高等学校教学用書

高等数学教程

第二卷　第二分册

B. И. 斯米尔諾夫著

高等教育出版社

高等学校教学用書

高等數学教程

第二卷 第二分册

В. И. 斯米尔諾夫著
孙念增譯

高等教育出版社

本書系根据苏联國营技術理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）出版的斯米尔諾夫(В. И. Смирнов)著“高等数学教程”(Курс высшей математики)第二卷 1952 年第十一版譯出的 (这次的中文版系修訂本)。原書經苏联高等教育部審定为綜合大学数理系以及高等工業学院需用較高深数学的各系作为教本之用。

本書系榮獲斯大林獎金的著作。

本書(第二卷)中譯本暫分三册出版。

本書原由商务印書館出版，自 1956 年 4 月起改由本社出版。

高 等 数 学 教 程

第二卷　第二分册

В. И. 斯米尔諾夫著

孙念增譯

高 等 教 育 出 版 社 出 版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

春明印刷厂印刷　新華書店总經售

書號 13010·1:4　開本 850×1168 1/32　印張 9 7/16　字數 288.000

一九五六年四月上海新一版

一九五六年十二月上海第四次印刷

印數 11.501—26.500　定價 (8) ¥1.30

第二分册目次

第三章　重積分、曲線積分、反常積分及依賴於參變量的積分

第四章　向量分析及場論

第五章　微分幾何基礎

第六章　福里哀級數

第三章 重積分、曲線積分、反常積分及依賴於參變量的積分

§1. 重積分

54. 容積 到現在爲止我們所講作爲和的極限的定積分

$$\int_a^b f(x)dx,$$

是就函數 $f(x)$ 確定在 OX 軸的一個線段(a, b)上的情形考慮的。換句話說,積分區域總是某一個直線段。

在這一節中我們把積分概念推廣到下列情形:積分區域是平面上某一個區域,或是空間中某一個區域,或者甚至於是隨便一個曲面上的某一個區域。在這一節的討論中,我們利用對面積與容積的直覺看法,而不細講有關取極限時一些論點的根據。在本章的最末一節我們再講嚴格討論的基本關鍵。我們由兩次積分的概念開始,它連繫着計算容積的問題,就像上面寫的積分連繫着計算面積的問題一樣,所以,在引進兩次積分的概念之前,我們先看計算容積的問題。

我們知道,計算界於曲線 $y=f(x)$, OX 軸以及兩個縱坐標: $x=a$, $x=b$ 之間的面積問題,是利用定積分的概念解決的,而這面積正是由上面寫的定積分來表達的[I, 87]。

現在我們來看一個類似的問題,就是計算物體的容積 v,這物體的界面是:已知的曲面(S),它的方程是

$$z=f(x, y), \tag{1}$$

平面 XOY,以及一個柱面 (C),這個柱面的母線平行於 OZ 軸,它把(S)投影到平面 XOY 的區域(σ)上(圖 33)。

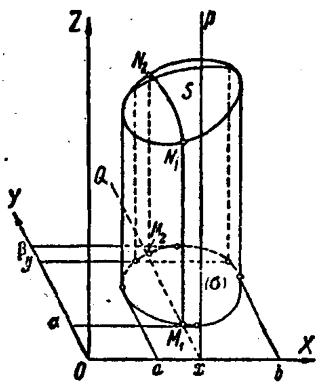

圖 33

在 [I, 104] 中我們講過用定積分計算物體的容積，爲此只需要知道物體的平行斷面；對於現在的問題我們也應用這個方法。

爲簡單起見，我們設曲面(S)整個在平面 XOY 之上，並且平行於坐標軸的直線與(σ)的界線(l)相交時至多交於兩點。

用平行於平面 YOZ 的平面把所考慮的物體分開，這些平面與平面 XOY 的交線是平行於 OY 軸的直線（圖 33 與 34）。把兩個極端斷面的橫坐標各記作 a 與 b。這也就是把界線(l)分爲兩部(1)與(2)的界線上的點

