

重力坝的弹性理论设计

潘家铮著

水利电力出版社

PDG

前 言

人类很早就懂得利用堤坝和水流作斗争。堤坝能够驯服河流、控制洪水、改善航道、获取动力和供给灌溉及生活用水。如果说，堤坝是最重要的水工建筑物之一，这是丝毫不夸大的。

随着科学技术的日益进步，堤坝的设计和建筑技术也获得相应的发展，特别在20世纪中，堤坝的建筑高度和规模的纪录几乎每年被刷新，各种新颖的坝型被陆续研究出来；并且付诸实施。

我们伟大的祖国——中国是世界上历史最悠久的古国之一。我们的祖先在水利工程方面的光辉成就可以追溯到四千年前；至今，还有不少古老的水利建筑物在为我们服务。但是，由于长期的封建统治，特别是最近一百年来满清皇朝和国民党反动统治，我国水利科学的进展受到了严重的阻碍。以国民党统治的30年时期来说，全中国几乎没有修建过一个较大的水利工程，黄河和淮河更是年年成灾变成中国的灾难，在这一段黑暗的年代里，我国的水利科学正和其他各种科学及工业一样，得不到进一步的发展，而远远的落后于国际水平。

但是当1949年全国获得解放后，在党的正确领导下，在苏联的无私援助下，我们迅速的扭转了这些落后局面，以史无前例的速度向前猛进。在短短的第一个五年计划中，我们已取得极其伟大的成就：在“一定要把淮河治好”的口号下，我们已在淮河流域上兴建了许多的水库群和各种不同形式的水利工程，基本上结束了十年九灾的局面。过去被认为没法根治的黄河，其全面规划工作已经完成；且第一个伟大的三门峡水力枢纽工程已经兴工，黄河水清已经是很快必然出现的事实了。从发电容量来说，自数十万千瓦到百余万千瓦的大型水电站，如丰满、新安江、三门峡等，有的已投入运转，有的已施工兴建，在设计中的更不胜枚举。目前，规模为世界第一的长江规划工作，也已着手进行了。

随着解放后水利建设事业的飞跃发展，我国在大坝设计和施工的水平也正在不断提高。丰满、新安江和三门峡工程中的重力坝均高达

百余公尺，梅山、佛子岭水庫中采用了七、八十公尺高的連拱坝擋水，官厅、南灣和其他众多的水庫中興建了巨大的土坝，其余像高拱坝、肋墩坝、堆石坝……紛紛出現。由于我国蘊藏着极其巨大的水力資源有待开发，有无数河流有待整治，我們可以断言，在坝工程方面的发展将日益加速而无止境。

坝的类型非常众多，就建筑材料和结构作用观点来分，可划为圪工重力坝(主要是混凝土重力坝)、散体堆填坝(土坝和堆石坝)、利用材料结构作用的拱坝、梁坝(肋墩坝、平板坝和連拱坝)及为数众多的混合式坝等数类。在这許多坝型中，重力坝无疑是最原始也是最重要和常見的一种，它具有几个显著的优点：首先是重力坝的结构作用明确、設計简单，适用于較广大的地形情况，对基础地質的要求比拱坝或梁坝为低，施工簡便，可以采用大規模的浇筑方式，单价較低，鋼筋也用得很少；此外，其最大的特点是在坝頂上可以通过大量洪水。但是重力坝也有其缺点：即它依靠本身重量擋水，内部应力很低，材料强度远未利用，坝体断面很大，揚压力也随之增加，以致总的体积常远大于拱坝或梁坝；而且由于坝体巨大，混凝土的散热收縮等問題显得突出。此外，重力坝的体积虽然巨大，给人以安全的感覺，而其潛在的安全因数实低于拱坝。因此，在坝型选择中，拱坝、梁坝、土坝或堆石坝也常为选择的对象。

根据我国河流的特点，大都水量丰沛，溢洪流量巨大，采用梁坝或土坝等常須另辟溢洪道，这就不比重力坝便宜了。我国最高的几个大坝(如三門峽、新安江、丰满等)都采用重力坝，这不是偶然的。

