群论

QUN LUN

上　册

[苏]A.Г.库洛什　著

曾肯成　郝钢新　译

高等教育出版社

群　　论

上　册

[苏]A. Г. 库洛什　著

曾肯成　郝锕新　译

高等教育出版社

本书是在旧译本基础上根据苏联科学出版社(Издательство «Наука») 1967 年出版的库洛什(А. Г. Курош)著《群论》(Теория Групп) 增订第三版修订与增译的. 书中叙述了群论这一门科学的基础, 系统地整理了近年来在一般群论方面所积累的材料, 使广大数学工作者可以通过本书了解近代群论的主要方向, 群论中的方法和一些新成就,以及尚未解决的问题. 本书中译本暂分上下两册出版. 上册分群论基础与阿贝尔群两大篇.

本书并不要求读者具有群论方面的预备知识,可供具有高等代数基础知识的大学生、研究生和数学工作者参考.

本书中译本上册由郝钢新按 1967 年第三版修订,下册已由刘绍学翻译出版.

(有关的文献均载于下册.)

群　论

上　册

[苏] А. Г. 库洛什 著

曾肯成　郝钢新　译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷三厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 9.125　字数 210,000

1987 年 7 月第 1 版　1987年 7 月第 1 次印刷

印数 00,001--4,620

书号 13010·01100　定价 2.05 元

第 三 版 序

现在呈现在读者面前的是本书的第三版．这本书曾在四分之一世纪里在力所能及的范围内对群论的发展起了促进的作用．作者在 1940 年完成了这本书第一版的工作，第二年进行了两次校对．只是由于战时的情况，本书被推迟到 1944 年才得以问世．在第一版的序言里——这个序言的大部分都摘录在后面——指出了作者在本书中所致力的目标．

在四十年代，一般群论得到蓬勃的发展．在阿贝尔群的理论方面，在直积的理论方面，在可解群、幂零群和具各种有限性条件的群的理论方面，都取得了显著成就．由 О. Ю. Шмидт 所创立的苏联群论学派在这个发展中起了很大的作用．特别，按照本书第一版学习群论的苏联年轻的代数学家做了许多工作 —— 应该提一下，本书在 1940 年的打字原稿保存在莫斯科大学数学力学系，也为研究带来了方便．

书的第二版完成于 1952 年，而是在 1953 年出版的．这本书反映了五十年代初期群论所达到的状态．从题材的重新安排来看，从很多新的章节的增加来看以及从对于第一版的许多内容的充分修改来看，这本书实际上已是一本新书．只是由于新书是以旧书为基础，并且在构思上与旧书非常接近，才使作者保留了旧的书名．

在此期间，世界各国相继出版了本书的译本．1953 年德意志民主共和国出版了第一版的德文译本．晚后出版了第二版的一些译本：1955 年出版了匈牙利文译本；1955 和 1956 年先后出版了英(美)文的两卷译本；1959 年出版了罗马尼亚文译本；1960 和 1961

年先后出版了日文的两卷译本;中文译本(第一卷)则在 1964 年出版的. 这样就使本书得以参与世界上许多国家的群论发展.

五十年代和六十年代前五年是群论取得进一步发展的时期. 多年来, 甚至几十年来有待解决的问题被解决了. 比如我们将提到的关于周期群的 Burnside 问题以及关于具有限个定义关系的群的算法问题. 阿贝尔群的理论经受了根本的改造. 在可解群和幂零群的理论方面也做出了很多成果. 整个新的方向形成了——比如说,群流形的理论, 群类(即抽象群的性质)的理论,群上运算的理论, 自同构群和群偶的理论. 在群论基础方面也发生了重要的变化. 例如,从算子群过渡到多重算子群.

在这一时期, 关于一般群论研究的兴旺程度单从研究著作的数量上就足以说明. 在本书第二版里所载入的十分完全的文献大约有五百篇. 另一方面,在完成第二版以后的若干年里,关于一般无限群论方面的论文(即不包括有限群,置换群, 线性群,Lie 群和代数群,拓扑群, 有序群以及模论等方面的工作)不下 1300 篇(其中苏联作者的工作约占三分之一).

