

张湘伟
著

结 构 分 析 中 的
概 率 方 法

科学出版社

结构分析中的概率方法

张湘伟 著

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书主要叙述:主要的概率分布和随机过程理论;随机有限元基本理论,随机有限元谱分析方法和概率结构的傅里叶分析方法;随机过程数值模拟方法及其工程应用实例。

本书适于结构专业及数学相关专业的大学师生及工程技术人员阅读、参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构分析中的概率方法/张湘伟著. -北京:科学出版社,2000

ISBN 7-03-007631-1

I. 结… II. 张… III. 概率论-应用-结构分析 IV. 0342

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 23986 号

DL66/29

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717

新蕾印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

2000年1月第一版 开本:850×1168 1/32

2000年1月第一次印刷 印张:8

印数:1—2 000 字数:210 000

定价:20.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

序 言

近年来,我一直为博士生和硕士生讲授结构分析中的概率方法.来听讲的主要是力学专业与机械专业的研究生,也有青年教师和力学专业的高年级学生.本书主要是在课程讲义的基础上经反复修改而成.

在讲授内容的构成上,逐年增加了一些新内容,其中包括作者所承担的国家自然科学基金资助项目、国家教委优秀年轻教师基金重点跟踪项目以及部分与企业合作项目所取得的研究成果,也包含作者所指导的研究生在学位论文工作中的部分计算方法与结果.

作者曾经在东京大学生产技术研究所、东京大学尖端科学技术研究中心学习和工作过较长时间,主要从事随机过程、结构动力学等方面的研究工作.其间得到了东京大学中桐滋教授的指导与支持,并曾经与东京大学久田俊明教授、辻恒平博士等组织了一个研究小组,比较系统地研究了随机过程理论.值得一提的是,研究小组采取轮流主讲的方式,共同研讨了 500 余例相关问题的解法,并与日本企业界的研究人员一道,举行过多次专题学术研讨会.本书中的部分章节参考了作者当时所作的研究笔记.

在撰写本书时,作者特别注意形成以下两个方面的特点:

其一,从工程应用的视点来组织与论述相关的基础理论,并尽可能举出一些与工程结构分析有关联的例子,使读者既能比较系统地掌握理论知识,又能联系工程应用作更深入的探索.

其二,在论述分析方法时,对解决问题的思路、模型构成、数式推导、细节的处理技巧等都力求叙述详细,主要的目的是希望读者对研究问题的思路与步骤有比较完整的理解.通过几年的教学实践证明,这种讲授方法与内容构成收到了好的效果.

值本书出版之际,作者谨向重庆大学张汝清教授,东京大学中桐滋教授、久田俊明教授,中国空气动力研究与发展中心张涵信教授,清华大学黄克智教授,表示衷心的敬意和感谢.作者长期得到了上述各位先生的热情支持与指导.

对直接或间接对本书的内容有所贡献的已毕业的研究生们表示感谢,他们是:陈世民副教授、徐美和博士、徐新琦副教授、冉荣高级工程师、何承红硕士、何正友博士、倪霖讲师.

书中不足之处,敬请同仁和读者指正.

张湘伟

1998年8月于汕头大学

目 录

序 言	(iii)
第一章 绪 论	(1)
第二章 概率分布	(9)
2.1 概率密度函数	(9)
2.2 随机变量的统计量	(13)
2.3 特性函数	(16)
2.4 正态分布	(20)
2.5 均匀分布	(27)
2.6 泊松分布	(32)
2.7 Γ 分布	(36)
2.8 二项式分布	(38)
2.9 威布尔分布	(42)
2.10 二维概率分布	(45)
2.11 条件概率分布	(51)
2.12 随机变量的函数的概率分布	(57)
2.13 瑞利分布	(64)
2.14 离散型随机变量概率分布的推定	(67)
第三章 随机过程的基本理论	(75)
3.1 随机过程的概念	(75)
3.2 随机过程的统计性质	(77)
3.3 平稳随机过程	(80)
3.4 各态历经过程	(86)
3.5 互相关函数	(90)
3.6 功率谱密度函数	(97)
3.7 互谱密度函数	(109)
3.8 相干函数	(115)
3.9 离散型随机过程	(125)

