H. 帕尔库斯

非定常热应力

科学出版社

非定常热应力

H. 帕尔库斯著

何善堉　王同生 译

科学出版社

H. PARKUS

INSTATIONÄRE WÄRMESPANNUNGEN

SPRINGER-VERLAG

1959

內容簡介

本书简要地叙述了在非定常溫度作用下纯弹性、粘弹性和弹塑性体的热应力理论与问题的解法.

全书共分七章. 第一章是基本理论；第二章通过一些例题阐述加热过程与冷却过程的解法；第三章讨论周期变化的溫度場；第四章讨论运动热源的情形；第五章结合一些具体问题研究动力学效应；第六章讨论材料在粘弹性状态下的热应力；第七章讨论材料在弹塑性状态下的热应力.

书末附有一个较详细的文献目录. 译者还补充了一部分文献，以供读者参考.

本书可供从事热应力分析的工程技术人员参考.

非定常热应力

[奥地利] H. 帕尔库斯 著

何善堉 王同生 译

*

科学出版社出版

北京朝阳門内大街 117 号

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1965 年 10 月第一版 开本：850×1168 1/32

1965 年 10 月第一次印刷 印张：7

印数：0001—2,350 字数：180,000

統一书号：13031·2192

本社书号：3335·13—2

定价：[科七] 1.20 元

譯　者　序

本书是由 H. 帕尔库斯所著的 “Instationäre Wärmespannungen” (1959 年，维也纳，施普林格出版社)译出的. 实际上，它是 E. 梅兰与 H. 帕尔库斯合著的 “由于定常温度场而产生的热应力”一书的续篇.

随着我国社会主义建设的飞跃发展，无论在国防建设上或生产建设上，结构的热应力分析问题已日益显出它的重要性. 例如，在原子能工业中，巨大能量的发生；在火箭、导弹以及高速飞行方面，空气动力加热现象；在水利以及其他工业民用混凝土建筑中，水泥水化热及外界温度的变化；所有这些因素都会在结构中引起巨大的温度变化，形成陡峻的温度梯度，往往产生很高的热应力，甚至于能够导致结构的破损. 本书在不同程度上探讨和解决了与此有关的一些热应力计算问题. 应该指出，尽管 E. 梅兰和 H. 帕尔库斯的这两本书，在热应力理论的阐述上还有不够完善的地方，但是，这两本书叙述上都比较简明扼要，易于读懂. 在本书中，不仅探讨了纯弹性体的非定常热应力问题，而且研究了粘弹性体和弹塑性体的非定常热应力问题，并通过许多例题，说明了求解的若干主要方法，因此具有一定的实用价值.

近几年来，还出版了一些热应力方面的书籍，可供进一步研究时参考. 就译者所知，B. A. Boley 和 J. H. Weiner 合著的 “Theory of Thermal Stresses” (John Wiley & Sons, Inc., New York · London: 1960) 在理论阐述上是较为深入的；另外，B. E. Gatewood 所著的 “Thermal Stresses” (McGraw-Hill, New York, 1957)* 也可供参考.

---

* 有中译本：热应力，魏信方、邵成勋、张承煦译，科学出版社，1964.

在本书的末尾，除了原有的参考文献外，译者还选编了一些补充参考文献；其中为了初次接触热应力问题的读者学习时的方便，还列出了一些有关热传导、数学、力学基本理论方面的参考书目。这些书大多是中文的，因此，不熟悉外文的读者在阅读时也不致发生困难。

由于时间比较匆促，加以译者水平的限制，译述上疏漏错误之处在所难免，谨希读者批评指正。

譯　　者

1964年5月于北京

原　　序

梅兰（Ernst Melan）和帕尔库斯（Heinz Parkus）所著"Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder"一书[1]开始对热应力理论作了一个系统的阐述，现在的这本书就是这一阐述的继续，并把它暂时告一段落．在前一本书里假定了温度场是定常的并且材料是纯弹性的，这本书则将处理不定常过程；不仅要考虑纯弹性体，而且还要考虑粘弹性体和弹塑性体．间或引用前一著作是不可避免的；引用该书的时候就简称为**梅兰-帕尔庫斯**．但是我希望即使沒有前一本书的知识，这本新书也不难理解．

最近几年，人们对热应力问题的兴趣有很大的提高，有关文献在数量上的不断增长就是明证．凡是我所知道的文献，均已在文献目录中列出．那些在**梅兰-帕尔庫斯**书中提出过的文献，就不再提出了，只有本书中明显提到的那些著作是例外．

对于所有把他们的著作寄给我给我支持的同行们，我谨在此表示衷心的谢意．

发起写这两本书的 E．梅兰博士，由于其他工作太重，很遗憾未能参与本书的著述．我要感谢他对我的多方鼓励，特别是本书的第 IV 章是受到他的思路的影响的．

还要感谢我的所有同事，首先是 E．吞格尔（Elfriede Tungl）博士，她阅读了全部校样，并在阅读时几乎把所有的公式都重新计算过．

H．帕尔庫斯

1958 年 12 月于维也纳

1）该书有中译本：由于定常溫度場而产生的热应力，何善堉译，科学出版社，1955．

目　　录

I. 热弹性理論的某些一般原理

1. 基本方程

就本书中研讨的问题范围而言，对**梅兰-帕尔庫斯**的II中所给出的基本方程需要作一些补充. 这里，我们先限于研究服从胡克定律的均匀各向同性材料，它的剪切模量 G 及泊松比 μ 与温度无关.

一个非定常的温度场 $T(x, y, z, t)$ 产生一个随时间变化的应力场[1]. 因此，原则上已不再是静力学问题，而属于动力学问题了. 然而，除去例外情况，温度变化是如此缓慢，以致在一般场合下我们将加速度的影响略去不计，而把运动看作是一个接连一个的平衡状态[2]. 这通常就称为**准静态**处理. 但是，在以后V的探讨中，我们再来着重考虑加速度.

此时，**梅兰-帕尔庫斯**中的平衡条件(II.1)要用运动方程

$$\sum_{k} \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial k} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (i, k = x, y, z) \tag{I.1}$$

来代替，这里 ρ 是单位体积的质量.

和**梅兰-帕尔庫斯**相同，在本书中我们也限于研究微小位移及微小位移导数[3]. 这样，**梅兰-帕尔庫斯**中的几何关系方程(II.2)或(II.3)

---

1) 我们假定溫度場和与它相关联的变形无关. 严格地说，这并不正确，因为变形会产生或消耗能量，从而影响到溫度. 但是，这种影响极为微弱. 关于这方面可参考杜阿梅尔 (Duhamel)，莱森 [Lessen, (4)]，韦纳 [Weiner, (2)]，帕尔库斯 [Parkus,(1)] 的著作. 在下述情况下，这种影响可以是十分重要的：溫度变化并不是由外界热源而只是由变形所引起. 例如，在波传播的热弹性阻尼问题中.

2) 这个假定引自杜阿梅尔.

3) 塞思 (Seth) 讨论过两个有限位移的例子.

$$\varepsilon_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial k}+\frac{\partial u_k}{\partial i}\right)$$

及**梅兰-帕尔庫斯**中的协调方程(II.4)以后照旧适用．那里给出的胡克方程(II.7),(II.9)和(II.10)

$$\sigma_{ik}=2G\left(\varepsilon_{ik}+\frac{\mu}{1-2\mu}e\delta_{ik}-\frac{1+\mu}{1-2\mu}\alpha T\,\delta_{ik}\right)$$

也丝毫不变．但是，还必须将热弹性位移方程加以补充．我们就把胡克方程代入运动方程(I.1)，再作与**梅兰-帕尔庫斯**中第 7 页*相似的变换,就有下列三个方程:

$$\Delta u_i+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial i}-\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial(\alpha T)}{\partial i}$$
$$(i=x,\ y,\ z), \tag{I.2}$$

其中 e 是体积膨胀．

除了直角坐标之外,柱坐标 r, φ, z 和球坐标 r, φ, θ 也很重要,相应的公式罗列如后．

柱坐标． 假定对称于 z 轴．那末，沿周向位移分量为零，而应力 $\sigma_{r\varphi}$ 和 $\sigma_{z\varphi}$ 以及径向位移分量 u 和轴向位移分量 w 将与 φ 无关．于是,下列关系式成立(参看**梅兰-帕尔庫斯**第 71 页)**:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\\&\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\end{aligned}\right\} \tag{I.3}$$

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\ \varepsilon_{\varphi\varphi}=\frac{u}{r},\ \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z},\ \varepsilon_{rz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right),\\&e=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{I.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta u-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial r}-\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial(\alpha T)}{\partial r},\\&\Delta w+\frac{1}{1-2\mu}\frac{\partial e}{\partial z}-\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}\frac{\partial(\alpha T)}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{I.5}$$

* 中译本第 8 页至第 9 页——译者注．

** 该书中译本第 98, 99 页——译者注．

这里，**拉普拉斯算子**具有以下形式:

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

球坐标. 假定对称于原点. 那末，只有径向位移分量 $u(r,t)$ 不等于零. 应力 $\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{\varphi\theta}$ 和 $\sigma_{\theta r}$ 等于零，而且所有的量与 φ 和 θ 无关. 运动方程就成为(参看弹性理论教程)

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{2}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\varphi\varphi}. \tag{I.6}$$

对于位移与应变之间的关系式，并且作为协调条件，我们有

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{rr}=\frac{\partial u}{\partial r},\qquad \varepsilon_{\varphi\varphi}=\varepsilon_{\theta\theta}=\frac{u}{r},\\ &e=\frac{\partial u}{\partial r}+2\frac{u}{r},\quad \frac{\partial\varepsilon_{\varphi\varphi}}{\partial r}+\frac{1}{r}(\varepsilon_{\varphi\varphi}-\varepsilon_{rr})=0.\end{aligned}\right\} \tag{I.7}$$

利用胡克定律由式(I.6)和(I.7)消去应力、应变，就给出位移方程

$$\Delta u-\frac{2u}{r^2}-\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial(\alpha T)}{\partial r}, \tag{I.8}$$

其中

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

2. 应变能与达朗贝尔原理

在时刻 t，物体处于由位移 $u_i(x, y, z, t)$ 所表征的变形状态. 我们使物体从瞬时位置发生虚位移 δu_i (在固定时间和不变温度的条件下)，这个虚位移应该使物体的新位置在几何上是可能的，也就是说必须和物体与约束条件的关系相适应. 这时若把方程(I.1)的三个式子顺序乘以 δu_x, δu_y, δu_z 而后相加，再在物体的整个体积上积分，我们就得到

$$\int_V\left(\sum_i\sum_k\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial k}\delta u_i-\rho\sum_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i\right)dV=0$$

$$(i, k=x, y, z). \tag{I.9}$$

现在我们把它变换一下，就有

$$\int_V\sum_k\frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial k}\delta u_i dV=\int_V\sum_k\frac{\partial}{\partial k}(\sigma_{ki}\delta u_i)dV-$$

$$-\int_V \sum_k \sigma_{ki} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial k} dV = \int_O \sum_k \sigma_{ki} n_k \delta u_i dO -$$

$$-\int_V \sum_k \sigma_{ki} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial k} dV.$$

为了把体积分转换为沿这个物体表面的面积分，这里已经应用了**高斯积分定理**. n_k 为表面法向量的分量，法向量以向外的方向为正. 进一步，根据一熟知的弹性理论关系式[1]有

$$\sum_k \sigma_{ki} n_k = p_i, \tag{I.10}$$

这里，p_x，p_y，p_z 是作用在物体表面上的应力向量的三个分量. 现在我们再用

$$W = G \left[\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + 2(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) + \right.$$

$$\left. + \frac{\mu}{1-2\mu} e^2 - \frac{2(1+\mu)}{1-2\mu} \alpha T e \right],$$

$$U = \int_V W dV \tag{I.11}$$

定义物体每单位体积的**弹性位势** W 及总的**弹性势能**（**应变能**）U. 应用胡克定律立即可以证明 $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$ 成立. 由此，根据变分学的法则就有

$$\delta U = \sum_i \sum_k \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ik}} \delta \varepsilon_{ik} = \int_V \sum_i \sum_k \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV.$$

由于

$$\delta \varepsilon_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(\delta u_x), \cdots, 2\delta \varepsilon_{zx} = \frac{\partial(\delta u_z)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta u_x)}{\partial z},$$

前式又转化为

$$\delta U = \int_V \sum_i \sum_k \sigma_{ki} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial k} dV.$$

我们还看出

1）例如可参看 Sokolnikoff, Theory of Elasticity. 2ed., New York, 1956, p. 39.

$$\int_O \sum_i \sum_k \sigma_{ik} n_k \delta u_i dO = \int_O \sum_i p_i \delta u_i dO = \delta A \qquad (I.12)$$

不是别的，而正是外界表面力在虚位移上所做的虚功．因此，式(I.9)具有下列形式:

$$\delta A - \int_V \rho \sum_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV = \delta U \qquad (i = x, y, z). \qquad (I.13)$$

这样一来，我们得到**达朗贝尔原理**：当物体从某一瞬时位置作虚位移时，外力与惯性力所作的功等于它的应变能的改变．应该注意,当虚位移时温度分布保持不变,所以变分过程是等温的．

一般当虚位移时外界反力并不作功(**理想过程**)．因而它们就在方程(I.13)中不出现．

达朗贝尔原理可看作是**虚位移原理**的一般形式，对于静力学或准静力学问题它转化为：

$$\delta A = \delta U. \qquad (I.14)$$

还要着重指出,由方程(I.11)所定义的状态值 U[1] 并不总与物体所实际贮存的应变能相等．它并不是状态函数，而总与施加外载荷和温度变化的过程有关．

3. 哈密尔顿原理．最小势能

从方程(I.13)可直接推出哈密尔顿原理．为此，我们不仅考虑物体的一个孤立的瞬时位置，而且还要考虑物体的位置在两个固定时刻 $t=0$ 和 t 之间的连续变化的路径,并通过变分 δu_i 将这个路径与邻近可能的路径联系起来．但是，这里对研究的时间区间的起点和终点，虚拟位置和实际位置又应该互相重合，$\delta u_i|_0^t = 0$，因此在每一瞬刻方程(I.13)成立．现在我们对时间区间 $[0, t]$ 积分,就得到

$$\int_0^t \delta A dt - \int_0^t dt \int_V \rho \sum_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i dV = \int_0^t \delta U dt. \qquad (I.15)$$

物体的动能由

---

1) 除去一个相加的温度函数而外,它表示物体的“自由能”.

$$K = \frac{1}{2}\int_V \rho \sum_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dV \tag{I.16}$$

给出．求它的变分，就有

$$\delta K = \int_V \rho \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\frac{\partial \delta u_i}{\partial t} dV =$$
$$= \int_V \rho \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i\right) dV - \int_V \rho \sum_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dV.$$

对时间区间 $[0, t]$ 积分，并考虑到 $\delta u_i|_0^t = 0$，就有

$$\int_0^t \delta K dt = -\int_0^t dt \int_V \rho \sum_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\delta u_i dV.$$

把这关系式代入方程(I.15)，就有

$$\delta \int_0^t (U - K) dt = \int_0^t \delta A dt. \tag{I.17}$$

这里我们已把左边变分记号提到积分号之外，因为 U 和 K 都是状态函数，它们只与物体的瞬时状态有关，而与物体达到这一状态的方式无关．

假定外力是保守的，例如是常量，它就具有某一位势 V，并有

$$\delta A = -\sum_i \frac{\partial V}{\partial u_i}\delta u_i = -\delta V. \tag{I.18}$$

再把外力的位势 V 和内力的位势 U 合并表示为总位势 Π，

$$\Pi = V + U, \tag{I.19}$$

于是，方程(I.17)可写成如下形式

$$\delta \int_0^t (\Pi - K) dt = 0 \tag{I.20}$$

这就是一般形式的**哈密尔顿原理**．

在静力学或准静力学的情形中，方程(I.14)将代替方程(I.13)，而**最小势能原理**(**狄利希莱原理**)

$$\delta \Pi = 0 \tag{I.21}$$

将代替哈密尔顿原理．或者用文字表述为：在所有几何上可能的平衡位置中，实际的位置总使势能为最小．这里所以说势能取最

小值，是因为它的二次变分是正的[1]。

4. 余能

在静力学或准静力学情况中，还可把最小势能原理表示为第二最小原理，也就是表示为**最小余能原理**或**卡斯提亚诺**（Castigliano）**定理**.

为了推导这个定理，我们从虚位移原理(I.14)出发:

$$\int_V \sum_i \sum_k \sigma_{ik}\delta\varepsilon_{ik}dV = \int_O \sum_i p_i\delta u_i dO. \qquad (I.22)$$

必须提醒，按照定义，在物体表面上位移已被给定的部分上，δu_i 应该等于零。因而只须沿给定外力的表面部分 O' 上计算面积分。假如设想去掉全部或一部分约束，也就是让物体可以完全或部分地"自由行动"，我们自然就能摆脱这个限制，而认为全部虚位移都是允许的。那时，约束力的虚功就不再是零。

这样一来，在这一章开始所作的微小变形的假定下，特别地可以把实际发生的位移选作虚位移，因为它自然满足协调条件和边界条件。于是，方程(I.22)成为

$$\int_V \sum_i \sum_k \sigma_{ik}\varepsilon_{ik}dV = \int_O \sum_i p_i u_i dO. \qquad (I.23)$$

现在，我们设想应力状态 σ_{ik} 和外力 p_i 被变分，这意味着要观察某一邻近的应力状态和载荷状态 $\sigma_{ik}+\delta\sigma_{ik}$，$p_i+\delta p_i$。但是，在取变分时，应该使邻近状态是静力学可能的，也就是应该满足平衡条件。那末，对它们虚位移原理也成立，由方程(I.23)可写出:

$$\int_V \sum_i \sum_k (\sigma_{ik}+\delta\sigma_{ik})\varepsilon_{ik}dV = \int_O \sum_i (p_i+\delta p_i)u_i dO.$$

从上式中减去方程(I.23)，就剩下

$$\int_V \sum_i \sum_k \varepsilon_{ik}\delta\sigma_{ik}dV = \int_O \sum_i u_i\delta p_i dO, \qquad (I.24)$$

于是，我们得到**虚力原理**.

---

1) 可参看 Trefftz, Handb. d. Physik, Bd. VI, S. 71, Berlin, 1928.

方程(I.24)的左边可看作是某一状态函数 U^* 的变分，这里

$$\left.\begin{aligned} U^* &= \int_V W^* dV, \\ W^* &= \frac{1}{4G}\Big[\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + 2(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \\ &\qquad + \sigma_{zx}^2) - \frac{\mu}{1+\mu}s^2\Big] + \alpha T s. \end{aligned}\right\} \tag{I.25}$$

这一点通过求变分 δU^* 和代入胡克定律就可直接得到，这里同时还可以证明：

$$\varepsilon_{ij} = \partial W^*/\partial\sigma_{ij}.$$

如果 $T\equiv 0$，利用胡克定律将 ε_{ik} 用 σ_{ik} 表示，U^* 可以很容易从 U 推导出来；如果 $T\neq 0$，这样作就不行了.

现在方程(I.24)成为

$$\delta\left(U^* - \int_O \sum_i u_i p_i dO\right) = 0. \tag{I.26}$$

表示式 $U^* - \int_O \sum_i u_i p_i dO$ 称做**余能**，而方程(I.26)表述了**卡斯提亚诺**原理：在所有静力学可能的状态中，实际发生的应力状态总使余能为最小. 所以说余能取最小值，也是因为它的二次变分是正的. 在应用最小势能原理时，物体的变形状态要进行变分；而在应用卡斯提亚诺原理时，则要考虑邻近的应力状态.

如果在物体表面上没有连续分布的力，而作用着集中力 P_1, $\cdots$, P_m，那末，可用 $\sum_n a_n P_n$ 代替方程(I.26)左边的积分，这里 a_n 是力 p_n 的“**功径**”(Arbeitsweg)，也就是由变形引起的 P_n 作用点的位移在 P_n 作用方向上的投影. 设想 U^* 用这些力来表示，$U^*(P_1, \cdots, P_m)$，于是由方程(I.26)有

$$\delta U^* = \sum_n \frac{\partial U^*}{\partial P_n}\delta P_n = \sum_n a_n \delta P_n,$$

这样一来，由变分 δP_n 的任意性，有

$$\frac{\partial U^*}{\partial P_n} = a_n. \tag{I.27}$$