巨大的重力坝的设计工作并不十分简单，我們首先須要解决基础的处理、应力的計算、經濟断面的选定、散热和溫度的設計、分块分縫的设计等問題，其中应力分析当然是主要内容之一。重力坝的应力計算，属于三向彈性体的接触应力性質問題，其理論研究甚为繁复。因此，在一般的设计中，我們常常采用若干簡化假定，推导出一些近似和簡便的計算方法。但是随着坝高的增加，我們对这种近似算法漸漸感到不能滿意，因而近数十年來各国学者都在致力研究应用彈性理論計算重力坝的方法。这一方面的研究，已有許多成果，但是还缺少

一些綜合性的論述。將這些研究成果總結一下，作為我們學習和應用的資料，是完全必要的，本書的編寫便是從這個目的出發的。

著者希望，這本小冊子除了可以使讀者們在實際設計工作時得到一些有用的公式和方法外，更希望能幫助讀者了解彈性理論在這方面領域中的進展和面貌，看出我們今後可以繼續努力的方向。

由於受到參考文獻及著者水平的限制，本書中未能包括最近幾年來的新的進展。此外，為了節省篇幅，本書對許多基本理論都只作了簡單的敘述，對許多熟見的公式原理亦不再詳細推導，讀者如欲作進一步的研究，可以參考書末所附的各項有關專著。

最後，著者歡迎來自任何方面的對本書的批評和指正。

目 录

前言

第一章 經典解答(5)

- 第一节 概述(5) 第二节 无限楔体的經典解答(8) 第三节 用疊加法計算实用断面(15) 第四节 基础应力計算(28) 第五节 坝体温度和收缩应力(31) 第六节 渗透压力論(34)

第二章 角緣函数論(39)

- 第一节 概述(39) 第二节 基本应力函数的計算(42) 第三节 边界值的計算(44) 第四节 本征值及本征函数的确定(46) 第五节 应力函数校正項的計算(48) 第六节 上游面在水压力作用下的应力計算(52) 第七节 上游面在重力下的应力計算、下游面的应力計算(56) 第八节 基础内应力的計算(60) 第九节 边緣应力的近似計算(77)

第三章 基础剛度对具体应力的影响(84)

- 第一节 概述(84) 第二节 基本应力函数的計算(85) 第三节 应力函数校正項的計算(88) 第四节 基础表面变形計算(90) 第五节 最小值条件(92) 第六节 数例(95)

第四章 坝内孔口和廊道的应力計算(99)

- 第一节 圆孔和标准廊道的应力計算(99) 第二节 椭圆和矩形孔口的应力計算(121) 第三节 具有大孔口坝体的应力計算(134)

第五章 有限差和迭弛法(141)

- 第一节 理論(141) 第二节 数例(152) 第三节 簡接計算法(169) 第四节 复聯区域的迭弛計算(172)

第六章 实验和相似(177)

- 第一节 概述(177) 第二节 平面应变和平面应力間的关系(180) 第三节 体积力、边界力和位差間的关系(182) 第四节 拟板法(184) 第五节 应变网理論(186) 第六节 光弹性試驗(194)

第七章 重力坝的热应力計算(206)

- 第一节 热弹性的基本方程式(206) 第二节 底部固定的坝块的溫度应力(212) 第三节 圆孔周围的溫度应力(217) 第四节 三角形坝体的溫度应力(218) 第五节 圆梁的溫度应力(223) 第六节 考虑徐变的溫度应力計算原理(231) 第七节 考虑徐变的計算举例(239)

第八章 重力坝的动力計算(251)

- 第一节 概述(251) 第二节 地震时的車水激盪力計算(一)(253) 第三节 地震时庫水激盪力的計算(二)(258) 第四节 坝体自震周期計算(267) 第五节 坝体的强迫震动計算(281) 第六节 蓄水时的强迫震动(293)

参考文献

主要符号彙总

第一章 經典解答

第一節 概 述

第一个用数学方法計算重力坝应力的人，当推諸法国数学家利威 (M. Levy) 氏。他在1898年用經典的彈性理論方法得出了无限楔体在重力和一些边界力作用下的应力分布解答。有趣的是：和桿件系統結構力学相似，彈性理論的发展和應用倒比目前通常采用的“工程師算法”还早些。

其后，重力坝的修建日益見多，它的应力計算理論也日益受人注意。由于經典的彈性理論解答只适用于少数理想情况，应用範圍有限，情况較复杂时，严謹的数学解答甚难推求。因此工程師們对某些問題作了几种簡化的假定，作为近似計算法的依据，例如著名的“重力分析法”(三分点法)等。但是晚近三四十年來，用彈性理論計算重力坝的問題仍然为許多学者所注意，而且有許多新的計算方法被陸續研究出来。原因是显然的，因为重力坝的高度紀錄，正在一天天被刷新，精确的决定坝內应力的問題也就日見重要，而且有許多特殊問題(例如坝內大孔口应力問題)也非一般的近似算法所能解决，必須求諸严謹的彈性理論。