近年来, 发表了一般群论的某些分支的专门论著. 这样的专门论著今后还将会继续出现, 这是理所当然的. 然而,不言而喻,与此同时全面地阐述群的理论, 并且将它作为统一的学科而保存着的综合文集也是必要的. 这些年来, 一些带有一般性特征的书在各个国家出现了. 每一本书都有它自己的长处,但遗憾的是,这些书的任何一本都未能充分满足所指出的要求. 这就是出版本书新版的原因.

作者很清楚,实际上应该写一部新的书. 但是作者知道,在上述如此丰富的材料的情况下,这本书就应该是三卷集,而作者已经不可能计划如此浩繁的工作了. 因此, 这个第三版就有着非常不一般的形式.

这就是，在第三版中，以不多的变化保留了第二版的全文，改正了某些不正确的地方和一些印刷上的错误，以及一些不太现代化的符号．重印旧书的全文是有道理的，因为旧书早已绝版，甚至一些年轻的苏联群论工作者的家中也没有这部书．

印刷数量相当少的第一版就更是珍本了．然而，正象作者在第二版序言里所说的那样："由于不可避免的篇幅的扩大，作者不得不将旧书的许多地方完全删去，有时甚至是整节地删去，而这些内容过去写入书中并不能认为是错误的．"所以第二版的读者不止一次地要参看第一版的有关段落；并且到目前其他一些作者还不得不援引本书的第一版．

由于这个原因，在第三版里，有些第二版的原文也包含了第一版的某些材料．有时是整节地引入；同时对这些节这样编号，就是在原第二版的节的号码后面缀上字母 a(有时还要缀上 б 和 в)．这样读者就可以不费力地按目录找到这些节．第一版中的某些材料还收集于 §§ 23, 26, 33, 35, 42, 44, 53, 54 中．

现在这本书的基本正文就是这样．本书也载入了《第一版的结束语》．显然，过了四分之一世纪，作为描绘群论进一步发展道路的纲要，它的作用已经完全消失，其中很多地方现在看起来甚至很幼稚．然而，把当时还年轻的作者在那时候所提供的大纲与科学的实际发展作一比较，可能是有益的．我们对《结束语》的原文没有作任何修改；只是在引用第一版的章节时把它换成这本书基本正文相应节的号码(圆括号)．此外，在方括号里指出基本正文或者其后面的《补充》的各节的号码．在补充里读者可以找到所考虑的问题进一步发展的信息．

带有标题为《1952—1965 年无限群论的发展》的补充对于专家可以说是最有用的．在补充里，作者试图对第二版完成以后的年代里一般群论的发展作一概述．同时也说到一些更早的工作．

如果说这些工作在第二版中没有得到充分反映的话，作者也认为是不合适的. 另一方面，作者显然不可能在概述中以应有的完备性反映关于近年来的文献；不过这方面已为刊载在《科学成果》丛刊里的摘要所弥补.

《补充》的结构没有重复基本正文的结构，并且可以这样说，如果作者现在写这本书的话，关于群论新书的结构应该是这个样子.《补充》不包含任何论证；然而，所有必要的定义都已被引入，并且将某些结果表述出来. 在《补充》中总共提到一千一百篇论文，这些论文没有列入第二版的文献索引. 然而，其中的一些只是被提到一下. 只是把所有这些工作补充收进文献索引里. 和通常一样，引用这个索引时，指出作者的姓名和被引用的文献的编号(在方括号内).

在基本正文里多次建议参看《补充》.［参看补充 **12.3**］意味着“参看补充 § 12，第三段”.

在《补充》的正文里，如果不是说它的前言的话，几乎没有涉及有限群论的成果. 作者在本书第二版序里曾经说过:“在进行第一版的工作时，作者面临的任务是要指出群论不只是有限群论，因而这本书几乎不包含任何关于有限群的特别论述. 现在这个任务可以认为已经完成. 相反地，提出了新的问题——要注意有限群论是一般群论的一个重要组成部分. 尽管已在书中补充了一些与有限群有关的题材，但是这个新的任务在本书中还没有完全解决.” 关于有限群论各方面问题所发表的著作的数量是如此巨大，以致作者在写第三版《补充》时也无法试图解决这个问题，虽然作者明白，如果以前脱离出去的分支再重新成为统一理论的有机组成部分，那末群论被分成各个独立分支的倾向就会逐渐受到制止.