第四章 特殊的随机过程	(135)
4.1 泊松过程	(135)
4.2 二维泊松过程	(141)
4.3 泊松滤波过程	(144)
4.4 二维泊松滤波过程	(155)
4.5 正态过程	(165)
第五章 概率方法在工程结构分析中的应用	(170)
5.1 概率结构和随机有限元法	(170)
5.1.1 结构不确定因素的数学表示	(171)
5.1.2 随机有限元法概述	(174)
5.1.3 随机有限元法应用实例	(176)
5.2 随机有限元谱分析方法	(184)
5.2.1 运动方程式的复模态分解	(184)
5.2.2 响应位移的互相关函数	(189)
5.2.3 响应位移的互谱	(198)
5.2.4 计算实例	(200)
5.2.5 汽车振动的随机有限元谱分析	(201)
5.3 概率结构的脉冲响应函数和频率响应函数分析	(219)
5.3.1 脉冲响应函数分析	(219)
5.3.2 频率响应函数分析	(226)
5.3.3 计算实例	(231)
5.4 相关、相干分析在汽车结构分析中的应用	(237)
参考文献	(248)

第一章 绪 论

在设计新结构或者评估在用结构时,都需要对结构进行整体或者局部的力学分析.如图 1.1 所示,载荷作用于结构使结构产生响应,将响应与设定的基准比较以判定结构是否需要修改以及应该如何修改,这条线是力学分析的主流.

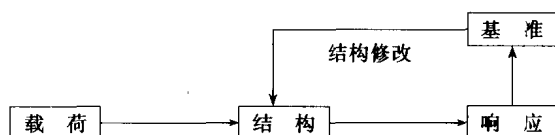


图 1.1 结构的力学分析示意图

作者曾经承担过某机械产品的力学分析和局部结构改良设计,起因是该产品某部位出现了规律性的薄板撕裂.由于该产品属于大批量生产的定型产品,所以制造商对结构修改后所需增加的材料量、加工时间及焊点个数等均提出了严格的要求.可见,进行结构的力学分析,需要综合考虑力学性能与制造成本两个要素间的协调.近年来,全球性的人类环境意识不断增强,所以,结构所造成的环境负担也是结构分析中不可忽视的因素.一个综合品质高的工程结构,取决于形态、机能、经济性与环境负担等若干因素间的最佳组合.

本书仅从力学角度论及结构分析中的概率方法.

确定作用于结构的载荷是实施力学分析的重要步骤.众所周知,如地震波、汽车振动主要振源之一的道路凹凸不平、环境噪声、突风、乱流、海浪等这一类型的载荷,不仅仅都是随时间(或者长度量纲)变动的复杂量,而且具有非再现性,很难用确定论来加以描述.

1985 年,在日本长野县发生了一次由地震引发的山体大滑

坡.事过数月,一位日本学者用数值方法模拟了该次地震,而使用的载荷则是 EL Centro 地震波,数值模拟结果与实际滑坡的形态比较吻合.

在抗震工程领域中,EL Centro 地震波是十分有名的原始强震波形记录.该次地震发生时间为 1940 年 5 月 18 日,地点在美国加利福尼亚与墨西哥毗邻的 EL Centro 镇,其最大加速度为 341.7Gal ($1\text{Gal}=1\text{cm/sec}^2$),震级 M (Magnitude) 为 7.1.

不仅在上述的算例中,迄今在高层建筑等重要设施的抗震分析中,EL Centro 地震波仍然作为地震载荷谱使用.

这就涉及到特定的地震载荷在抗震分析中的普遍适应性以及分析结果的可靠性问题.

一般而言,即令在某地域曾经发生过有限次地震,而且均有原始的观察记录,以这些记录作为设计用地震载荷进行建筑结构、产业设施及生活设施等的抗震分析,只可能保证在同样的地震载荷作用下结构与设施的安全性及可靠性,对将来可能发生的未知地震,却不能确保其安全可靠,不遭受重大损害.