这本小冊子的目的，是拟簡略的綜合性的叙述一下彈性理論在重力坝計算中各方面的应用，希望有助于水工設計同志对這問題的进一步瞭解，同时也可以看出我們今后可以努力的方向。

用彈性理論計算重力坝应力和計算普通的机械零件应力頗有不同。首先，在前一情况中，体积力将成为极重要的一种因素(体积力主要成份为重力，其他还包括上托力和地震时的慣性力等)，而在后一情况中，体积力常可忽略的。体积力的存在，增加了数学处理上的許多困难。特別当坝体内有孔口存在时(复联区域)为甚。同时，当体积力存在时，表示应力的公式可有多种形式，这些形式並非完全在座标系統变换中都具有不变性的。此外，重力的存在，也使光彈性試驗带来較大的麻煩。最后，在堤坝工程中边界条件和荷載情况的复杂，

当然也远超过普通的机械零件计算。

下面我们将提一下熟知的弹性理论的基本公式。我们将引用几条基本假定，例如材料是均匀、连续和同向性的，并且认为重力坝是一个平面(两向)问题，应力在材料的弹性范围以内等，这些都是普通采用的假定，不再一一详举。

在图 1-1 中示一重力坝断面。

取一对坐标轴 x, y 。在坝体中任一点上有三个分应力 σ_x, σ_y 及 τ (为 τ_{xy} 的简写)。 σ_x 及 σ_y 均以拉力为正， τ 的正负按弹性理论法则的规定。我们的计算目的，便在求出三个分应力的表达式，以坐标 x, y 为变数，荷载和坝体尺寸为参变数(如坝内无孔口，应力公式中不包括有 E, μ 等材料的物理常数)。

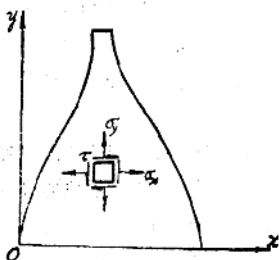


图 1-1

σ_x, σ_y 及 τ 必须满足三类条件：(1)平衡条件；(2)相容条件；(3)边界条件。

平衡条件要求：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + g_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + g_y = 0 \quad (1-2)$$

式中 g_x 及 g_y 为沿 x 及 y 方向的体积力。如果 $F(x, y)$ 是一个任意的、连续的、可微分的平面函数，而且令

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - g_x \cdot x - g_y \cdot y \quad (1-3)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - g_x \cdot x - g_y \cdot y \quad (1-4)$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (1-5)$$

则容易证明， σ_x, σ_y 及 τ 就满足平衡条件(1-1)和(1-2)。

相容条件要求:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} \quad (1-6)$$

式中 ϵ_x , ϵ_y 及 γ_{xy} 为 x 向、 y 向及剪向的应变。上式完全可由纯几何观点求出。应用虎克定律:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} \left[(1-\mu^2)\sigma_x - (\mu+\mu^2)\sigma_y \right]; \quad (1-7)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} \left[(1-\mu^2)\sigma_y - (\mu+\mu^2)\sigma_x \right]; \quad (1-8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (1-9)$$

将式(1-3)~(1-5)代入式(1-7)~(1-9), 然后再代入式(1-6), 可得:

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1-10)$$

或写为:
$$\nabla^4 F = 0 \quad (1-11)$$

上式称为重调和方程式, 满足此式的 F 称为重调和函数。

总起来说, 为了满足相容条件, 函数 F 不能是任意的, 它必须是一个重调和函数, 然后由 F 求出的 σ_x 、 σ_y 及 τ 方始既满足平衡条件又满足相容条件。这个函数 F 一般称为应力函数。

重调和函数为数仍是无穷, 因为设 f 是一个平面调和函数, 即 f 满足下式:

$$\nabla^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f = 0 \quad (1-12)$$

则显然:
$$F = c_1 f(x, y) + c_2 x f(x, y) + c_3 y f(x, y) + c_4 (x^2 + y^2) f(x, y) \quad (1-13)$$

