常用数学解题思维方法

庞之垣　编著

重庆大学出版社

常用数学解题思维方法

庞 之 垣 编著

重 庆 大 学 出 版 社

内 容 简 介

本书根据作者多年教学经验及近几年全国数学联赛的辅导材料为基础，重点阐述了数学解题中常用的思维方法。内容包括充分利用已知信息、特殊与一般、问题转换、否定与反例、不等式、必要与充分条件、穷举、同余、非几何题的几何直观，解完之后共十部分。

本书有助于培养读者解题前的分析、探索和解题后的深思、穷究。对逐步养成正确的思维方法和良好的思维习惯将起到很好的作用。

常用数学解题思维方法
淀之垣 编著
责任编辑 任善强 谢晋洋

重庆大学出版社出版发行
新 华 书 店 经 销
中国科学技术情报研究所重庆分所印刷厂印刷
*
开本：787×1092 1/32 印张：5.625 字数：126千
1988年8月第1版 1988年8月第1次印刷
印数：1—7.500

标准书号：ISBN7-5624-0105-5 / O·18 定价：1.04元

前 言

当今世界，数学已渗透到科学的各个领域，对社会已经产生越来越大的影响。人们对数学的需求在日益扩大并逐步深入。人们从小学到大学，到研究生，乃至走上工作岗位，都离不开数学。但数学又常常使人望而生畏。它那严密的逻辑、无穷的变化、高度的抽象、纷繁的演算，让人大有难予驾驭之感。因此，在许多人的心目中，数学成了高难学科。这种状况，除了学科本身的特点外，教学不得法也是一个重要原因。如果能引导学生掌握数学学习的正确思维方法，使其能钻进去，融汇贯通，举一反三，遨游于千变万化之中，那将会其乐无趣。

学习数学离不开解题。但究竟能否学好，并不完全在于解题的多少，还在于解题前的分析、探索和解题后的深思、穷究。因此，培养学生正确的思维方法和良好的思维习惯，实际上比按步就班地传授知识更重要、更有效。

本书正是出于此目的，以近几年全国数学联赛前的辅导报告材料为基础，再加以扩充而成。大多数例题选自国内外中学数学竞赛题，有少量大学数学竞赛题目，均不超出微积分的内容。但鉴于笔者水平有限，错误在所难免。愿为引玉之砖，尚期同道指正。

本书初稿完成后，承蒙貴州教育学院李长明教授审阅并提出宝貴建议，特此表示感谢。

庞之垣

1987.7.于貴州师大.

目　录

一、充分利用已知信息

凡解题无不是从已知到未知的过程。即利用已知的条件，求出未知的东西。有时前提已知，结论未知（如求解题）；有时前提、结论都已知，而它们之间的桥梁却未知（如证明题）；有时虽给出了一个或几个结论，其真伪却需要判断（如选择题、是非题）；也有时结论已知，前提却未知，即需要知道在什么前提下结论成立。能否充分利用已知信息常常是能否顺利、快速解题的首要环节。然而已知信息并不总象已知条件那样明确地写在题目中，它常常隐藏在背后，需要我们去辨认、去挖掘。透过表面的已知条件，深入发掘出隐藏的信息，不仅会给解题提供坚实的基础，还常常可以得到更多的结果。

1.1 选择题中最重要的信息是什么

选择题要求知识全面、灵活，解题准确、快速，是考查学生是否具有坚实基础和分析问题能力的一种好题型。美国中学数学竞赛全部采用选择题，每次30题，每题平均只有3分钟。从开办至今30余年，现在已发展成国际性的比赛。但不少人全然不顾选择题的特点，把选择题当成综合题做，以致总感到时间不够用。选择题的特点究竟是什么呢？初看起来似乎只是提供了几个可供挑选的答案，怎么选无从知道。于是只好从已知条件算出来，再与提供的答案对照。这样做既费事，又费时。实际上在选择题的题头，一般都特别声明所提供的答案中**有且只有一个是正确的**。这是一个重要的信息。充分利用这一信息，解题方法就能更加灵活、多样，**解题速度可成倍加快**。

从这个信息可作以下断言：

(1) 如果能断定某一结论正确，则可以不管其它结论（因只有一个正确）；

(2) 如果肯定某一结论比较困难，但除一个之外，比较容易否定其余结论，则剩下这个必定正确（因有一个正确）；

(3) 如果从结论(A)可推出结论(B)，则结论(A)一定不正确（因只有一个正确）。

例1（1982年全国数学联赛试题） 如果凸n边形F ($n\geqslant 4$)的所有对角线都相等，则

(A) $F\in\{$四边形$\}$

(B) $F\in\{$五边形$\}$

(C) $F\in\{$四边形$\}\cup\{$五边形$\}$

(D) $F\in\{$边相等的多角形$\}\cup\{$内角相等的多边形$\}$

分析 显然，如果(A)或(B)正确，则(C)也正确。由断言(3)知(A)和(B)都不正确。再由等腰梯形二对角线相等，而其边和内角并不相等知(D)也不正确。从而(C)必正确(断言(2))。

这里，由于判断结论正确比否定它困难一些，我们采取了迴避的办法。但如果在答案中再加上一个：(E)上述结论都不对。则再也迴避不开了。必须对(C)给予肯定或否定。

要否定它，只须举出一个例子，它是边数多于5的凸多边形，而所有的对角线都相等；要肯定它，实际等于要证明当$n\geqslant 6$时，凸n边形不可能所有对角线都相等。初看起来，前者要简单得多，但要举出这种例子并不容易。后者尽管对应着无穷多个n，貌似复杂，但仔细分析，只须证明$n=6$一种情形。因为如果有一凸n边形($n>6$)的所有对角线都相等，

则总可以联结一条对角线，割出一个凸六边形，它的对角线就是原n边形对角线的一部分，仍然相等。故若凸六边形不行，则多于六边的凸多边形也不行。现设A、B、C、D、E、F是一对角线全等的凸六边形依次排列的六个顶点。因为D、E与A、B不相邻，故AD、AE、BD、BE都是对角线，从而

$$AD = BD = AE = BE$$

这样一来，D、E只能在AB的垂直平分线上，且与A的距离相等。再加之凸的假设，D、E只能在AB的一侧，因此点E必与点D重合，矛盾。

例2（**1971年美国数学竞赛试题**） 令$*$表示在由一切非零实数构成的集合S中引进的运算符号：对于S中任何两数a和b，$a*b = 2ab$。那么下列叙述中有一条是错的，它是

(A) 在S上，$*$是可交换的。

(B) 在S上，$*$是可结合的。

(C) 在S中，$\frac{1}{2}$对于$*$是一个恒等元素。

(D) 对于$*$，S的每一个元素有一个倒数。

(E) 对于S中的元素a，它的倒数是$1/2a$。

分析 后面三个结论都与恒等元有关，但(D)无须考虑。因若(D)错，(E)必错。若(E)对，$*$的恒等元就是1，与结论(C)相矛盾。因而(C)、(E)二者必有一错。经简单验证知(C)对，故(E)必错。这样只须验证一个结论(C)，比从头至尾验证自然要快些。

例3（**1976年美国数学竞赛试题**） 一个多项式$P(x)$，当它除以$x-1$时有余数3，除以$x-3$时有余数5，当除以$(x-1)(x-3)$时余式应是

(A) $x-2$, (B) $x+2$, (C) 2, (D) 8, (E) 15。

分析 由于除式是二次式，余式应是一次式。令其为$r(x)=ax+b$。注意$r(1)=3$；$r(3)=5$，解一个简单的二元一次联立方程组，便可定出系数a、b。

但作为选择题，无须这样做。只要注意答案中满足$r(1)=3$，$r(3)=5$的只有(B)便知正确的结论是(B)。

例4(1985年全国高考试题) 用1、2、3、4、5五个数可以组成比20000大且百位不是数字3的没有重复数字的五位数共有：

(A) 96个　　(B) 78个

(C) 72个　　(D) 64个

分析 只要首位不是1，组成的五位数一定比20000大。这种数共有 $4P_4^4=96$个。百位取为3后，首位只剩下2、4、5三种选择，其余三位可随意排列。故大于20000而百位数字又是3者，共有 $3P_3^3=18$个。结论应是$96-18=78$，(B)对。

