空间解析几何

杨文茂　李全英　编著

武汉大学出版社

武汉大学本科生系列教材

空间解析几何

杨文茂　李全英　编著

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何／杨文茂，李全英编著．——武汉：武汉大学出版社，1997.1

ISBN 7-307-02342-3

Ⅰ．空…

Ⅱ．①杨…　②李…

Ⅲ．①立体几何：解析几何一教材　②解析几何：立体几何一教材

③空间几何：解析几何一教材　④解析几何：空间几何一教材

Ⅳ．O182.2

武汉大学出版社出版发行

（430072　武昌　珞珈山）

湖北省崇阳县印刷厂印刷

（437500　湖北省崇阳县天城镇解放路68号）

1997年1月第1版　　1997年1月第1次印刷

开本：850×1168　1/32　印张：9.625

字数：247千字　印数：1—2000

ISBN 7-307-02342-3/O・173　定价：9.60元

前　言

空间解析几何是数学系各专业学生的一门基础课。

空间解析几何是用代数方法研究空间几何图形的学科。它分析解决问题的基本思想方法，如同平面解析几何一样，是正确地处理形与数这对矛盾的对立统一关系。通过对于数的计算，再来认识图形的性质及图形间的关系。

空间的图形主要有曲线与曲面。传统的空间解析几何通常主要讨论在笛卡儿坐标系中用动点坐标的一次方程和二次方程或方程组所表示的图形，即空间的平面、直线与二次曲面等。

本书对空间解析几何作简单介绍。由于矢量理论对于研究几何提供了一个十分有利的工具，在某些科技领域中也经常应用这一工具，借助矢量的概念可使几何更便于应用到某些自然科学与技术领域中去。因此，在第 1 章介绍了空间坐标系后，紧接着在第 2 章介绍了矢量的概念及其代数运算。第 3 章讨论空间直角坐标系中用一次方程表示的图形（直线与平面）。第 4、5 章主要讨论空间直角坐标系中用二次方程表示的曲面（二次曲面）。第 6 章简单介绍正交变换与仿射变换。第 7 章简单介绍射影几何。

作为一学期每周 4 学时（3 小时讲授，1 小时习题课）用的教材，本书配置有适量的习题。第 7 章射影几何可酌情讲授或删略。

此书原稿曾在武汉大学数学系使用过多次。鉴于水平有限，书中难免出错，欢迎使用者提出宝贵意见。

编者于珞珈山

1997.1

目　录

第1章 空间坐标系

本章将介绍空间坐标系，它是形与数结合的基础. 有了坐标系，先使空间的点与3个有顺序的实数组对应，从而使空间的曲面或曲线与它们的方程或方程组对应. 我们将要介绍的坐标系是平面上直角坐标系与极坐标系的自然推广，即空间直角坐标系、柱面坐标系与球面坐标系.

§1.1 空间直角坐标系

1.1.1 空间直角坐标系

为了给空间几何图形与数的转化创造条件，现在来引进空间中直角坐标系的概念. 这种坐标系是平面直角坐标系的推广，是常用的一种空间坐标系.

我们知道，在平面直角坐标系中，一个点的位置可以用两个数(它的坐标)来确定. 而在空间的一个点却要用3个数才能确定它的位置. 例如：气象台放出一个探测气球，要想描述某时刻气球的位置，如果说明它位于气象台以北5公里、以东3公里、离地20公里，这样就定下了气球在空间中的位置，人们总结了各种确定空间目标的方法，直角坐标系是其中的一种.

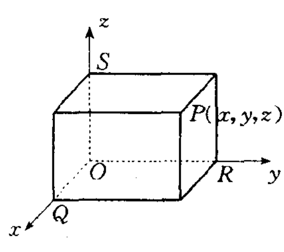

图1—1

在空间中取定一个点 O 和过点 O 的3条两两互相垂直直线 Ox, Oy, Oz，并在各直线上取定正向，再取定长度单位(图1—1). 这样就确定

了一个**直角坐标系**$Oxyz$. 点O叫做**坐标原点**，3条直线Ox,Oy,Oz叫做**坐标轴**，依次叫做Ox轴或x**轴**、Oy轴或y**轴**和Oz**轴**或z**轴**，通过每两个坐标轴的平面叫做**坐标平面**，共有3个坐标平面，分别叫做Oyz**平面**、Ozx**平面**、Oxy**平面**.