是一个重调和函数, 而调和函数 f 可由任意一个“可解析的复变函数”的虚数或实数部份得之:

$$f(x, y) = R_e \phi(z) \text{ 或 } = I_m \phi(z), \quad z = x + iy \quad (1-14)$$

其数是无限制的。

最后我们还要从无穷的 F 函数中, 找出适合于所设问题边界条件

的解答。最后一步工作，却是最困难的工作，除了几种最简单情况外， F 一般很难用简洁的初等函数的组合形式表达出来。

以上所述是指采用直角坐标 x, y 而言，重力坝的计算有时以用极坐标 (r, θ) 为宜。这时，相应的分应力为 σ_r, σ_θ 及 $\tau(r, \theta)$ ，它们和应力函数的关系是(图1-2)

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 F}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - gr \cos(\theta - \beta); \quad (1-15)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - gr \cos(\theta - \beta); \quad (1-16)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial F}{r \partial \theta} \right). \quad (1-17)$$

式中 g 为体积力， β 为 g 的方向和极轴交角。相容条件为：

$$\nabla^4 F = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{r \partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \theta^2} \right)^2 F = 0 \quad (1-18)$$

下面我们将叙述几种简单情况的解答。

第二节 无限楔体的经典解答

利威(M. Levy)解答

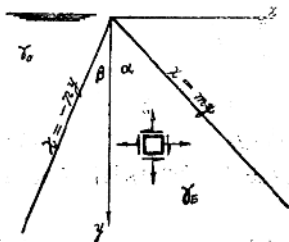


图 1-3

利威氏首先给出无限楔体在重力和边界力作用下的应力分布解答，后人又作了许多补充。应力解答的形式视所取坐标系的形式及位置而不同，但是可以相互转化的。

图1-3中是一个最简单的情况，即一无限楔体，承受自重(容重为 γ_B)及上游面齐顶水压力(容重 γ_0)

作用，则边界条件为：(1)在上游

面 $x = -ny$ 处， $\tau = 0$ ，垂直于上游面的主应力 $\sigma_1 = -\gamma_0 y$ ；(2)在下游

面 $\tau=0$ 、 $\sigma_1=0$ ，由于水压力及自重都是 x 、 y 的一次函数，我們很自然会想到应力分布也是一次函数，則 F 应该是三次函数，滿足边界和相容条件的 F 是：

$$F = \frac{a_2}{6} x^3 + \frac{a_1}{2} xy^2 + \frac{b_2 + \gamma_E}{2} yx^2 + \frac{b_1 + \gamma_E}{6} y^3, \quad (1-19)$$

式中 a_1 、 a_2 、 b_1 及 b_2 为四个常数：

$$a_1 = -\gamma_E \frac{mn(m-n)}{(m+n)^3} - \gamma_0 \frac{mn(mn-m^2-2)}{(m+n)^3}, \quad (1-20)$$

$$b_1 = -\gamma_E \frac{2m^2n^2}{(m+n)^3} + \gamma_0 \frac{m^2(2mn^2-3n-m)}{(m+n)^3}, \quad (1-21)$$

$$a_2 = \gamma_E \frac{m-n}{(m+n)^3} + \gamma_0 \frac{n^2+3mn-2}{(m+n)^3}, \quad (1-22)$$

$$b_2 = -\gamma_E \frac{m^2+n^2}{(m+n)^3} + \gamma_0 \frac{m-n-2m^2n}{(m+n)^3}, \quad (1-23)$$

而应力公式是：

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \gamma_E \cdot y = a_1 x + b_1 y, \quad (1-24)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \gamma_E \cdot x = a_2 x + b_2 y, \quad (1-25)$$

$$\tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -a_1 y - (b_2 + \gamma_E) x, \quad (1-26)$$

按上式算出的 σ_y 在一定高程断面上($y=$ 常数)呈直綫分布，而且和按材料力学公式 $\sigma_y = \frac{P}{A} \pm \frac{Mx}{I}$ 所得者一致，但如填頂或填面承受它种荷載时，彈性理論公式就和材料力学公式不同了。