从当年考试结果来看，不少省份的学生解答此题较差，四种答案分布相差不多，有明显乱猜的痕迹。究其原因，可能是两个条件凑在一起就搞不清楚了。这里再提供一个特殊办法，它利用了选择题的特点。

由于用1、2、3、4、5可以组成比20000大的五位数共$4P_4^4$个，百位数字是3的五位数共有P_4^4个，故该题的结果应满足

$$96=4P_4^4>x>4P_4^4-P_4^4=3P_4^4=72$$

只有(B)对。

1.2 从已知条件导出的结论

从已知条件出发，按逻辑推理得到所需结果的方法，通

常称为综合法。但已知条件的内含常常比它的表述要丰富得多，深刻得多。因此，在采用综合法的时候，我们应当首先挖掘已知条件究竟告诉了哪些信息。或者说，由它能够得到一些什么结论。这种思考，对解题大有裨益。

例1（1959年国际数学竞赛试题） 试作一直角三角形，其斜边c给定，且使c边上的中线为二直角边的几何中项。

分析 已知条件为：(1)直角三角形ABC的斜边长c，(2)斜边上的中线是直角边长a、b的几何中项。目标是要作出这样的直角三角形ABC来。

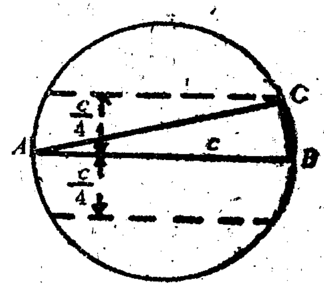

图1.1

先来看看上述两个已知条件还能给我们提供一些什么样的信息。当然，应当先取一段长度为c的线段作为AB。(1)告诉我们点C应在以AB为直径的圆周上，问题已向前迈进了一大步。现在应当考虑斜边上的中线有多长，根据直角三角形的性质知其应为斜边的一半，即$c/2$，于是(2)告诉我们

$$ab = \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

现在还是无法作图。再进一步想想，已知一直角三角形两直角边长的乘积又能告诉我们什么呢？对了，它是面积的两倍。由此可推知该直角三角形斜边上的高

$$h = \frac{ab}{c} = \frac{c}{4}$$

从而只要作两条与AB相距$c/4$的平行线，它们与圆周的交点都可作为C点（见图1.1）。

例2（1977年莫斯科大学数学竞赛试题） 设$p_1(x)$，…，$p_r(x)$分别是n_1，…，n_r次多项式。证明：若$n_1+\cdots+n_r<r(r-1)/2$，则多项式$p_1(x)$，…，$p_r(x)$线性相关。

分析 我们知道，所谓$p_1(x)$，…，$p_r(x)$线性相关是指存在一组不全为0的常数c_1，…，c_r使

$$c_1p_1(x)+\cdots+c_rp_r(x)\equiv 0$$

如果$p_1(x)$，…，$p_r(x)$中有一个恒为0，结论是显然的。故不妨假设$p_i(x)\not\equiv 0$，$i=1$，…，r。

已知条件可写作两条：

(1) $p_i(x)$是n_i次多项式，$i=1$，…，r；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{r} n_i<\dfrac{r(r-1)}{2}$。

前者告诉我们n_i是非负整数。后者则表明这r个非负整数的和小于$r(r-1)/2$。这一步是比较容易的，若到此为止，就完全看不到证明的影子。要深入下去，先必须弄清楚这个有点奇怪的数$r(r-1)/2$。从不等式左端是非负整数和的形式，不难想到

$$\frac{r(r-1)}{2}=1+2+\cdots+(r-1)$$

而最小的r个非负整数不就是0、1、…、$(r-1)$么！既然n_1，…，n_r连取最小的r个不同的非负整数都不行，那它们之中至少有两个是相等的。

这样，在已知条件中就隐藏着一条重要信息：多项式$p_1(x)$，…，$p_r(x)$中至少有两个阶数相等。

今设$n_i=n_j$ $(i\neq j)$。因为这r个多项式交换位置、颠倒次序显然对问题没有影响，为简单起见不妨设$n_1=n_2$，即

$$p_1(x)=ax^{n_1}+\text{低阶项},\ (a\neq 0)$$

$$p_2(x)=bx^{n_1}+\text{低阶项},\ (b\neq 0)$$

由于有低阶项的缘故，这离问题的解决还有相当距离。但能利用的只有这一点，只能由此开步。同阶多项式一大特点，就是将其作适当的线性组合后可以变成较低阶的多项式。故若令

$$\tilde{p}_1(x)=bp_1(x)-ap_2(x)$$

则$\tilde{p}_1(x)$至多为n_1-1阶。同时不难看到$p_1(x)$，…，$p_r(x)$线性相关当且仅当$\tilde{p}_1(x)$，$p_2(x)$，…，$p_r(x)$线性相关。这是决定性的一步。尽管并未成功，但已看到沿着这个方向走下去必可达到目的地。因为对$\tilde{p}_1(x)$，$p_2(x)$，…，$p_r(x)$，原来的条件仍满足，可阶数之和已至少减小1。从而至多经过$r(r-1)/2$步，便可使阶数和变为0，即都是零次多项式。它们显然是线性相关的。

1.3 结论本身也是已知信息

结论虽是尚待证明的命题，但既已明确提出，就是一个很重要的信息。它既给出了目标，也时常暗示着方向。马克思曾说过："对人类生活的形式的思索，从而对它的科学分析，总是采取和实际发展相反的道路。这种思索是从事后开始的，就是说，是从发展过程完成的结果开始的"（《马克思恩格斯全集》第23卷92页）。证明一个问题也可以从结论开始，对结论进行思索、分解和深入的分析，就容易建立起它同已知条件之间的桥梁。

例1（1962年上海市数学竞赛试题） 证明四个连续自然

数的乘积与1之和是一个完全平方数。

分析 四个连续自然数总可以写成$n-1$，n，$n+1$，$n+2$。题目要求证明$(n-1)n(n+1)(n+2)+1$是一个完全平方数。如果要用分解因式的办法把上式化为完全平方，对于不经常练习分解因式的读者来说，将是比较困难的，需要一定的技巧。利用它是完全平方数这一结论，并注意最高次项n^4和零次项的系数都是1，可令

$$(n-1)n(n+1)(n+2)+1=(n^2+an\pm1)^2$$

其中a是一待定系数。两边展开，比较系数，便知右端常数"1"前取负号，且$a=1$。

例2(1894年匈牙利数学竞赛试题) 给定一个圆和圆内的点P和Q。求作内接于这个圆的直角三角形，使它的一个直角边通过点P，另一个直角边通过点Q。点P和Q在什么位置时本题无解？

分析 本题关键在于确定给定圆周上的直角顶点A。如果所要求的直角三角形能作出，则$\triangle APQ$也是一个直角三角形，A就应当在以PQ为直径的圆周上。故以PQ为直径作圆，它与给定圆周的交点就是所求的直角顶点。若两圆不交，则问题无解。具体地说，若设给定圆半径为R，其圆心到线段PQ中点的距离为d，则当$\frac{1}{2}|\overline{PQ}|<R-d$时无解。

例3(1895年匈牙利数学竞赛试题) 给定一个直角三角形ABC。在这个三角形内求一点N，使$\angle NBC$，$\angle NCA$，$\angle NAB$相等。

分析 不妨设直角三角形ABC中$\angle C$为直角。假定所求的点N已经找到。由于$\angle NBC=\angle NCA$，故$\angle BNC$为直角，从而点N必在以BC为直径的圆周上(图1.2)。延长AN与圆周

交于点M，连MC则

$$\angle CMN=\angle NBC=\angle NAB$$

推知$MC\parallel AB$。于是过点C作AB的平行线与以BC为直径的圆交于M，则连线AM与圆周的交点便是所求的点N（容易证明N必在$\triangle ABC$内）。

以上两例都归结为寻求一点。从结论出发，分析出所求点必是两条曲线的交点，从而较为容易地将问题解决。从解题方法上属于波利亚提出的双轨迹模式。

例4（**1964年国际数学竞赛试题**）有17个科学家，其中每一个人和其他所有的人通信。他们在通信中只讨论三个题目，而且每两个科学家之间只讨论一个题目。求证：至少有三个科学家相互之间在讨论同一个题目。

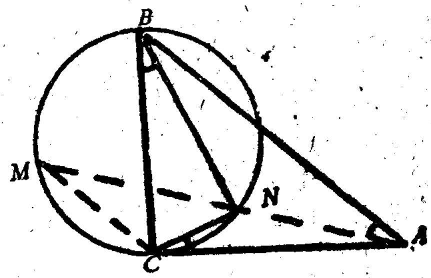

图1.2

分析 17个人之间相互通信，情况是多种多样的。没有一个正确的思维方法很容易被搅得晕头转向。我们建议下述思路，从结论开始。

如能推知有三人只能讨论一个题目，则问题解决。如果共有两个题目讨论，那么为了保证有三人只能讨论一个题目，至少需要几个人呢？若共有五人，对每个人来说，其余四人可两两与他讨论一个题目，而与他讨论同一题目的两人之间则讨论另一题，这样便没有三人在讨论同一题目。为清楚起见，可画一张图（见图1.3），以五个点表示五个人，他们之

间讨论的题目分别用实线、虚线表示。图中所设计的方案就没有一个三角形三边同是实线或同是虚线，即没有三个人讨论同一个题目。但若有六个人，情况便不一样。任取一人，在其余五人中至少有三个人与他讨论同一个题目。如果这三人中还有两人相互间也在讨论这一题目，那么已有三人在讨论这一题了。如果这三人中任何两个都不讨论这一题目，那他们三人只能讨论另外一题。同理，若共有三个题目讨论，为保证有三人只能讨论一题至少要17人。这样，不仅解答了问题，还知道17人是不能再减少的。至于具体证明，就留给读者去完成了。

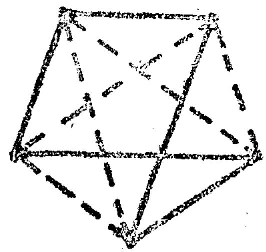

图1.3

1.4 已知信息的综合观察与利用

"哲学的方法既是分析的又是综合的"(黑格尔：《小逻辑》424页)。把已知的各种信息结合起来，进行综合观察、综合分析，是更基本的方法。即既要考虑已知条件告诉了什么，又要考虑为得到所求结论需要什么。反复分析、反复思索、反复对比，就容易沟通联结它们的渠道。

例1（1918年匈牙利数学竞赛试题） 假设对任何实数x，有

$$ax^2+2bx+c\geqslant 0,\quad px^2+2qx+r\geqslant 0$$

其中a、b、c；p、q、r都是实数。证明：对任何实数x，

$$apx^2+2bqx+cr\geqslant 0$$

分析 前提和结论都是一个二次三项式非负。自然应首

先思索非负可以告诉我们什么，又在什么条件下可以保证其非负。令

$$y=ax^2+2bx+c$$

非负意味着这是一条开口向上的抛物线且与x轴不能有两个不同的交点，或者是一条与x轴相平行且不在x轴下方的直线。即应有　$a\geqslant0$，$b^2-ac\leqslant0$，$c\geqslant0$。

反过来也容易证明这三个条件足以保证$y\geqslant0$。于是，由题设知

$$a,\ c,\ p,\ r\geqslant0$$

$$b^2-ac\leqslant0,\quad q^2-pr\leqslant0$$

故　$ap\geqslant0$，$cr\geqslant0$

$$(bq)^2-apcr=(b^2-ac)q^2+ac(q^2-pr)\leqslant0$$

从而可推得$apx^2+2bqx+cr\geqslant0$。

例2（1970年国际数学竞赛试题）　设$\{a_n\}$是满足

$$1=a_0\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\leqslant\cdots \tag{1.1}$$

的实数序列。而序列$\{b_n\}$由下式定义

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}\quad(n=1,2,\cdots) \tag{1.2}$$

求证：a）对于所有的$n=1,2,3\cdots$，$0\leqslant b_n<2$成立。

b）对于任意的$c\in[0,2)$，存在具有性质(1.1)的序列$\{a_n\}$，使得由它构成的序列(1.2)中有无穷多个下标n满足

$$b_n>c \tag{1.3}$$

分析　由题设只能知道 $0\leqslant\left(1-\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\frac{1}{\sqrt{a_k}}\leqslant1$。

n项求和，显然$b_n\geqslant0$，却无法保证$b_n<2$。故必须将b_n变形。为使求和后仍便于估计，自然想到利用