直角坐标系分右手系和左手系两种. 如果把右手的姆指和食指分别指着x轴和y轴的方向时，中指就可以指着z轴的方向，这样的坐标系$Oxyz$就叫做**右旋坐标系**或**右手坐标系**. 如果左手的这3个手指依序指着x轴、y轴和z轴，这样的坐标系叫做**左手坐标系**或**左旋坐标系**(图1—2). 今后如果没有特别声明，我们规定都用右手系.

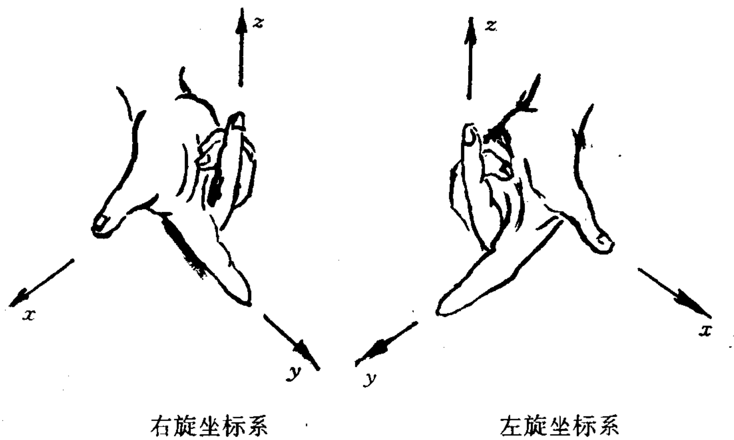

图1—2

设P为空间中任意一点. 过点P作3个轴的垂直平面，分别与Ox,Oy,Oz轴相交于点Q,R,S（图1—1)，它们在各轴上的坐标依次为x,y,z，于是对于点P就确定了3个有顺序的实数x,y,z,叫做点P的**坐标**，记为$P(x,y,z)$或(x,y,z). x,y,z分别叫做点P的**横坐标**、**纵坐标**、**竖坐标**. 反之，任意给定了3个有顺序的实数x,y,z，我们在x轴、y轴、z轴上分别作出以x,y,z为坐标的点Q,R,S，过Q,R,S分别作出和Ox,Oy,Oz垂直的平面，

设它们相交于 P，显然 P 的坐标就是(x,y,z).

因此，在空间中取定直角坐标系后，便建立了空间中所有点和由 3 个有顺序的实数构成的数组全体之间的一一对应. 也就是说，在给定的直角坐标系中，空间中任意一点唯一地决定一个由 3 个有顺序的实数构成的数组；反之，任意一个这样的数组唯一地决定空间的一个点.

在 Oxy 平面上点的竖坐标是 0，这时点的坐标可以表示为$(x,y,0)$，在 Oyz 平面上，点的坐标是$(0,y,z)$，在 Ozx 平面上，点的坐标是$(x,0,z)$. 在 x 轴、y 轴、z 轴上，点的坐标分别是$(x,0,0)$，$(0,y,0)$，$(0,0,z)$. 原点的坐标显然为$(0,0,0)$.

3 个坐标平面将空间分为 8 个部分，叫做**卦限**，它们按图1—3所示依次叫做卦限Ⅰ、卦限Ⅱ、……卦限Ⅷ. 要注意区别各卦限中点的坐标的符号. 例如：点$(3,2,5)$在第Ⅰ卦限，点$(-3,2,3)$在第Ⅱ卦限，点$(-3,-2,-1)$及点$(-2,5,-7)$分别在第Ⅶ及第Ⅵ卦限.

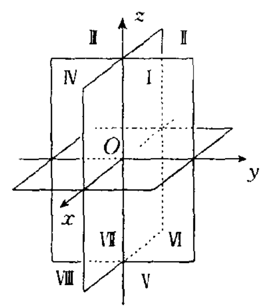

图1—3

如果从点 P 向 Oxy 平面引垂线得垂足 Q(图 1—4)，那么点 P 的竖坐标 z 的绝对值就是 QP 的长度，而 z 为正或为负就依 QP 和 z 轴同向或反向而定，这也就是说，点 P 的竖坐标 z 可以用线段 QP 的方向和长度来表示. 同样，横坐标 x 和纵坐标 y 可以分别用线段 OR 和 RQ 的方向和长度来表示. 由此可见，点 P 的坐标可以用折线 $ORQP$ 来表示. 这条折线叫做点 P 的**坐标折线**(图 1—4). 要从坐标(x,y,z)作出点 P 来，就要从原点 O 开始画出坐标折线 $ORQP$；反

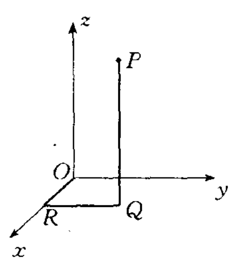

图1—4

之，要从点 P 确定坐标就要从点 P 开始画出坐标折线 $PQRO$.

1.1.2 两个简单问题

和平面解析几何一样，可用坐标来计算空间中两点之间的距离和求线段的定比分点.

1. 两点间的距离

设点 P_1 和 P_2 的坐标分别是 (x_1,y_1,z_1) 和 (x_2,y_2,z_2)，求点 P_1 和 P_2 之间的距离.

分别自 P_1 和 P_2 向 Oxy 平面引垂线，垂足为 M_1 和 M_2. 过 P_1 作平面平行于 Oxy，设这平面与 M_2P_2 的交点为 N（图 1—5）.

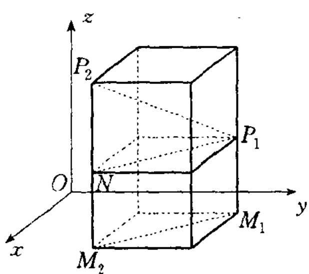

图1—5

因 $\angle P_1NP_2$ 为直角，由勾股定理得

$$(P_1P_2)^2=(P_1N)^2+(NP_2)^2=(M_1M_2)^2+(NP_2)^2,$$

但 $NP_2=M_2P_2-M_2N=M_2P_2-M_1P_1=z_2-z_1$. 又由于 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 实际上是点 M_1 和 M_2 在 Oxy 平面上的直角坐标，所以据平面解析几何两点间的距离公式有

$$(M_1M_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

最后得 $(P_1P_2)^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$，即

$$P_1P_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \tag{1}$$

这就是空间中两点间的**距离公式**. 由此可得任意一点 $P(x,y,z)$ 和原点的距离为 $OP=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 1 求点 $P_1(2,0,-1)$ 与点 $P_2(4,3,1)$ 之间的距离.

解
$$P_1P_2=\sqrt{(4-2)^2+(3-0)^2+[1-(-1)]^2}=\sqrt{4+9+4}=\sqrt{17}.$$

2. 线段的定比分点

设有两点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$. 点 $P(x,y,z)$ 为在

P_1 和 P_2 两点的连接线上按比值 λ（正数或负数，但 $\lambda\neq-1$）分割（内分或外分）线段 P_1P_2 的点，即

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda\begin{cases}>0 & （点 P 在线段 P_1P_2 内），\\ <0 & （点 P 在线段 P_1P_2 外），\end{cases} \tag{2}$$

那么和平面解析几何相仿，有**定比分点公式**：

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

若 $\lambda=1$，得线段 P_1P_2 的中点坐标计算公式：

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2),\ y=\frac{1}{2}(y_1+y_2),\ z=\frac{1}{2}(z_1+z_2).$$

公式(3)证明如下. 分别自 P_1，P_2，P 向 Oxy 平面引垂线，垂足依次为 M_1，M_2，M（图 1—6）. 由图易知

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}.$$

这就是说，点 M 也是按比值 λ 分割线段 M_1M_2 的. 显然点 M_1，M_2 和 M 在 Oxy 平面上的直角坐标是(x_1,y_1)，(x_2,y_2)和(x,y)，于是根据平面解析几何的定比分点的公式就得出了(3)式中前两个式子. 若分别自点 P_1，P_2，P 向 Oyz 平面引垂线，同样地可以得出(3)中后两个式子. 这样导出了(3)式中所有 3 个式子.

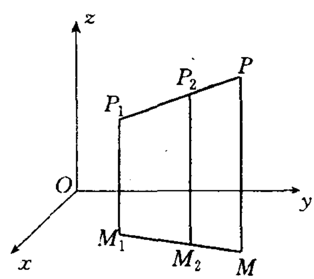

图1—6

当 $\lambda=-1$ 时，(3)没有意义，但我们容易得知，当 λ 渐近 -1 时，点 P 就趋向无穷远，这由(3)或定义 λ 的(2)式都可推得.

例 2 已知 $P_1(2,-3,1)$，$P_2(3,4,-5)$，在 P_1P_2 线上求一点 P，使$\dfrac{P_1P}{PP_2}=\dfrac{3}{2}$.

解 这里定比 $\lambda=3/2$，由公式(3)，P 点公式为

$$x=\left(2+\frac{3}{2}\cdot 3\right)\Big/\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{13}{5},$$

$$y=\left(-3+\frac{3}{2}\cdot 4\right)\Big/\left(1+\frac{3}{2}\right)=\frac{6}{5},$$

$$z=\left[1+\frac{3}{3}(-5)\right]\Big/\left(1+\frac{3}{2}\right)=-\frac{13}{5}.$$

故所求点 P 为 $\left(\frac{13}{5},\frac{6}{5},-\frac{13}{5}\right)$.