今将以上公式(1-24)~(1-26)就不同荷載分拆开来写于后：

承受齐頂水压力时

$$\sigma_x = \gamma_0 \left[\frac{mn(2-mn+m^2)}{(m+n)^3} x - \frac{m^2(3n-2n^2m+m)}{(m+n)^3} y \right], \quad (1-27)$$

$$\sigma_y = \gamma_0 \left[\frac{(3mn+n^2-2)}{(m+n)^3} x + \frac{(m-n-2nm^2)}{(m+n)^3} y \right], \quad (1-28)$$

$$\tau_{xy} = -\gamma_0 \left[\frac{(m-n-2nm^2)}{(m+n)^3} x + \frac{mn(2-mn+m^2)}{(m+n)^3} y \right], \quad (1-29)$$

承受自重时

$$\sigma_x = \gamma_E \left[\frac{mn(n-m)}{(m+n)^2} x - \frac{2n^2 m^2}{(m+n)^2} y \right]; \quad (1-30)$$

$$\sigma_y = \gamma_E \left[\frac{(m-n)}{(m+n)^2} x - \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2} y \right]; \quad (1-31)$$

$$\tau_{xy} = -\gamma_E \left[\frac{2mn}{(m+n)^2} x + \frac{mn(n-m)}{(m+n)^2} y \right]. \quad (1-32)$$

承受水平地震惯性力 g_x

$$\sigma_x = g_x \left[\frac{-(m^2+n^2)}{(m+n)^2} x + \frac{mn(n-m)}{(m+n)^2} y \right]; \quad (1-33)$$

$$\sigma_y = g_x \left[\frac{-2}{(m+n)^2} x + \frac{m-n}{(m+n)^2} y \right]; \quad (1-34)$$

$$\tau_{xy} = -g_x \left[\frac{m-n}{(m+n)^2} x + \frac{2mn}{(m+n)^2} y \right]. \quad (1-35)$$

具体承受垂直地震时，可用自重公式计算，只须把容重 γ_E 乘以系数 $1 \pm K_c$ 即可(K_c 为地震加速度与重力加速度之比值)。

地震应力、自重和水压力的另一解答

上面我们取 y 轴垂直向下，这和一般重力观念是符合的。但如把坐标轴转动一下，使 y 轴和上游面符合，则边界条件可以简单些。如图1-4，令 g_x 、 g_y 为体积力沿 x 、 y 轴的分力，这时应力函数 F 的形式为：

$$\begin{aligned} F = & \left[\left(\frac{g_y}{6m} + \frac{g_x}{6} - \frac{g_x}{3m^2} \right) - \frac{p_0}{3m^2} \right] x^3 \\ & + \left[\frac{1}{2m} g_x + \frac{p_0}{2m^2} \right] x^2 y \\ & + \left[\frac{1}{6} g_y - \frac{p_0}{6} \right] y^3 \end{aligned} \quad (1-36)$$

应力的公式为：

$$\sigma_x = -p_0 y - g_x x; \quad (1-37)$$

$$\sigma_y = \left[\left(\frac{g_y}{m} - \frac{2g_x}{m^2} \right) - \frac{2p_0}{m^2} \right] x + \left[\frac{g_x}{m} - g_y + \frac{p_0}{m^2} \right] y; \quad (1-38)$$

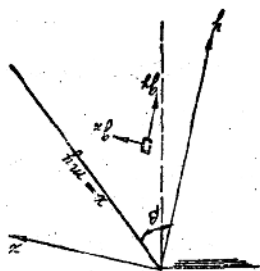


图 1-4

$$\tau = - \left[\frac{1}{m} g_x + \frac{p_0}{m^2} \right] x. \quad (1-39)$$

式中 p_0 为沿上游面 $y=1$ 处的水压力，
 $m = tg\beta$ 。

无限楔体受表面均匀荷载和楔顶荷载的公式

取上游面为 y 轴，在下列荷载下的应力公式是容易导出的。

水压力、自重和地震应力用式(1-37)~(1-39)计算，须先将自重及地震力化为 g_x 及 g_y 两分力。

上游面均匀水压力 p_0 。(图1-5)

$$F = \frac{p_0}{2(tg\beta - \beta)} \left[xy - y^2 tg\beta + (x^2 + y^2)\beta - (x^2 + y^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right]; \quad (1-40)$$

$$\sigma_x = \frac{p_0}{tg\beta - \beta} \left[-tg\beta + \beta - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right]; \quad (1-41)$$

$$\sigma_y = \frac{p_0}{tg\beta - \beta} \left[\beta - \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{xy}{x^2 + y^2} \right]; \quad (1-42)$$

$$\tau = - \frac{p_0}{tg\beta - \beta} \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \quad (1-43)$$