1995 年 1 月 17 日发生的阪神·淡路大地震 (Hanshin-Awaji earthquake) 就是一个非常重要的例子.该次地震由于发生在城市机能高度集中、人口密集的现代都市圈内,造成了相当大的损害.

自 1923 年的关东大地震之后,日本学术界与工程界相当重视抗震技术的研究与开发,参照关东大地震的震级 ($M=7.9$),一般以抗震级 $M=8$ 的地震作为抗震设计标准.但是,阪神·淡路大地震震级 M 为 7.2,低于抗震设计水平,却带来了 6000 余名市民死亡,损失总额高达 10 兆日元以上的巨大灾害,这就迫使人们不得不重新考虑现行的抗震防灾技术及抗震设计标准,其中也包含对地震载荷的估算.

图 1.2 所示为日本抗震工学专家白木万博亲身感受到的阪神·淡路大地震的地震波形与神户海洋气象台所记录的地震波形比较.从本例可见,个人的体验与测定记录有相当大的差异,究竟哪一方的数据更接近该次地震波的正体呢?只能说都有可能

性.这也从一个侧面说明了地震波的随机性,在抗震设计中需要更广泛地对地震波的形态进行模拟.

对随机载荷进行数值模拟,不仅仅限于地震波,对其它类型的随机载荷也普遍适用.以汽车行驶道路为例,将凹凸不平的道路表面形状作为随机过程处理,并以起伏高度的功率谱来评定路面等级,已是众所公认的方法.1953年东京大学高桥安人曾经将测定到的路面起伏数据进行统计处理,得到了功率谱.这是在该领域中比较早期的成果.

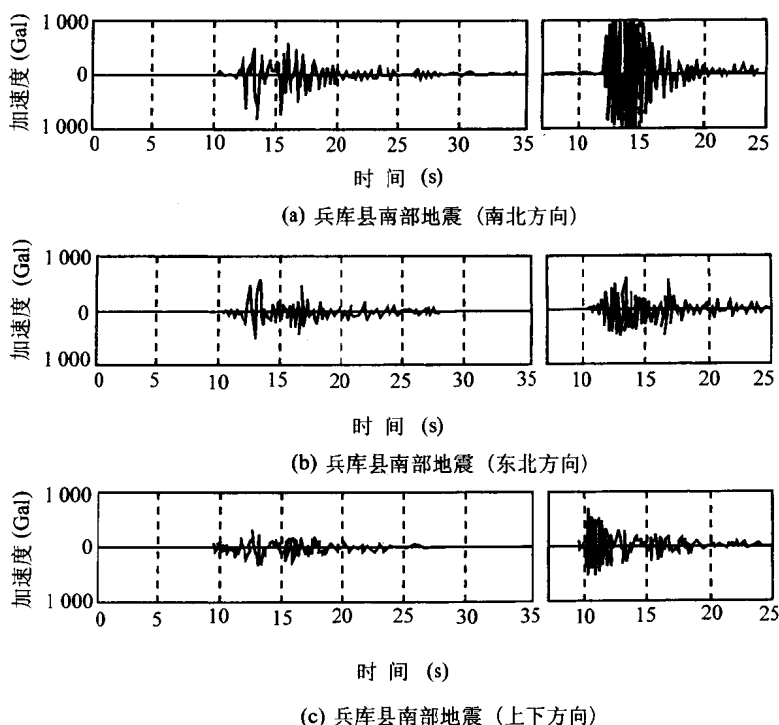


图 1.2 地震波形比较图(左图:神户海洋气象台记录;右图:白木万博个人体验)^[41]

但是,由于地理、气候、经济等诸多因素的影响,世界上各个国家各个地区的道路种类繁多,路面起伏也千姿百态,要一一加以测定是办不到的事情.而且,由于测到的数据有限以及测定结果受诸多外界因素影响,路面起伏的波形与地震波类似,同样具有随机性质.作者曾经参观过多家大型汽车制造公司的道路实验场,场地中均设置了若干种类的典型路面,而且都有相应的功率谱曲线.