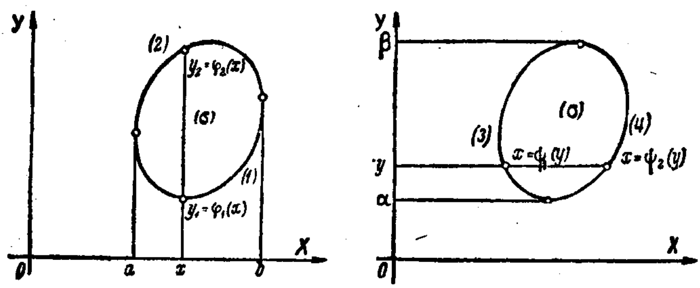

圖 34

的橫坐標，這兩部分(1)與(2)中，一個是平行於 OY 軸的直線穿入區域(σ)的位置，一個是穿出的位置（圖 34）。每一部分各有它的方程

(2) $$y_1=\varphi_1(x);\quad y_2=\varphi_2(x)。$$

與 YOZ 距離爲 x 的平面 PQ 在物體上截下的斷面，它的面積是依賴於 x 的，我們把它記作 $S(x)$。於是就有[I,104]

(3) $$v=\int_a^b S(x)dx。$$

現在只要求函數 $S(x)$ 的表達式，這函數就是圖形 $M_1N_1N_2M_2$ 的面積；它位於平面 PQ 上，它的界線是：平面 PQ 與曲面(S)相交的曲線

N_1N_2，平行於 OY 軸的直線 M_1M_2 以及兩個縱標 M_1N_1 與 M_2N_2。

在所考慮的斷面上，由於所有的點的 x 是常數，曲線 N_1N_2 的縱標可以算作是 y 的函數，這個函數是當 x 是常數時由下面這方程確定的

$$z=f(x, y),$$

這時自變量 y 取在區間 (y_1, y_2) 上，其中 y_1 與 y_2 是直線 M_1M_2 穿入區域 (σ) 與穿出這個區域的點的縱坐標。

根據[I, 87]可以寫成：

$$S(x)=\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy;$$

代入到(3)中就有：

$$v=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x, y)dy。\tag{4}$$

如此我們得到容積的一個表達式，它寫成**兩次積分**的形狀，這裏先把 x 看作常數，對 y 求出積分，然後把所得到的結果對 x 求積分。

用平行於平面 XOZ 的平面分割所給的物體，我們得到同一個容積的另一個表達式：

$$v=\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} f(x, y)dx,\tag{5}$$

其中 x_1 與 x_2 是 y 的已知函數：

$$x_1=\psi_1(y);\quad x_2=\psi_2(y),\tag{6}$$

而 α 與 β 各表示界線 (l) 上的 y 的兩個極端值(圖 33 與 34)。

公式(4)與(5)是在兩個假定下推出的：1. 曲面 (S) 整個位於平面 XOY 之上；2. 曲面 (S) 在平面 XOY 上的投影 (σ) 的界線 (l) 與平行於一個坐標軸的任何直線最多交於兩點。若不滿足條件 1，則公式(4)與(5)的右邊所給出的不是眞正的容積，而是容積的代數和，其中位於平面 XOY 之上的容積帶(+)號；位於其下的帶(−)號。若不滿足條件 2，例如(圖 35)，界線 (l) 與直線 $x=$ 常數的交點有好幾對，則需要把區域 (σ) 分爲幾部分，使得每一部分滿足條件 2，與這對應的，曲

面(S)與容積 v 也就被分爲幾部分,計算每一部分的容積時公式(4)是適用的。

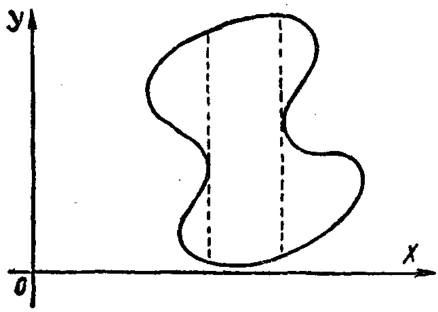

圖 35

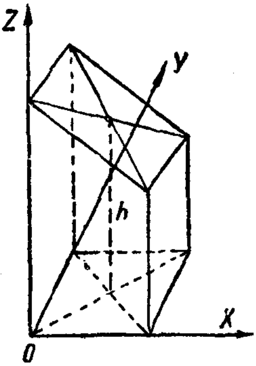

圖 36

例 1. 正稜柱的截斷的容積(圖 36)。底是由坐標軸 OX, OY 與直線 $x=k$, $y=l$ 形成的。截面的方程是

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{\mu}+\frac{z}{\nu}=1\text{。}$$