楔顶受平行 y 轴的集中力 R_y 。(图1-5)

$$F = - \frac{R_y(x(\beta - \sin\beta \cos\beta) + y \sin^2\beta)}{\beta^2 - \sin^2\beta} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}; \quad (1-44)$$

$$\sigma_x = - \frac{2R_y}{\beta^2 - \sin^2\beta} \left[\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} (\beta - \sin\beta \cos\beta) - \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \sin^2\beta \right]; \quad (1-45)$$

$$\sigma_y = - \frac{2R_y}{\beta^2 - \sin^2\beta} \left[\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} (\beta - \sin\beta \cos\beta) - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \sin^2\beta \right]; \quad (1-46)$$

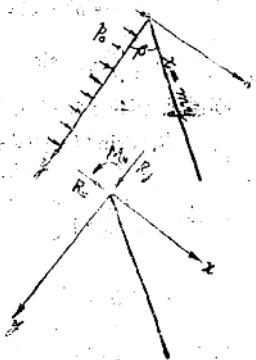


图 1-5

$$\tau = -\frac{2R_y}{\beta^2 - \sin^2\beta} \left[\frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} (\beta - \sin\beta \cos\beta) - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin^3\beta \right]. \quad (1-47)$$

楔頂承受平行 x 向集中力 R_x

$$F = \frac{R_x (x \sin^2\beta + y (\beta + \sin\beta \cos\beta))}{\beta^2 - \sin^2\beta} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}, \quad (1-48)$$

$$\sigma_x = \frac{2R_x}{\beta^2 - \sin^2\beta} \left[\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin^3\beta - \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} (\beta + \sin\beta \cos\beta) \right]; \quad (1-49)$$

$$\sigma_y = \frac{2R_x}{\beta^2 - \sin^2\beta} \left[\frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} \sin^2\beta - \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} (\beta + \sin\beta \cos\beta) \right]; \quad (1-50)$$

$$\tau = \frac{2R_x}{\beta^2 - \sin^2\beta} \left[\frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \sin^3\beta - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} (\beta + \sin\beta \cos\beta) \right]. \quad (1-51)$$

楔頂承受力矩 M_0 作用

$$F = \frac{M_0}{2(\sin\beta - \beta \cos\beta)} \left(\frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \sin\beta - \frac{2xy}{x^2 + y^2} \cos\beta + 2\cos\beta \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right); \quad (1-52)$$

$$\sigma_x = -\frac{2M_0}{\sin\beta - \beta \cos\beta} \left[\frac{x^2(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \sin\beta - \frac{xy(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cos\beta - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \cos\beta \right]; \quad (1-53)$$

$$\sigma_y = \frac{2M_0}{\sin\beta - \beta \cos\beta} \left[\frac{y^2(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \sin\beta + \frac{xy(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cos\beta - \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \cos\beta \right]; \quad (1-54)$$

$$\tau = -\frac{2M_0}{\sin\beta - \beta \cos\beta} \left[\frac{4xy(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \sin\beta - \frac{6x^2 y^2 - x^4 - y^4}{(x^2 + y^2)^3} \cos\beta \right]$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \cos \beta \Big]. \quad (1-55)$$

极坐标解答

以上解答均为直角坐标 (x, y) ，这些公式亦可完全化成极坐标形式。下面我们令楔角为 2β ，并取楔角平分线为极轴， θ 向下游面量取为正，则可得：

在上游面齐顶渐变压力 pr 作用下 (如水压力)

$$F = \frac{pr^3}{24} \left[(3\sin^2 \beta - \sin^2 \theta) \frac{\sin \theta}{\sin^3 \beta} - (3\cos^2 \beta - \cos^2 \theta) \frac{\cos \theta}{\cos^3 \beta} \right]; \quad (1-56)$$

$$\sigma_r = -pr \left[\frac{1}{3} (1+K) \cos \theta' - K \cos \theta' \cos 2\theta' + \operatorname{ctg}^3 2\beta \cos \theta' \sin 2\theta' \right]; \quad (1-57)$$

$$\sigma_\theta = -pr [\cos \theta' - K \sin \theta' \sin 2\theta' + \operatorname{ctg}^3 2\beta \sin \theta' (1 - \cos 2\theta')]; \quad (1-58)$$

$$\tau = -pr \left[\frac{1}{3} (1+K) \sin \theta' + K \sin \theta' \cos 2\theta' - \operatorname{ctg}^3 (2\beta) \sin \theta' \sin 2\theta' \right]. \quad (1-59)$$

