

现代数学丛书

虞言林 著

指标定理 与热方程 方法

INDEX THEOREM
AND
HEAT EQUATION
METHOD

YU YANLIN

上海科学技术出版社

0186.1
Y 87-2

·现代数学丛书·

指标定理与热方程方法

虞言林 著

上海科学技术出版社

责任编辑 赵序明

· 现代数学丛书 ·

指标定理与热方程方法

虞言林 著

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路 450 号)

新华书店上海发行所经销 上海市印刷三厂印刷

开本 787×1092 小 1/16 印张 17 插页 4 字数 218,000

1996 年 11 月第 1 版 1996 年 11 月第 1 次印刷

印数 1—1,200

ISBN 7-5323-3909-2/O·196

定价: 32.00 元

内 容 提 要

本书介绍微分几何学中一些著名的椭圆算子的局部指标定理。全书有 8 章。首先系统介绍了紧致无边黎曼流形上的热方程与椭圆方程的基本理论、示性类的陈-韦依(Weil)理论以及超代数论。然后将它们用来阐述与严格证明局部指标定理。

本书可作为数学专业研究生的教材, 也可供数学物理工作者参考。

EA01/21

Modern Mathematics Series

INDEX THEOREM AND HEAT EQUATION METHOD

Yu Yanlin

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Index theorem and heat equation method

Yu Yanlin

Abstract

The main purpose of this book is to provide a self-contained, complete and rigorous representation of the local version of the Atiyah-Singer index theorem. It contains proofs of the local index theorems for de Rham-Hodge operators, Signature operators, Dirac operators by using the heat equation method. They are up to standard of the pure Mathematics. A method of a Chern root algorithm is introduced as well, which is simpler than and as efficient as methods given by other ideas.

《现代数学丛书》编辑委员会

名誉主编 苏步青

主 编 谷超豪

委 员 (以姓氏笔划为序)

丁夏畦 王梓坤 叶彦谦

石钟慈 冯克勤 刘应明

严志达 杨 乐 吴 方

李大潜 陈希孺 陈翰馥

张恭庆 胡和生 姜伯驹

梁友栋 曹锡华 程民德

Modern Mathematics Series
Editorial Committee

Honorary Editor-in-Chief Su Buchin

Editor-in-Chief Gu Chaohao

Members

Cao Xihua

Chen Hanfu

Chen Xiru

Cheng Minde

Ding Xiaqi

Feng Keqin

Hu Hesheng

Jiang Boju

Li Tatsien

Liang Youdong

Liu Yingming

Shi Zhongci

Wang Zikun

Wu Fang

Yan Zhida

Yang Le

Ye Yanqian

Zhang Gongqing

出版说明

从60年代起,由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著,并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著,有几部专著并已在外国出了外文版,受到国内外数学界和广大读者的高度重视,获得了很高的评价.原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世,但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念.由于某些客观原因,《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿.

为了适应现代数学的迅速发展,更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果,必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作.充实编委会的力量.考虑到不少编委年事已高,经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后,于1990年对编委会作了调整,补充了一些著名的中年数学家和学科带头人,建立了新的编委会,并进一步明确了本丛书的宗旨.

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编,18位著名数学家任委员.编委会负责推荐(或审定)选题和作者,主持书稿的审核等工作.

《现代数学丛书》的宗旨是:向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果,反映我国数学研究的特色和优势,扩大我国数学研究成果的影响,促进学科的发展和国内外的学术交流.

为了实现上述宗旨,本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整研究成果的现代数学学术专著.

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见。

上海科学技术出版社

前言

即使出不了文章,也要搞 Atiyah-Singer 指标定理.

——陈省身

这本书的前身是 1986 年南开数学所几何年活动中的一份讲义. 1992 年被列为全国数学研究生暑期教学中心的教材. 在这份讲义的基础上, 我们补充了流形上热方程理论, 陈-韦依 (Weil) 示性式论, 以及一些技术性的改进, 终于成了现在这本书. 在成书的过程中, 我们力图保持使大学高年级学生及研究生感到可读的水平, 因而补充了一些未见诸文献的计算和论证细节. 没料到这么一来竟花了长长的 8 个年头. 在这 8 年里真有不少感慨. 主要有两个方面: 一是不想说的; 另一却是极想借此机会有所表示的.