近年来在群论中做了大量的工作. 群论的研究正在非常紧张地进行. 看来，作者现在难以再重复他在第一版序言中曾说过的

这样一句话，即:“一般群论还没有达到它本身发展的顶峰.”然而，群论对于更一般的代数的理论，比方说，泛代数的理论和范畴的理论，无疑仍将继续是新思想的基本提供者和试验场所. 可以期望，最近一些年里群的理论工作者的研究仍会保持着非常强烈的势头. 如果这本书在它的新版里还能在一段时间内对从事群论的代数工作者有所裨益，作者将感到高兴.

作者谨向在这本书的第三版的工作中所有给予他帮助和支持的人致以诚挚的谢意，首先是 А. П. Мишина, А. Л. Шмелкин 和 Е. Г. Шульгейфер. 特别要感谢承担繁重的编辑任务的 О. Н. Головин，作者对于他重新作为自己的合作者而感到愉快 —— 顺便提一下，Олег Николаевич 曾经是本书第一版的编辑之一.

А. Курош

1966 年 11 月于莫斯科

第一版序摘要

群论有着悠久和丰富的历史．它是随同 Galois 理论一起，为了这一理论的需要而产生的，并且首先是作为有限置换群的理论而发展起来的(Cauchy, Jordan, Sylow)．然而，不久就发现，对于有关这一理论的大多数问题来说，用以构成群的特殊材料——置换——并不重要，而实际所应注意的只是对于在任意有限集合里所定义的代数运算的性质的研究．这样一个现在看起来是不言而喻的发现，实际上是一个很大的成就，并且使得有限群的一般理论得以形成．不错，由置换群过渡到一般有限群论实质上并没有丰富了研究对象，但是这样的过渡就把群论建立在公理基础上，使它变得严谨而清晰，从而有利于这一理论的进一步发展．

上世纪末和本世纪的最初十年里是有限群论的全盛时代．在这期间，有限群的主要结果被得到了，主要研究方向被指明了，主要研究方法被建立了；一般说来，有限群论通过这方面主要学者(Frobenius, Hölder, Burnside, Schur, Miller)的工作，在当时已经具备了它在今天[1]所带有的一切主要特征．然而以后逐渐显示出来，群的有限性是一个过于强的而且是一个极不自然的限制．更重要的是，这样一个限制不久就使得群论与它的一些邻近数学部门之间发生矛盾：在几何学的各个分支，自守函数以及组合拓扑学的理论中，常常遇到这样的一些代数对象，它们与群非常类似，只不过是无限的．于是就对群论提出了有限群论所无法满足的要求．同时，群论作为代数学的一部分，从代数学本身的观点来看，例如象整数加法群这样简单而又重要的群竟被排除在群论范围之外，

1）在本书第三版问世前的年代里有限群论经历了蓬勃的发展——见补充的引言

也不能认为是正常情况. 因此，有限群应该被看作群的一般概念的一个特殊情形，而有限群论应该是一般“无限”(即不一定有限)群论中的一个篇章.

在世界文献中，不假定有限性而叙述群论基础的第一本书是 О.Ю.Шмидт的《抽象群论》(基辅,1916)，这本书直到现在仍然是苏联一切代数工作者的常备参考书. 然而，一般群论的广泛发展则开始得较晚，这是在本世纪 20 年代随着代数里所进行的彻底的重新整理以及向集合论基础上的过渡 (E. Noether) 而一起开始的. 特别，从此在群论中引入了象运算子系和链中断条件这样一些新的概念.

自此之后，一般群论方面的工作有蓬勃的并且是多方面的开展，现在这一数学分支已经成为一门范围广泛的内容丰富的科学，是近世代数学中占首要地位的分支之一. 一般群论的发展自然不能忽视在有限群论中已经取得的成果. 相反地，一般群论的发展在很多地方正是被有限群论中相应理论所推动的. 这里所遵循的原则是，期望用一些自然的限制来代替群的有限性，使得已知的定理和理论仍旧保持正确，而去掉这些限制后即不再成立. 然而也常常出现这样的情形，一些在有限群论里是非常简单并且被完全解决了的问题在一般群论里变成一个广泛发展并且还远没有完成的理论，例如，近代群论的重要分支之一的阿贝尔群论就是如此. 同时也产生了一些和无限群的研究本质地关联着的分支——自由群和自由积的理论. 最后，在某些情形——首先是关于用定义关系给出群的问题中——，群论第一次达到了在它以前的发展阶段所没有达到的精确和严格的程度.

群论离着完成还差得很远. 它的具体问题的多种多样性以及这样一些仅在最近才开始发展的方向的存在，使我们可以认为，一般群论还没有达到它本身发展的顶峰. 虽然如此，把已经积累的

材料加以系统整理，以便使广大的数学工作者了解近代群论的主要方向，它的方法，它的最卓越的成就，最后还有它的当前的问题和最近发展中的必要途径，是适时的.

自然，本书并不打算包括群的全部理论，但是在这里几乎提供了这一门科学的一切基础部分，这些内容已经足够使读者看到这一理论内容的丰富性和方法的多样性.

本书并不要求读者具备关于群论基本概念方面的预备知识. 只是为了作为群的某些最初的例子——矩阵，置换，单位根——才要求高等代数的基础知识. 要求读者关于数论方面的知识也只限于同余式的初步理论. 此外，关于集合论的基础知识方面，要求读者具备 Hausdorff《集论》前四章的内容. 特别，许多构造和证明从本质上说要用到超限归纳法.

莫斯科，1940 年 10 月.

上 册 目 录

第二篇 阿贝尔群

第一篇 群论基础

第一章 群的定义

§1. 代数运算

在高等代数课程中，读者就已遇到过带有代数运算的集合. 高等代数中的主要集合是域和环，即带有两个独立运算(加和乘)的集合. 可是在各种各样的应用中都时常可以遇到那样一种集合，在它们里面只定义了一种代数运算（或者在该场合只考虑一种运算）. 现在我们来说一下这个概念的定义.

设已知一集合 M. 如果对于集合 M 中按一定次序取出的任意两个(相同或不相同的)元素，根据某一规律可使属于同一集合中的完全确定的第三个元素和它们相对应，那我们就说，在集合 M 里面定义了一个代数运算.[1)]

因此，在代数运算的定义中，已经包括了运算的单值性的要求和对任意一对元素均可进行运算的要求. 另一方面，这个定义里还提到了进行运算时从集合 M 中取出元素的次序. 换句话说，这个定义并没有排除下述的可能性，即与集合 M 中的元素偶 a, b 及元素偶 b, a 相对应的元素可能互不相同，也就是说，所讨论的运算是非交换的.

可以举出许许多多由普通的数所组成的、带有一个运算的集

1）带有一个满足结合律的代数运算的集合 M 叫做一个半群.

合，它们能适合上述的定义．我们建议读者自己去造出一些这样的例子．在这里我们只指出，例如，负整数的集合对于乘法，奇数的集合对于加法是不适合我们的定义的．同样，全体实数的集合，如果把除法看作它上面的运算，也不适合这个定义，因为不能用零除．

如大家所熟知的，也有各种各样不是行之于数的代数运算的例子．n 维矢量空间中矢量的加法，三维欧氏空间中矢量的矢量乘法，n 阶方阵的乘法，一个实变数的实函数的相加以及这些函数的相乘等等，都是这样的代数运算．对以后来说一个非常重要的代数运算的例子，就是*置换的乘法*．如大家所知道的，所谓一个 n 次置换，就是头 n 个自然数集合的一个自身相互单值映射．相继进行两个 n 次置换，其结果仍旧是一个 n 次置换，叫做第一个置换乘上第二个置换的*乘积*．举例来说，如果给出当 $n=3$ 时的两个置换

$$a=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix},$$

那末这两个置换的乘积就是置换

$$ab=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

这样，在 n 次置换的集合中，就定义了一个代数运算．很容易看出，这个代数运算是非交换的；譬如对上面所给的那两个置换 a 和 b 来说，b 乘上 a 的乘积将是

$$ba=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

在研究带有一个代数运算的集合时，我们照例使用乘法的术语和记号．就是说，把所研究的运算叫作*乘法*，把对元素偶 a, b 进行运算的结果叫作这两个元素的*乘积* ab．但在某一些场合下，使

用加法的术语和记号要来得方便一些，那就是说，把运算叫作加法，而把运算的结果叫作元素 a,b 的和 $a+b$.

我们已经指出过，在代数运算的定义中，并没有要求运算是交换的，也就是说，并没有要求对集合 M 中的任意一对元素 a 和 b，等式

$$ab=ba$$

成立.

非交换运算的例子有：当 $n\geqslant 2$ 时 n 阶方阵的乘法，n 次置换的乘法，不仅对 $n=3$ 的情形是非交换的，如在上面已指出过的，对所有 $n\geqslant 3$ 的情形也都是非交换的. 此外，三维欧氏空间中矢量的矢量乘法也是非交换的. 数的减法也可以看作非交换运算的一个例子.

代数运算的定义并没有要求这个运算必须是结合的，也就是说，没有要求对集合 M 中的任意三个元素 a,b,c 等式

$$(ab)c=a(bc)$$

成立.

三维欧氏空间中矢量的矢量乘法是非结合运算的一个例子；整数的减法也是非结合的. 另一方面，如大家所知道的，方阵的乘法是结合的. 置换的乘法也是一个结合的运算，这一点可以从下面这个更普遍的结果中得出来.

设已知一个集合 S，有限或无限在所不论. 试考察所有将集合 S 映入其自身的单值映射. 也就是说，所有这样的映射，它们中的每一个能使 S 中的任意一个元素，都有这一集合中一个完全确定的元素和它相对应，虽然和 S 中不同元素相对应的元素可能是同一元素，并且在 S 中还可能有一些元素，谁也不和他们相对应. 如果我们把接连作这样两个映射的运算称为它们的相乘，那末我们就可以得出这个映射集合中的一个结合的代数运算.

事实上，设给出三个将集合 S 映入其自身的单值映射 φ,ψ 和 χ. 其次，设 a 是集合 S 中的一个任意的元素，并设元素 a 被 φ 映到元素 b，而元素 b 又被 ψ 映到元素 c，最后，元素 c 又被 χ 映到元素 d. 在这样的情形下，映射 $\varphi\psi$ 将元素 a 映到元素 c，因而映射 $(\varphi\psi)\chi$ 将元素 a 映到元素 d. 但映射 $\psi\chi$ 将元素 b 映到元素 d，因而映射 $\varphi(\psi\chi)$ 也将元素 a 映到元素 d. 这就证明了 $(\varphi\psi)\chi$ 和 $\varphi(\psi\chi)$ 这两个映射是一致的.

现在让我们来看一看，从某一集合 M 中给定的代数运算满足结合律这一事实可以推出怎样一些结论. 从代数运算的定义可知，从集合 M 中按一定次序取出的任意两个元素都有乘积，并且这个乘积是唯一确定的. 但仅仅根据这一点，在一般情形下我们还不能讨论三个元素的乘积——一般说来，依一定次序从 M 中取出的三个元素 a, b 和 c，其乘积要看我们是怎样将它们相乘才能决定：是将 a 和 b 的乘积乘上 c 呢，还是将 a 乘上 b 和 c 的乘积？有了结合律，我们才可以唯一地说出 M 中三个元素的乘积：元素 $(ab)c$ 等于元素 $a(bc)$，并将其简单地记作 abc. 显然，改换因子的次序时，三个元素的乘积一般说来也是会跟着改变的.

除此之外，有了运算的结合律，我们还可以谈论集合 M 中按一定次序取出的任意有限多个元素的乘积而不会有所误解. 也就是说，从结合律可以证明进行运算的结果与最初括号的分布位置无关. 现在让我们假定这一事实对因子的个数小于 n 的情形已经证明，进而来证明它对 n 个因子 $(n>3)$ 的情形也成立. 设在已知集合 M 中有一个 n 个元素的有序组

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

在这些元素之间按某种方式安置了一些括号，表示运算进行的次序. 按这些括号所指示的次序依次相乘，最后一步，我们将把最先 i 个元素的乘积 $a_1a_2\cdots a_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 与乘积 $a_{i+1}a_{i+2}\cdots a_n$ 相乘.