另一方面,在汽车设计中所使用的道路谱却复杂得多,其中既有实际典型路面的起伏数据,也大量使用了由数值模拟得到的道路起伏数据.其目的与前述的抗震设计相似,使汽车能够适应各种道路状况,保证车辆的安全性、可靠性以及良好的乘坐舒适性等.

利用数值方法模拟道路起伏形状至少可以考虑以下两种方法:一种方法是将已知的功率谱进行傅里叶变换,从而得到一系列数值滤波系数,再与随机乱数作用而生成路面形状.这种办法,优点是功率谱标准比较好控制,但是可能出现由数值模拟生成的路面形态与实际路面形态相去甚远的情况;另一种方法是将路面起伏直接用一适当的随机过程表示,用控制随机过程中各参数的性质以及相互间的关系,来确定各类道路的功率谱和路面形状.尽管这种方法在随机过程及参数的设定上有较大的难度,但具有理论上的统一性和普遍性.

使用随机过程来描述作用于结构的载荷,应着重把握住载荷的物理特征、数值特征以及载荷识别量的变化范围等,并且尽可能利用实验或测试所得到的数据(群),从时域和频域来分析其统计特点,进而抽象出这些特点,选择或构造适当的随机过程加以表现.再使用该随机过程反复进行数值模拟实验,与已有的标准或者公认的实验数据相比较.在此过程中,反复的修正是必不可少的步骤.但是,应该充分注意的是:仅仅注意数值方面的修正,尽管可能得到与实验数据或者数量标准逼近的结果,却未必能够从物理意义上说明修正的根据与理由,甚至造成由模拟所得样本难于由感官常识认可的异常情况.所以,对随机过程模型本身的修正也是十分重要的.应该根据实际情况对修正的对象与步骤予以综合判断.

图 1.3 是作者使用一维泊松滤波(Filtered Poisson Process, 略作 FPP)过程所模拟的道路功率谱与 ISO 标准的对比图,图 1.4 所示为同一随机过程所模拟的道路表面起伏形状。

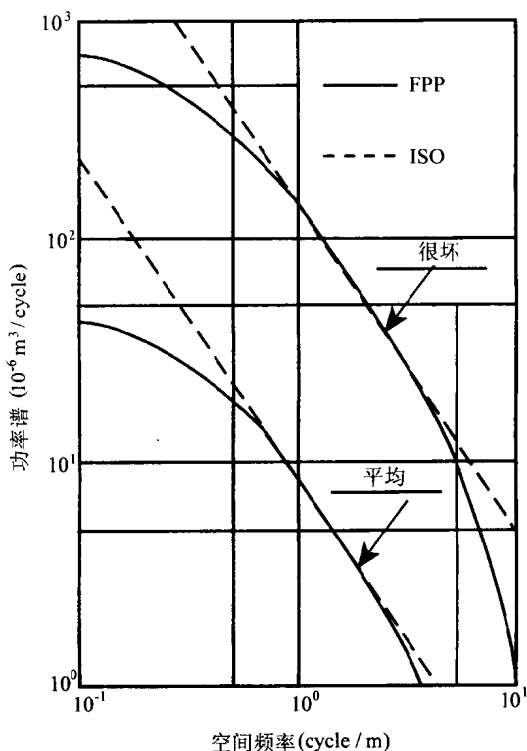


图 1.3 一维泊松滤波过程模拟的道路谱与 ISO 标准比较图

利用二维泊松滤波过程,辻恒平博士描述了金属板的孔蚀到全面成膜腐蚀现象,得到了与实验数据比较一致的计算结果.这是用随机过程来表现结构本身某些特性的一个例子.