在這情形下公式(4)給出:

$$v=\int_0^k dx\int_0^l z dy=\int_0^k dx\int_0^l \nu\left(1-\frac{x}{\lambda}-\frac{y}{\mu}\right)dy=\nu\int_0^k dx\left(y-\frac{xy}{\lambda}-\frac{y^2}{2\mu}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=l}=$$

$$=\nu\int_0^k\left(l-\frac{xl}{\lambda}-\frac{l^2}{2\mu}\right)dx=\nu\left(kl-\frac{k^2l}{2\lambda}-\frac{kl^2}{2\mu}\right)=kl\cdot\nu\left(1-\frac{k}{2\lambda}-\frac{l}{2\mu}\right)=\sigma h,$$

其中 σ 是底面積,h 是上截面的對角線交點$\left(對應於\ x=\frac{k}{2},\ y=\frac{l}{2}\right)$的縱標。

2. 求橢圓體

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

的容積。用平面 $z=$常數截這橢圓體時,得到橢圓,具有半軸長

$$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},\quad b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}},$$

於是利用

$$S(z)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right),$$

求得未知容積是

$$v=\int_{-c}^{+c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\frac{4}{3}\pi abc\text{。}$$

55. 二重積分 爲要得到曲線 $y=f(x)$ 下的面積的近似式,我們[I, 87]把它分爲豎條,並且用一些矩形來替代每一個豎條的面積,這些

矩形的底各是每一個豎條的底，而高等於這個豎條上曲線的縱坐標的某一個中間值。當豎條的數目增加而每一個都趨向零時，差誤→0，於是由近似式取極限就成為定積分，它給出面積的準確表達式。

計算容積時也可以用類似的想法。把區域(σ)(圖 37)分成很多個任意形狀的小單元$\varDelta\sigma$，這裏我們一方面用$\varDelta\sigma$記這些個小區域，另一方面也用$\varDelta\sigma$記它們的面積。以每一個這樣的單元作底作

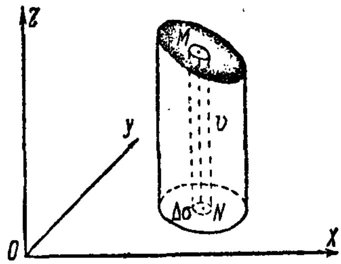

圖 37

一個柱體直到與曲面(S)相交，就把容積v分為單元容積。顯然，我們可以取一個柱體的容積作為這樣的單元容積的近似值，這個柱體的底也是$\varDelta\sigma$，而高是一個縱標，也就是投影為$\varDelta\sigma$的曲面單元上任何一點的z的值。換句話說，這就是在$\varDelta\sigma$上任取一點N，為簡短起見，把曲面(S)上對應於點N的點M的縱標記作$f(N)$，也就是函數$f(x, y)$在N點的值，我們就得到單元容積為$f(N)\varDelta\sigma$，於是