Atiyah-Singer 指标定理是数学宝库中一颗璀璨的明珠. 对它的高度评价及赞美早已路人皆知了. 后来在这个领域中又出现了大量极有价值的成果, 尤其在物理学的想法介入之后, 更显生机. 不过在后来的这个大潮中, 似乎出现了一丝执拗, 使得用古典的数学标准来评判成了难于启齿的事了. “各自为政”之事也时有发生. 这种现象对于孤立在外的我来说, 自是难于说个明白. 这便是前面提到的不想多说的感慨. 现在粗略地谈谈本书的内容, 供阅读时参考. 本书的第 1 章介绍了黎曼几何学中的基础知识, 侧重介绍活动标架法, 以为本书后面的具体计算做准备. 这一章中还顺便指出活动标架法与主丛的联络论的关系, 希望使一些读者在读其他的数学文献时, 遇到主丛联络的概念而不致发愤. 第 2 章和第 4 章介绍热方程与椭圆方程的一般理论, 以热方程方法处理椭圆方程论. 在这套理论中依次出现了三个技术性难点, 它们是: (1) 热方程的 Cauchy 问题的解的存在性 (第 2 章 § 2.3);

(2) Hodge 定理(第 2 章 § 2.4); (3) 热方程的基本解的渐近展开(第 4 章 § 4.3). 为了处理上面提到的三个难点, 人们引入了一些重要的概念, 例如基本解(第 2 章 § 2.1)、Levi 算法(第 2 章 § 2.1)和 MP 拟基本解(第 4 章 § 4.1)等. 此外为使推理中的逻辑关系简明, 我们在第 2 章 § 2.2 中引入“初解”的概念. 这是一个权宜之计的概念, 怕是难登大雅之堂. 第 3 章介绍陈-韦依(Weil)理论. 这是拓扑示性类中的一个重要篇章. 在微分几何学中, 为数众多的涉及整体与局部关系的探讨, 是常常经过这道关口的. 在这一章 § 3.3 中引入的陈根算法是在微分几何这一层次上的, 而不是通常拓扑学中同调论那一层次上的. 引入的目的是想使心急的读者在阅第 6 章 § 6.1 的讨论之后, 便能对局部指标定理的证明有一个大体的了解. 第 5 章介绍 Clifford 代数与超代数. 前者是经典的, 只是定理 5.1.8 的证明也许比传统的简单一些. 在超代数的介绍中, 我们希望通过命题 5.2.9 与命题 5.2.12 反映超代数这一观念的妙处. 第 6、7 章介绍几个椭圆算子的局部指标定理, 特别仔细地讨论了 Signature 算子的情形. 第 8 章引进 Atiyah-Singer 算子的概念, 它是几何中出现的一阶椭圆算子的统一描写. 当联络取定之后, 这种算子相当于一种超 G -Clifford 模.

最后, 要谈一谈前面提的“极想有所表示的感慨”: 就是要感谢下列数学界前辈、同行和挚友, 他们在本书的写作中给予了极大的帮助.

在这篇前言开始的一句话, 是在 1985 年夏天, 陈省身先生在筹备 1986 年南开数学所几何年时讲的. 它体现了一种期待、一份“偏袒”、一项号召. 那句话对我的文章[23]的完成起了决定性的影响, 以致在纪念中国数学会成立 50 周年时, 拿到大会上. 那篇文章也就是后来几何年讲义的主要部分.

伍鸿熙先生是我的良师益友, 我们长时期就微分几何、指标定理交换着看法. 在写本书时, 我的一些模糊认识常常得到他的指点.

我曾有幸先后从学于江泽涵、廖山涛、姜伯驹、吴光磊、吴文俊

等各位先生。他们的正派学风、严谨的治学态度，非亲眼目睹是很难想象的。这本书的写作如能体现出他们的教化所致，我将是非常高兴的。

陆启铿先生在本书写作的最后阶段，对我大力扶助，使我难忘。

我的许多朋友，如沈纯理、孟道骥、李安民、周青、张伟平、陆志勤等对书稿提出过宝贵的意见；冯惠涛和成斌订正了书稿中不少谬误。为此特向以上各位深表谢意。

本书在撰写过程中得到数学天元基金的资助，在此表示感谢。

虞言林

1995年3月

于中国科学院数学研究所

目 录

前言

基础公式表	1
-------------	---

第1章 黎曼几何的准备知识	7
---------------------	---

§ 1.1 黎曼几何的基本概念	7
§ 1.2 么正标架法	12
§ 1.3 活动标架法——主丛及其上的联络	21
§ 1.4 广义张量分析	25
§ 1.5 微分算子与椭圆算子	32
§ 1.6 de Rham-Hodge 算子和 Signature 算子	36
§ 1.7 法坐标系	55
§ 1.8 二维球面上的一些计算	67

第2章 椭圆方程与热方程的一般理论	79
-------------------------	----

§ 2.1 热方程的基本解观念与 Levi 算法	80
§ 2.2 基本解的存在性	85
§ 2.3 热方程的 Cauchy 问题	89
§ 2.4 椭圆方程的一般理论——Hodge 定理	92
§ 2.5 Hodge 定理的推论	99
§ 2.6 指标问题	104

第3章 陈-韦依理论	107
------------------	-----

§ 3.1 示性式与示性类	107
§ 3.2* 示性式与示性类的一般理论	116
§ 3.3 陈根算法	120

第4章 MP 拟基本解及应用	123
----------------------	-----

§ 4.1 MP 拟基本解	123
§ 4.2 初解的存在性	128

§ 4.3 热核的渐近展开	135
§ 4.4 椭圆算子的局部指标	137
第5章 Clifford 代数与超代数.....	146
§ 5.1 Clifford 代数	146
§ 5.2 超代数	153
§ 5.3 超迹的计算	158
第6章 Signature 算子的局部指标定理.....	163
§ 6.1 试论 Signature 算子的局部指标定理.....	163
§ 6.2 严格的证明	173
第7章 de Rham-Hodge 算子与 Dirac 算子的局部 指标定理.....	198
§ 7.1 de Rham-Hodge 算子的局部指标定理.....	198
§ 7.2 Dirac 算子的局部指标定理.....	200
第8章 Atiyah-Singer 算子	219
§ 8.1 G -Clifford 模.....	220
§ 8.2 G 结构	231
§ 8.3 超结构	233
§ 8.4 扭化算子的局部指标定理	240
参考文献.....	248
索引.....	250

CONTENTS

Preface

Table of basic formulas.....	1
-------------------------------------	----------

Chapter 1 Riemannian geometry preliminary7

§ 1.1 Basic notions of Riemannian geometry.....	7
§ 1.2 Orthonormal frame method	12
§ 1.3 Moving frame method—Principal bundles and connections	21
§ 1.4 General tensor calculus	25
§ 1.5 Differential operators and elliptic operators.....	32
§ 1.6 de Rham-Hodge operator and Signature operator	36
§ 1.7 Normal coordinates.....	55
§ 1.8 computations on sphere	67

Chapter 2 General theory on elliptic equations and heat equations79

§ 2.1 Notions of fundamental solution and Levi's iteration	80
§ 2.2 Existence of fundamental solution	85
§ 2.3 Cauchy problem for heat equation	89
§ 2.4 General theory for elliptic equations—Hodge theorem	92
§ 2.5 Corollaries of Hodge theorem	99
§ 2.6 index problem.....	104

Chapter 3 Chern-Weil theory..... 107

§ 3.1 Characteristic forms and characteristic classes.....	107
§ 3.2* General theory on characteristic forms and classes.....	116
§ 3.3 Chern root algorithm.....	120

Chapter 4	MP parametrix and its applications.....	123
§ 4.1	MP parametrix.....	123
§ 4.2	Existence of initial solution.....	128
§ 4.3	Asymptotic expansion for heat kernel	135
§ 4.4	Local index of elliptic operator.....	137
Chapter 5	Clifford algebra and superalgebra	146
§ 5.1	Clifford algebra	146
§ 5.2	superalgebra	153
§ 5.3	computations on supertraces	158
Chapter 6	Local index theorem for Signature operator	163
§ 6.1	Glance at local index theorem for Signature operator.....	163
§ 6.2	Rigorous proof	173
Chapter 7	Local index theorems for de Rham-Hodge operator and Dirac operator.....	198
§ 7.1	Local index theorem for de Rham-Hodge operator.....	198
§ 7.2	Local index theorem for Dirac operator.....	200
Chapter 8	Atiyah-Singer operator.....	219
§ 8.1	G-Clifford module	220
§ 8.2	G structure.....	231
§ 8.3	Superstructure	233
§ 8.4	Local index theorems for twisted operators	240
References		248
index		250