无论是自然结构(如山体)还是工程结构都有可能含有一些带随机性的构成要素.如果这些随机要素对结构的性质影响较小,仍然不妨将结构视为确定的,对结构的力学分析可以按照确定论的方法实施.反之,当其影响不可忽视,或者需要查明随机要素的影

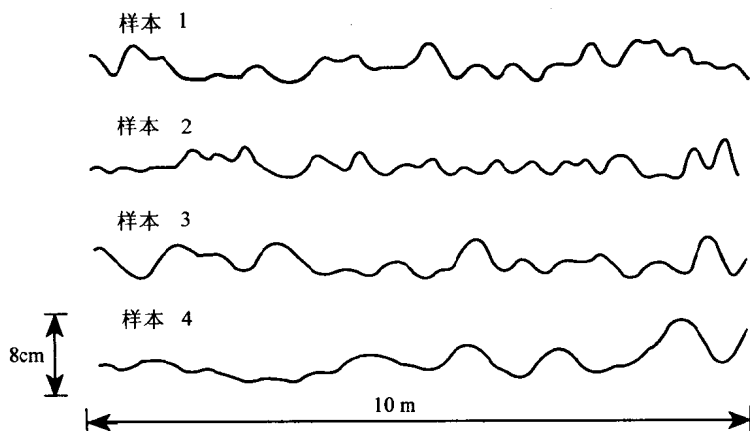


图 1.4 一维泊松滤波过程模拟的道路表面起伏形态(波高为正态分布)

响程度及范围时,就必须变换视点和方法来进行结构分析.例如经长年介质腐蚀的金属板,由于其表面形态的生成本身就带有随机性质,所以将其视为含有不确定因素的结构,从概率论的观点去描述这类结构的内在特征是顺理成章的事情.在本书中,将这一类型的结构定义为概率结构.

正确地使用数学模型描述概率结构所包含的随机性质,是分析这类结构的关键步骤.所谓概率结构,既包含结构整体具有随机性质的情况,也包含结构的部分构成要素呈现随机变动的情况,应该根据结构本身的构成特点、分析要求、实验结果及经验来分析判断.

但是,由于当前广泛使用于结构力学性能分析的数值方法多为离散型数值分析方法.对结构进行离散化处理之后,结构自身所含的随机要素也随之被离散,可以使用具有适当概率分布的随机变量予以表现.

依循这个思路,即令结构整体具有随机性质,也可以归结到将结构的某些特性参数作为随机变量处理的方法上来,对此,本书在有关章节做了比较详细的论述.

论及结构分析的概率方法,根据载荷和结构的性质,需要面对下述三种类型:

第一种类型:随机载荷作用于确定的结构;

第二种类型:确定的载荷作用于概率结构;

第三种类型:随机载荷作用于概率结构.

本书将重点处理第三种类型的问题,熟练掌握了处理这类问题的思路、步骤与技巧,对前两类问题的处理应该不会遇到太大的障碍.

上述三种类型的结构分析、结构的响应都可以使用随机过程加以描述,从数值特征去把握随机过程的性质.

研究结构响应的随机性质,时域和频域两个方面的分析都是必要的,所得的结果应该相互包含,可以相互验证.

将作用于结构的外载荷处理为时域信号,可以得到在时域中表示的结构响应.当载荷构成随机过程时,结构在时域中的响应将形成函数族,每一条响应曲线仅仅是构成函数族的一个样本函数.对大量的样本函数进行数值处理,可以得到结构响应的统计特征.

当载荷与结构满足一定的条件(如平稳性、各态历经性)时,对样本函数数量的要求可以松弛.但是,如果分析对象是重要的工程结构,仍需保持谨慎的态度,理论上的可行性与实际效果间也有偏差较大的情况.

如果将外载荷用功率谱表示,结构对作用载荷的响应表现为功率谱形式.功率谱在物理意义上有能量的含义,所以从能量强弱的角度在频域内认识载荷与响应,功率谱表示是十分重要的形式.但是,由于功率谱未包含相位信息,由功率谱出发构造时域信息时,需要进行特殊处理.

本书注意兼顾时域与频域两个方面的分析方法,即便在专题论述谱分析方法时,对可利用率于时域分析的算式也进行了相应的提示.