例 3 对线段 PQ，已知 $P(2,-3,1)$，它的中点为 $(6,1,-1)$，求 Q.

解 设 $Q(x,y,z)$，则

$$\frac{2+x}{2}=6,\ \frac{-3+y}{2}=1,\ \frac{1+z}{2}=-1.$$

所以 $x=10,y=5,z=-3$，即 $Q(10,5,-3)$.

练 习 1—1

1. 在给定的坐标系中，描出下列各点：$A(3,2,5)$，$B(-5,3,1)$，$C(1,-2,-3)$，$D(-1,-5,-3)$，$E(0,2,-3)$，$F(-2,-5,0)$.

2. 下列各点相对于坐标系的位置有何特殊性：

$$A(3,0,0),\ B(0,4,0),\ C(0,-7,3),\ D(3,0,2).$$

3. 从点 $A(1,-2,3)$ 和 $B(a,b,c)$ 分别向各坐标平面和各坐标轴引垂线，求各垂足的坐标.

4. 已知点 $A(2,-3,-1)$ 和 $B(a,b,c)$，求它们分别关于下列平面、直线或点为对称的点的坐标：

(1) Oxy 平面； (2) Oyz 平面； (3) z 轴； (4) 原点.

5. 选取边长为 $2a$ 的立方体的中心作为坐标原点，且它的棱与坐标轴平行，试写出立方体各顶点的坐标.

6. 指出适合下列条件的点的位置：(1) 横坐标为零的点；(2) 竖坐标为零的点；(3) 横坐标和纵坐标同时为零的点.

7. 求点 $A(4,-3,2)$ 到坐标原点和到各坐标轴的距离.

8. 试证明：以 $A(4,3,1)$，$B(7,1,2)$ 和 $C(5,2,3)$ 为顶点的三角形是一个等腰三角形.

9. 在 y 轴上找一点，使它与点 $A(3,1,0)$ 和 $B(-2,4,1)$ 等距.

10. 证明：顶点在 $A(1,-2,1)$，$B(3,-3,-1)$，$C(4,0,3)$ 的三角形是直

角三角形.

11. 把点 $A(1,1,1)$ 和 $B(1,2,0)$ 间的线段分成 $2:1$，求分点的坐标.

12. 已知三角形顶点为 $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$，求它的重心的坐标.

13. 已知三角形顶点 $A(3,2,-5)$, $B(1,-4,3)$, $C(-3,0,1)$，求它的各边上的中点和从点 A 所引中线的长.

14. 已知平行四边形的两个顶点 $A(2,-3,-5)$ 和 $B(-1,3,2)$，以及对角线的交点 $E(4,-1,7)$，求它的另外两个顶点.

15. 已知平行四边形的 3 个顶点 $A(3,-4,7)$, $B(-5,3,-2)$ 和 $C(1,2,-3)$，求与顶点 B 相对的第 4 个顶点 D.

16. 点 $A(x_1,y_1,z_1)$ 和 $B(x_2,y_2,z_2)$ 处分别放有质量为 m_1 与 m_2 的物体，求这重物组的重心 C. 按重心的定义，C 在 AB 之间，且 $m_1\cdot AC=m_2\cdot BC$.

17. 设在点 $A_1(x_1,y_1,z_1)$, $A_2(x_2,y_2,z_2)$, $A_3(x_3,y_3,z_3)$ 和 $A_4(x_4,y_4,z_4)$ 分别置有重量为 m_1,m_2,m_3 和 m_4 的物体，求重物组的重心.

§1.2 曲面和曲线的方程

和在平面解析几何中一样，在建立了坐标系以后，我们就可以讨论空间的曲面和曲线与方程之间的对应关系. 空间的曲面和曲线可以用它上面的坐标 x,y,z 所满足的方程或方程组来表示；反之，以 x,y,z 为变量的方程或方程组，其每一组解确定空间中一个点，这方程或方程组就确定了由这些点所组成的几何图形. 通过下面几个简单例子，我们可以看到，空间中一个曲面一般说来是和含 x,y,z 3 个变量的一个方程对应的；而一条曲线是和两个这样方程构成的方程组对应的. 解析几何的任务主要有两个方面：

1) 给定了曲面或曲线的轨迹条件(几何条件)，求它的方程或方程组；

2) 给定了坐标 x,y,z 的方程或方程组，研究它所代表的曲面或曲线的图形及其性质.