式中 $K = \frac{2\cos^2 2\beta + 1}{2\sin^2 2\beta}$ ；而 θ' 是从上游面量起的极角。

④ 上游面承受均匀压力 p_0 。

$$F = \frac{1}{4} p_0 r^3 \frac{\sin 2\theta - \sin 2\beta - (2\theta - 2\beta) \cos 2\beta}{\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta}; \quad (1-60)$$

$$\sigma_r = -p_0 [1 + A(2\theta' + \sin 2\theta') - B(1 + \cos 2\theta')]; \quad (1-61)$$

$$\sigma_\theta = -p_0 [1 + A(2\theta' - \sin 2\theta') - B(1 - \cos 2\theta')]; \quad (1-62)$$

$$\tau = -p_0 [-A(1 - \cos 2\theta') + B \sin 2\theta']; \quad (1-63)$$

$$\text{式中 } A = \frac{1}{2(\operatorname{tg} 2\beta - 2\beta)}; \quad B = A \operatorname{tg} 2\beta \quad (1-64)$$

楔顶上受集中力矩 M

$$F = \frac{M}{2} \frac{\sin 2\theta - 2\beta \cos 2\beta}{\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta}; \quad (1-65)$$

$$\sigma_r = -\frac{4M_0}{r^3} \frac{\sin \theta \cos \theta}{(\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta)}; \quad (1-66)$$

$$\sigma_{\theta} = 0; \quad (1-67)$$

$$\tau = \frac{M_0}{r^2} \frac{\cos 2\theta - \cos 2\beta}{\sin 2\beta - 2\beta \cos 2\beta}. \quad (1-68)$$

楔頂上受集中力 P ，平行分角綫

$$F = -P \frac{r\theta \sin \theta}{2\beta + \cos 2\beta}; \quad (1-69)$$

$$\sigma_r = -\frac{2P}{r} \frac{\cos \theta}{2\beta + \sin 2\beta}; \quad (1-70)$$

$$\sigma_{\theta} = 0; \quad (1-71)$$

$$\tau = 0. \quad (1-72)$$

楔頂上受集中力 V ，垂直分角綫，指向下游

$$F = V \frac{r\theta \cos \theta}{2\beta - \sin 2\beta}; \quad (1-73)$$

$$\sigma_r = -\frac{2V}{r} \frac{\sin \theta}{2\beta - \sin 2\beta}; \quad (1-74)$$

$$\tau = 0; \quad \sigma_{\theta} = 0. \quad (1-75)$$

楔形体受体积力 g 作用，其方向与分角綫成 α 角

$$F = \frac{gr^3}{12} \left[\frac{\cos \alpha}{\cos^2 \beta} (3\cos^2 \beta \cos^2 \theta - \cos^2 \theta) + \frac{\sin \alpha}{\sin^2 \beta} (3\sin^2 \beta \sin^2 \theta - \sin^2 \theta) \right]; \quad (1-76)$$

$$\sigma_r = \frac{gr}{2} \left[\frac{\cos \alpha \cos \theta}{\cos^2 \beta} (\cos^2 \beta - \sin^2 \theta) + \frac{\sin \alpha \sin \theta}{\sin^2 \beta} (\sin^2 \beta - \cos^2 \theta) - 2\cos(\theta - \alpha) \right]; \quad (1-77)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{gr}{2} \left[\frac{\cos \alpha \cos \theta}{\cos^2 \beta} (3\cos^2 \beta - \cos^2 \theta) + \frac{\sin \alpha \sin \theta}{\sin^2 \beta} (3\sin^2 \beta - \sin^2 \theta) - 2\cos(\theta - \alpha) \right]; \quad (1-78)$$

$$\tau = \frac{-gr}{2} \left[\frac{\cos \alpha \sin \theta}{\cos^2 \beta} (\sin^2 \beta - \sin^2 \theta) - \frac{\sin \alpha \cos \theta}{\sin^2 \beta} (\cos^2 \beta - \cos^2 \theta) \right]. \quad (1-79)$$