由于概率结构介在载荷与响应之间,无疑会增加求解结构响应的困难性.特别当结构的随机性质是一些特殊的概率分布,或者

若干个随机因素间构成复杂的相关关系时,数式表现与数值计算的难度显著增大.所以,面临这类问题时,应该切实根据工程分析的需要,来构造概率结构的数值表示方式,并精心地对计算过程进行优化处理.本书比较详细地论述了若干概率分布和随机过程的特征,只有比较熟练地掌握这些理论知识,才能针对具体问题加以应用.

针对随机载荷和概率结构的描述与分析方法,国内外学者有不少出色的工作.本书所论及的几种方法,主要是作者近年来的部分工作与尝试.随着随机过程理论的发展与新的数值分析方法的导入以及人们对自然结构与工程结构认识的深化,相关的理论与方法必将得到进一步的发展,并将继续扩展其应用领域.

第二章 概率分布

2.1 概率密度函数

设 x 是样本空间(sample space) S 中的连续随机变量,其概率密度(probability density)函数 $p_x(x)$ 应满足下述条件:

$$p_x(x) \geq 0, x \in S \quad (2.1.1)$$

$$\int_S p_x(x) dx = 1 \quad (2.1.2)$$

$$\int_{x_1}^{x_2} p_x(x) dx = P(x_1 \leq x \leq x_2), x_1 < x_2 \quad (2.1.3)$$

(2.1.3)式中, $P(x_1 \leq x \leq x_2)$ 表示 x 出现在区间 $[x_1, x_2]$ 中的概率,在 x - p 平面上,它等于直线 $x = x_1, x = x_2$ 和曲线 $p_x(x)$ 及 x 轴所围成的面积.由此可知,当 Δx 充分小时,

$$P(x \leq x \leq x + \Delta x) \simeq p_x(x) \Delta x \quad (2.1.4)$$

从而, $p_x(x)$ 可定义为

$$p_x(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq x \leq x + \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.1.5)$$

令 $p_x(x)$ 在 $x = a$ 处连续,由(2.1.3)式知

$$\int_a^a p_x(x) dx = 0 \quad (2.1.6)$$

可见,随机变量取特定值的概率为零.但是,该式并非意味着 x 完全不可能取得值 a .

由(2.1.2)和(2.1.3)式知

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p_x(x) dx = 1 \quad (2.1.7)$$

该式表示:曲线 $p_x(x)$ 与 x 轴所围成的面积为 1.

对离散型随机变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 令 x_i 出现的概率为

$P(x_i)$, 则其概率密度函数可表示为

$$p_x(x) = \sum_{i=1}^n P(x_i) \delta(x - x_i) \quad (2.1.8)$$

其中, $\delta(x)$ 称作 δ 函数(Dirac delta function), 它具有以下性质:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (2.1.9)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = 1 \quad (2.1.10)$$

式中的 ϵ 为任意小的正数.

设 $\phi(x)$ 为在某有限区间外为零的连续函数, 则有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx &= \int_{-\infty}^{-\epsilon} \delta(x) \phi(x) dx + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) \phi(x) dx \\ &\quad + \int_{\epsilon}^{+\infty} \delta(x) \phi(x) dx \end{aligned}$$

因为在区间 $(-\infty, -\epsilon)$ 及 $(\epsilon, +\infty)$ 内, $\delta(x)$ 均为零. 而在微小区间 $(-\epsilon, \epsilon)$ 内, $\phi(x) \simeq \phi(0)$, 故上式又可以写作

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) dx = \phi(0) \quad (2.1.11)$$

由(2.1.9)及(2.1.11)式, 很容易得出

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases} \quad (2.1.12a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x + x_0) dx = \phi(x_0) \quad (2.1.12b)$$

以上两式, 通常称为 δ 函数的移动性质.

下式所定义的函数 $P_x^*(x)$ 称作随机变量 x 的累积分布函数(cumulative distribution function), 或者简称为分布函数

$$P_x^*(x) = P(x \leq x) = \int_{-\infty}^x p_x(x) dx \quad (2.1.13)$$

若令 $x = x_0$, 则上式给出 $x \leq x_0$ 的概率: