格.

例如，§1.3中例1指出($PX, \Delta, \cap$)为一个布尔代数. 又集合间的包含关系为一个半序关系，显然$A \subset B$，当且仅当$A \cap B = A$.

显然A, B的最小上界为$A \cup B$. 用Δ及$\cap$表示有

$$A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B).$$

又A, B的最大下界为$A \cap B$. 故($PX, \Delta, \cap$)为一个格.

在格R中再定义如下的运算：对于$x \in R$定义

$$x' = x + e,$$

其中e为R的单位元素.

由定义有

$$x + x' = x + x + e = e.$$

$$x \cdot x' = x(x + e) = x + x = 0.$$

容易看出这种运算相当于PX中的余集运算．若$A\in PX$，显然$A\Delta A'=X$，$A\cap A'=\phi$．

可以证明：

$$(x\wedge y)'=x'\vee y';$$
$$(x\vee y)'=x'\wedge y'.$$

也称为De Morgan定律．

§1.5 极大理想

以下用R表示一个布尔代数，且在其上半序关系"$x\prec y$"定义为$xy=x$，定义运算$x'=x+e$．由以上讨论知R为一个格且

$$x\wedge y=xy, \qquad x\vee y=x+y+xy.$$

定义 6 设$I\subset R$满足

(1°)若$x,y\in I$，则$x+y\in I$，即I对加法是封闭的；

(2°)若$x\in I$，$z\in R$，则$xz\in I$；

那末I就叫做一个理想．

注意，理想比子环要求要强，对于子环只要求当$x,z\in I$时，$xz\in I$，故理想必为子环．

定理 1 I是一个理想的充要条件为

(1) $x,y\in I$ 则 $x\vee y\in I$；

(2) $x\in I$，$z\prec x$， 则 $z\in I$．

证 必要性．即由定义6的(1°)，(2°)成立，证明定理中的(1)，(2)也成立．

设$x,y\in I$，由(1°)有$x+y\in I$，由(2°)有$xy\in I$，又$x\vee y=x+y+xy$，再利用(1°)得$x\vee y\in I$，即定理中(1)成立．

设$z\prec x$，故$zx=z$．又$x\in I$，$z\in R$，由(2)知$xz\in I$即$z\in I$，故定理中(2)成立．

充分性．由定理中(1)、(2)证定义6中(1°)，(2°)．

设$x,y\in I$，由(1)知$x\vee y\in I$，又

$$(x+y)(x\vee y)=(x+y)(x+y+xy)=(x+y)^2+(x+y)xy$$
$$=x+y+xy+xy=x+y;$$

即 $x+y\prec x\vee y$，由(2)知$x+y\in I$。即定义6中(1°)得证。

若$x\in I$，$z\in R$，$xz\cdot x=x^2z=xz$，故$xz\prec x$。由(2)知$xz\in I$。即定义6中(2°)得证。

定义 7 设M是一个理想，如果$M\neq R$且若N是一个理想而且$N\supset M$，必有$N=R$或$N=M$；则称M为一个极大理想。

由定义可以看出不可能有一个极大理想包含单元e。因为若I为一个极大理想且$e\in I$，则由理想定义知，任取$x\in R$则$xe=x\in I$，于是$I=R$；与极大理想定义不符。

我们用$\mathscr{M}$表示R的所有极大理想的集合，自然需要证明$\mathscr{M}$是非空的。这可由以下定理得出。

定理 2 对于任意的$x\in R$，若$x\neq e$则存在一个包含x的极大理想M；即存在$M\in\mathscr{M}$且$x\in M$。

证 分两步证之。

首先考虑所有包含x而不包含e的理想所构成的集合$\mathscr{X}$。$\mathscr{X}$是非空的。事实上，令

$$I_x=\{yx\,|\,y\in R\}$$

则$I_x\in\mathscr{X}$。因为当取$y=e$时$yx=ex=x\in I_x$即$x\in I_x$。又若$yx\in I_x$，$zx\in I_x$，则$yx+zx=(y+z)x\in I_x$。若$yx\in I_x$，$z\in R$，则$z(yx)=(zy)x\in I_x$。故I_x是包含x的理想。通常称I_x为包含x的主理想。

再证明$\mathscr{X}$有极大元素，即M存在。这里要用到Zorn引理。

Zorn引理 设$\mathscr{X}$是半序集合，$\mathscr{X}$非空。若在$\mathscr{X}$中任取一个链必具有上确界，则$\mathscr{X}$有极大元素。

$\mathscr{X}$按集合包含关系是半序的，在$\mathscr{X}$中任取一个链$\{I_a\}$。现证$\{I_a\}$有上界。作

$$I=\bigcup_a I_a$$

显然，对一切a有$I\supset I_a$。今证I也是理想。事实上，若$x\in I$，$y\in I$，