$$v \sim \sum_{(\sigma)} f(N)\varDelta\sigma,$$

這裏要對於填滿面積(σ)的所有的單元面積$\varDelta\sigma$求和。

每一個單元$\varDelta\sigma$愈小，而且單元的數目n愈多時，所得到的近似公式就愈準確，取極限後可以寫成：

$$\lim \sum_{(\sigma)} f(N)\varDelta\sigma = v。$$

抽去幾何的形象，不管函數$f(N)$的幾何意義，我們還是可以確定這個和的極限，這個極限叫做函數$f(N)$沿區域(σ)的**二重積分**，並且表示成：

$$\iint_{(\sigma)} f(N)d\sigma = \lim \sum_{(\sigma)} f(N)\varDelta\sigma。$$

這個極限的存在是很明顯的，因為像我們以上所講的，這個極限應

當給出以上我們所作的容積 v。自然這種論證不是嚴格的，不過，對於具有一般條件的 $f(N)$ 以及所有的連續函數的任何情形，上述極限的存在可以嚴格證明。

若我們設 $f(N)=1$，則得到區域 (σ) 的面積 σ 的一個表達式，而是二重積分的形狀：

$$\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma。$$

我們來敍述二重積分的完全定義：設 (σ) 是一個有界的平面區域，$f(N)$ 是這個區域上的點的函數，就是說，在區域 (σ) 的每一點 N 取確定值的一個函數。把區域 (σ) 分為 n 個部分區域，並設 $\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，…，$\Delta\sigma_n$ 是這些部分的面積，而 N_1，N_2，…，N_n 各為這些部分上的任一點。作出乘積的和：

$$\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\cdot\Delta\sigma_k。$$

當分成的數目 n 無限增加並且每一個部分區域無限減小時，這個和的極限叫做函數 $f(N)$ 沿區域 (σ) 的二重積分

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\lim\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta\sigma_k。$$

附註 設 d_k 是面積為 $\Delta\sigma_k$ 的部分區域中兩點間的最大距離（這個區域的直徑），而 d_1，d_2，…，d_n 中的最大的數是 d。在定義中所說的每一個部分區域 $\Delta\sigma_k$ 無限減小這句話就具有 $d\to 0$ 的意義。如果用字母 I 來記積分的數值，則上述定義就相當於：對於給定的任何正數 ε，存在這樣一個正數 η，使得[參考 I，87]只要 $d\leqslant\eta$，則

$$\left|I-\sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta\sigma_k\right|\leqslant\varepsilon。$$

在這一章的最後，討論重積分的完整理論時，我們再講面積的嚴格定義，並且更準確的講可以求積分的那樣的區域 (σ) 的概念，以及如何把它分成各部分區域，並且對於連續函數 $f(N)$ 以及某些類的間斷函數，

來證明上述和的極限的存在。

56. 二重積分的計算法　把二重積分考慮作容積，我們可以把二重積分化爲兩次積分。

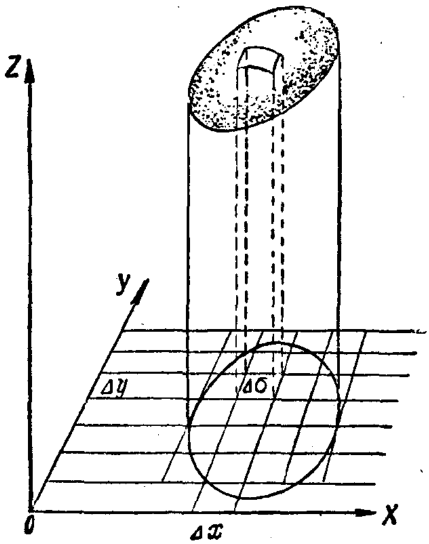

圖 38

對於區域(σ)應用直角坐標，設用邊 Δx, Δy 平行於坐標軸的矩形來分割面積得到單元 $\Delta\sigma$（圖38），並設(x, y)是點 N 的坐標。這時可以寫成：

$$f(N)=f(x,y);$$
$$\Delta\sigma=\Delta x\Delta y;$$
$$d\sigma=dx\,dy,$$

並且

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(x,y)\,\Delta x\Delta y=\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dx\,dy。$$

另一方面，應用[54]中所講的用兩次積分來表達容積的方法，還可以寫成：

$$(7)\quad \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dx\,dy=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2} f(x,y)dy=\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2} f(x,y)dx,$$

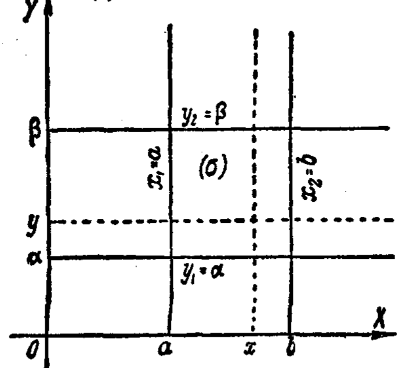

圖 39

這就給出計算二重積分的法則，而與函數$f(x, y)$的幾何意義無關。

若是先對y求積分，則先把 x 算作常數，而積分限 y_1 與 y_2 是 x 的函數，這兩個函數是由[54]中公式（2）所確定的。若先對x求積分，也有類似的情況。只有當積分區域是個矩形而它的邊平行於坐標軸

時，在兩次積分中先求積分的積分限才可能是常數，而不依賴於第二次積分的積分變量。若(σ)是界於直線(圖 39)：

$$x=a;\quad x=b;\quad y=\alpha;\quad y=\beta$$

的矩形區域，則

$$(8)\quad \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)dx\,dy=\int_a^b dx\int_\alpha^\beta f(x, y)dy=\int_\alpha^\beta dy\int_a^b f(x, y)dx。$$

表達式 $d\sigma=dx\,dy$ 叫做在直角坐標系中的面積單元。

注意，在公式(7)中把x看作常數先對y求積分這件事，就對應於沿着平行於 OY 軸的一豎條內所含的矩形求和，其中所有的矩形有相同的寬度dx，它被提出在第一次求積分的記號之外。第二次對x求積分對應於把沿平行於OY軸各條求和所得的所有結果再相加。在本章最後一節中我們講公式(8)與(7)的嚴格根據。

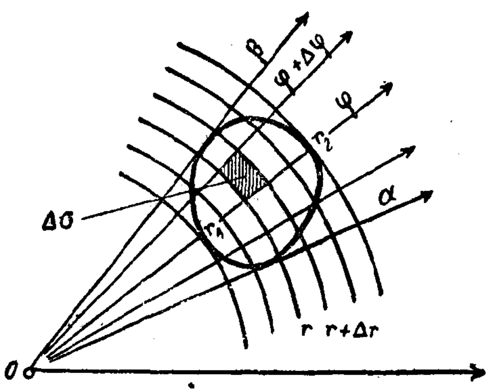

圖 40

現在我們用極坐標(r, φ)來處理區域(σ)。這時曲面(S)的方程應當寫成$z=f(r, \varphi)$。

畫出曲線族$r=$常數以及$\varphi=$常數，就是同心圓周以及通過原點的半線，我們得到單元$\Delta\sigma$(圖 40)。半徑為r與$(r+\Delta r)$的圓弧以及斜角為φ與$(\varphi+\Delta\varphi)$的兩條半線交成的曲線圖形$\Delta\sigma$，可以考慮作邊長為Δr與$r\Delta\varphi$的矩形，所差的只是高級的無窮小，於是

$$\Delta\sigma=r\Delta r\Delta\varphi,$$

這時可以寫成：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\lim\sum_{(\sigma)} f(r, \varphi)r\Delta r\Delta\varphi=\iint\limits_{(\sigma)} f(r, \varphi)r\,dr\,d\varphi。$$

這裏我們得到一個二重積分，它的被積函數是$f(r, \varphi)r$。為要計算它，可以應用化為兩次積分的法則，不過現在只是r與φ佔有了x與y的地位。

先對r求積分把φ算作常數，這對應於沿着界於兩個半線φ與$(\varphi+d\varphi)$之間的單元$\Delta\sigma$求和，而把$d\varphi$放在第一次求積分的記號之外。第二次對φ求積分對應於把第一次求和所得到的所有結果相加。應用上述法則時，我們首先標記出變量φ的極端值α與β(對應於[54]中x的極端值)。以後對於固定的φ找出半線$\varphi=$常數穿入與穿出(σ)的點的向量半徑r_1與r_2(這對應於在[54]中確定y_1與y_2)。確定了這些已知量，就有：

$$(9)\qquad \iint\limits_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)} f(r, \varphi)r\,dr\,d\varphi=\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r_1}^{r_2} f(r, \varphi)r\,dr,$$

其中r_1與r_2是φ的已知函數。

圖40對應於坐標原點在界線(l)外的情形。若原點在界線(l)內，則可把φ看作是由0變到2π，並且對於給定的φ值r由0變到r_2，其中r_2來自曲線(l)的方程：$r_2=\psi(\varphi)$，這就給出(圖41)：

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(N)d\sigma=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{r_2} f(r, \varphi)r\,dr。$$

表達式

$$(10)\qquad r\,dr\,d\varphi$$

叫做**極坐標系中的面積單元**。

特別是，若$f(N)=1$，我們就得到在[I, 102]中所講的曲線所包的面積的極坐標表達式：

$$\int_\alpha^\beta d\varphi\int_{r_1}^{r_2} r\,dr=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta (r_2^2-r_1^2)d\varphi。$$

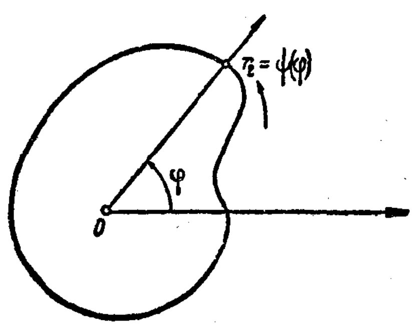

圖 41

([I, 102]中的公式對應於$r_2=r$, $r_1=0$的情形。)

例　求界於半徑爲 a 的球與通過球心的半徑爲 $\frac{a}{2}$ 的正圓柱之間的容積（圖 42）。取球心作坐標原點，通過球心垂直於圓柱的軸的平面作爲平面 XOY，通過球心以及平面 XOY 與圓柱的軸的交點的直線作爲 OX 軸。根據對稱性，可以說，未知容積是界於平面 ZOX, XOY 以及上半球之間的一部分圓柱體的容積的四倍。

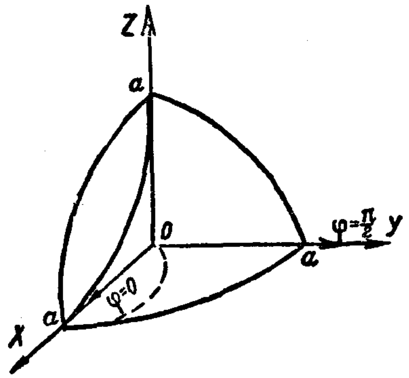

圖　42

這裏積分區域是圓柱的半個底，它的界線由半圓周

$$r=a\cos\varphi$$

以及 OX 軸上的線段組成，其中角度 φ 由 0 改變到 $\frac{\pi}{2}$，對應於半線——由 OX 軸到 OY 軸。

球面的方程

$$x^2+y^2+z^2=a^2,$$

在這情形下可以寫成：

$$z^2=a^2-(x^2+y^2),\quad z=\sqrt{a^2-r^2}.$$

所以，未知容積是：

$$v=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\cos\varphi}\sqrt{a^2-r^2}\,r\,dr=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]\Bigg|_{r=0}^{r=a\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a^3-a^3\sin^3\varphi)\,d\varphi=\frac{4}{3}a^3\left[\varphi+\cos\varphi-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]\Bigg|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{4}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

57. 曲線坐標　在前一段中，我們就直角坐標與極坐標的情形，確定了面積單元，並且考慮了計算積分的問題。現在我們就任何的坐標 (u, v) 來考慮這個問題。依照公式

$$\varphi(x, y)=u;\quad \psi(x, y)=v. \tag{11}$$

引用任何的新的變量 u 與 v 來替代直角坐標 x 與 y。

給 u 與 v 所有可能的常數值，在平面上就得到兩族線（圖 43），一般說來，這些線都是曲線。平面上點 M 的位置是由一對數 (x, y) 來確定的，或者根據(11)，它就被一對數 (u, v) 所確定。這一對數 (u, v) 叫做點 M 的曲線坐標。由方程(11)解出 x 與 y，就得到直角坐標 (x, y) 通過曲線坐標 (u, v) 的表達式：

(12) $$x=\varphi_1(u, v);\quad y=\psi_1(u, v)。$$

在極坐標的情形 u 就是 r，v 就是 φ。以上我們講到的 u 爲常數以及 v 爲常數的線叫做曲線坐標 (u, v) 的坐標線。它們形成兩族線（在極坐標中是圓周族與半線族）。

現在我們來確定用曲線坐標 (u, v) 時的面積單元 $d\sigma$。

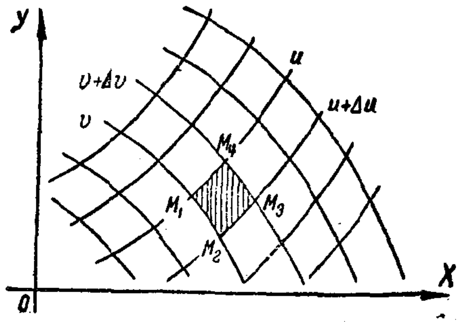

圖 43

爲此我們考慮兩對很近的坐標線：

$$\varphi(x, y)=u;\quad \varphi(x, y)=u+du,$$
$$\psi(x, y)=v;\quad \psi(x, y)=v+dv$$

所形成的面積單元 $M_1M_2M_3M_4$（圖 43）。

不計高級無窮小，這個四邊形 $M_1M_2M_3M_4$ 的頂點的坐標就是 [I, 68]：

$$(M_1)\,x_1=\varphi_1(u, v);\quad y_1=\psi_1(u, v)。$$

$$(M_2)\,x_2=\varphi_1(u+du, v)=\varphi_1(u, v)+\frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial u}du;$$

$$y_2=\psi_1(u+du, v)=\psi_1(u, v)+\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial u}du。$$

$$(M_3)\,x_3=\varphi_1(u+du, v+dv)=\varphi_1(u, v)+\frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial v}dv;$$

$$y_3=\psi_1(u+du, v+dv)=\psi_1(u, v)+\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial u}du+\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial v}dv。$$

$$(M_4)\,x_4=\varphi_1(u, v+dv)=\varphi_1(u, v)+\frac{\partial\varphi_1(u, v)}{\partial v}dv;$$

$$y_4=\psi_1(u, v+dv)=\psi_1(u, v)+\frac{\partial\psi_1(u, v)}{\partial v}dv。$$

由這些公式直接推出，$x_2-x_1=x_3-x_4$ 與 $y_2-y_1=y_3-y_4$，由這兩個等

式推知,線段 M_1M_2 與 M_4M_3 相等而且同向。同理線段 M_1M_4 與 M_2M_3 也是如此,就是說,不計高級無窮小的話,$M_1M_2M_3M_4$ 是個平行四邊形,它的面積等於三角形 $M_1M_2M_3$ 的面積的二倍,依照解析幾何學中已知的公式,就有:

$$d\sigma=|x_1(y_2-y_3)-y_1(x_2-x_3)+(x_2y_3-x_3y_2)|。$$

代入以坐標的表達式,就得到用任何曲線坐標時的面積單元公式:

$$d\sigma=\left|\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}\right|du\,dv=|D|\,du\,dv,$$

其中 D 叫做函數 $\varphi_1(u,v)$ 與 $\psi_1(u,v)$ 對變量 u 與 v 的函數行列式:

$$D=\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial u}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial v}-\frac{\partial\varphi_1(u,v)}{\partial v}\frac{\partial\psi_1(u,v)}{\partial u}。$$

結果二重積分中的換元公式就是:

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\sigma)}F(u,v)\,|D|\,du\,dv, \tag{13}$$

其中 $F(u,v)$ 是 u 與 v 的一個函數,它是由 $f(x,y)$ 經過變換(12)得到的結果。u 與 v 的積分限由區域 (σ) 的形狀來確定,就像在[56]中對極坐標所講的一樣。

在變換(11)的公式中,我們把 u 與 v 看作點的新的曲線坐標,而平面則看作是不改變的。我們也可以把 u 與 v 仍然看作是直角坐標,那時公式(11)就給出平面的變換,使得具有直角坐標 (x,y) 的點變換爲具有直角坐標 (u,v) 的點。這樣的變換使得區域 (σ) 變形爲新的區域 (Σ)。從這樣的觀點來看,我們應當把公式(13)改寫成:

$$\iint\limits_{(\sigma)}f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{(\Sigma)}F(u,v)\,|D|\,du\,dv,$$

這裏 u 與 v 是區域 (Σ) 的點的直角坐標,沿 (Σ) 的積分的積分限像在[56]中所講的一樣來確定。若設 $f(x,y)=F(u,v)=1$,則得到區域 (σ) 的面積 σ 的一個表達式,而是寫成沿 (Σ) 的積分的形狀的:

$$\sigma=\iint\limits_{(\Sigma)}|D|\,du\,dv。$$