第三节 用疊加法計算实用断面

利用上节所导出的一些經典解答，並应用疊加原理和圣維南(St. Venant)原理，我們可以計算不少实用的重力坝問題。首先解釋一下疊加法的应用。图1-6a中坝上游水面並不齐頂，距离頂点为 h ，則可化为(b)(c)(d)三种情况之和，而最后一种情况近似上又可化为(e)来計算。这虽在理論上講並不绝对准确，但根据圣維南原理若 h 为值不大时，这种代換不会对离开坝頂略远处的应力产生任何显著影响。当然在 h 范围以內或附近处的应力，是不能用近似法計算的。与此相同，图1-7中示另外几种疊加法的应用。

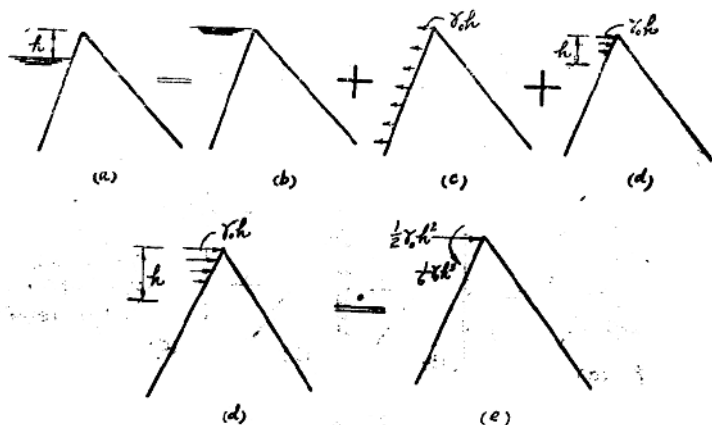


图 1-6

因此，一般的重力坝应力問題常可应用疊加法利用上节中无限楔体承受几种簡單荷载的解答而求出成果。下面我們举一个梯形断面坝的例子以供說明，这步驟是喀列尔金(Б.Г.Галеркин)院士建議的。

考虑图1-8中所示剖面，上游水面齐頂，离楔角交点为 h (楔体所受荷载亦見图)。其荷载可以分析为(b)(c)(d)三种，每一种情况的应力公式都見前述，因此我們可以直接写下应力公式如下：

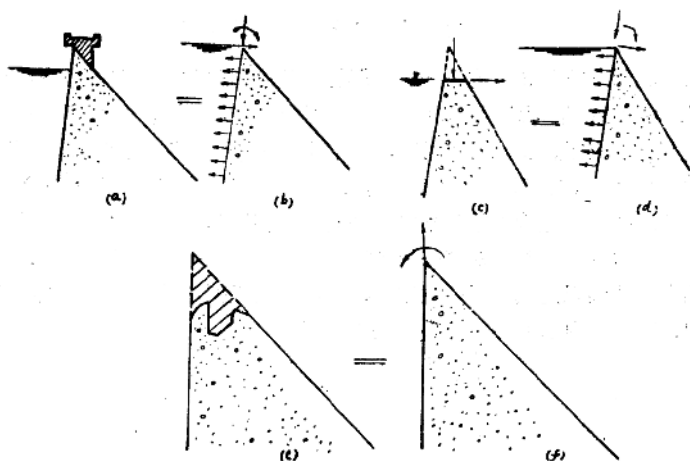


图 1-7

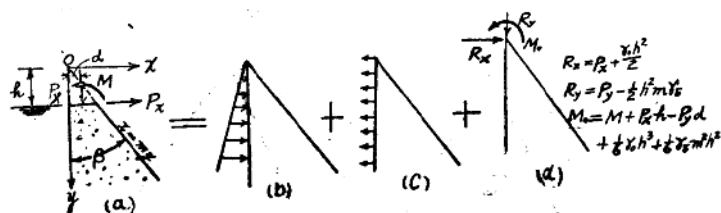


图 1-8

$$\begin{aligned} \sigma_x = & -\gamma_0 y - \frac{\gamma_0 h}{m - \beta} \left\{ -m + \beta - \arctg \frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right\} \\ & - \frac{2R_y}{\beta^2 - \sin^2 \beta} \left\{ \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} (\beta - \sin \beta \cos \beta) - \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \sin^2 \beta \right\} \\ & + \frac{2R_x}{\beta^2 - \sin^2 \beta} \left\{ \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \sin^2 \beta - \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} (\beta + \sin \beta \cos \beta) \right\} \\ & - \frac{2M_0}{\sin \beta - \beta \cos \beta} \left\{ \frac{x^2 (3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3} \sin \beta - \frac{xy (3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3} \cos \beta \right\} \end{aligned}$$