成人高等教育自学辅导丛书

复变函数自学指导

胡 林 主编

谭 鼐 翟连林
史天勤 张友极 编著

水利电力出版社

成人高等教育自学辅导丛书

复变函数自学指导

胡 林 主编

谭 鼐　　翟连林
史天勤　　张友极　编著

水利电力出版社

内 容 提 要

本书系"成人高等教育自学辅导丛书"之一《复变函数自学指导》.

本书共计六章，主要内容有：复数与复变函数，复变函数的导数和积分，级数理论，留数及其应用，保形映射等。各章附有小结，各节配有习题，书末附答案或提示.

本书可作理工、财经类电视大学、职工大学、业余大学、函授大学的教材或辅导书，也可作参加自学高考的自学读本。

成人高等教育自学辅导丛书
复变函数自学指导
胡林 主编
谭 澜 翟连林
史天勤 张友极 编著

水利电力出版社出版（北京三里河路6号）
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
昌平建华印刷厂印刷

787×1092毫米 32开本 7.625印张 168千字
1986年7月第一版 1986年7月北京第一次印刷
印数00001—17150册 定价：1.65元

统一书号：7143·6043

前　言

当前，在经济体制改革和新技术革命挑战的形势下，智力开发的重要性更加突出了。我们迫切需要有一支高水平的职工队伍，以加速实现技术现代化、管理现代化，提高经济效益。这就要求在普遍提高职工的政治、文化、技术、业务素质的同时，尽快从现有职工中培养造就大批的专业技术干部和管理干部，形成一支在数量上能基本满足要求，质量上能掌握现代科学技术和经营管理知识，专业配套的职工队伍，可以说，大力加强职工教育，培养各类人才，是摆在我们面前的一项十分重要而又急迫的任务。

这套"成人高等教育自学辅导丛书"就是根据当前加强职工教育的形势和需要而专门组织编写的。

"丛书"以"面向实际，面向生产、为提高职工队伍素质，提高经济效益服务"作为编写指导思想；内容紧密结合成人高等教育理工类（或财经类）部分课程的教学大纲和电视大学及一些函授大学、职工大学、业余大学的教材；在布局、选材、体例和编写形式上尽量适应成人自学的特点。所以，非常适用于理工、财经类电视大学、职工大学、业余大学学员作为学习辅导书，或函授大学作为函授教材；对于广大自学读者，则是帮助他们通过自学高等考试的一种自学读本。

为了切合读者的实际需要，提高学习效果，“丛书”中的每一册都包括基本概念，重点和难点解释、典型例题分析、总结或提示以及思考与练习等几部分内容，并配有适量的作业测验题（附答案）和电大试题选解。

这套丛书共包括十一门课程，十三册：

高等数学自学指导（上、下册）

线性规划自学指导

线性代数自学指导

概率论与数理统计自学指导

常微分方程自学指导

逻辑代数与BASIC语言自学指导

复变函数自学指导

微积分自学指导（财经类）

普通物理自学指导（上、下册）

普通化学自学指导

物理化学自学指导

本书系《复变函数自学指导》，全书共分六章。第一章介绍复数和复变函数；第二章引入了导数的概念及运算性质，讨论了解析函数；第三章介绍积分的概念及运算性质；第四章介绍级数理论；第五章介绍留数的概念和计算方法及其应用；第六章介绍保形映射。

本书的编写得到王湘浩教授的关怀与指导。程庆平、姚正安、宋述刚三位同志协助整理和配备习题。

参加这套丛书编写工作的都是有经验的高等学校教师或成人教育工作者，其中有些同志还讲授过电视大学的有关课程或担任过电大辅导课主讲教师。“丛书”融汇了他们多年的教学经验和心得体会，更鲜明地具有电视教学及自学、辅

导、函授多用的特色。在编写过程中，我们得到各课程的有关教授、专家的关怀和指导，有些同志直接参予了审阅、整理等工作，在此一并表示深切的谢意。

组织编写这类面向成人读者，自学、辅导、电教、函授多用的大专读本还是第一次，欢迎读者对“丛书”的内容、布局、结构、形式等提出宝贵意见，以帮助我们改进工作，提高“丛书”质量。

胡　林

1985年7月

序

这是一本难得的好教材，它对没有机会进大学或者在电大、函大、职大、夜大学习而缺乏辅导教师的数学爱好者及理工科学员特别适合。本书的编者一直从事数学基础课教学，具有丰富的教学经验，这本书充分反映了编者们这些宝贵的经验。

一般教材需要经过教师在课堂上的再创造才能很好地发挥作用，而本书则体现出教师讲课时的这种创造，使读者感到好象是在课堂上亲聆教师的讲授。

经验告诉我们，学生感到困难、深入不下去的主要原因是缺乏自学能力，不善于给自己提出问题，本书在这一方面也下了很大功夫。编者在展开教材内容的同时，引导读者去提出问题、探讨问题、解决问题，提供了一条怎样深入学习的途径。

本书也是很好的教学参考书，它不仅在内容上涉及面广，而且更重要的是提供了一种可取的教学方法，这对于教师，特别是刚从事教学工作的青年教师具有很好的借鉴作用。

由于本书切合学员的学习实际，虽然增加了一定篇幅，但并不显得繁琐。相反，在日益蓬勃发展的成人教育事业中，本书必将发挥积极的作用，为广大读者所欢迎。特代为作序。

王湘浩

1985．4．长春

---

*王湘浩教授系中国科学院学部委员。

目　　录

第一章　复数与复变函数

本章主要讨论复数的概念，定义复变量复值函数，并讨论它的极限及连续性.

§1.1　复数及其表示法

形如

$$z=x+iy \quad 或 \quad z=x+yi.$$

的数称为复数，其中x和y都是实数，$i=\sqrt{-1}$称为虚单位. x称为z的实部，用$\mathrm{Re}z$表示，y称为z的虚部，用$\mathrm{Im}z$表示，即

$$x=\mathrm{Re}z,\ y=\mathrm{Im}z.$$

复数$z_1=x_1+iy_1$与$z_2=x_2+iy_2$称为相等，是指它们的实部相等且虚部也相等，即

$$x_1+iy_1=x_2+iy_2 \Longleftrightarrow x_1=x_2 且 y_1=y_2.$$

复数$z=x+iy$在虚部$y=0$时，$z=x+i\cdot 0=x$，即实数是虚部为零的复数.

复数$z=x+iy$在实部$x=0$时，$z=0+iy=iy$. 我们把复数$z=yi$（$y\neq 0$）称为纯虚数. 因此，纯虚数是实部为零，而虚部不为零的复数.

两个复数，如果实部相同，虚部互为相反数，则称它们互为共轭复数. 复数z的共轭复数用$\bar{z}$表示，于是

$$\bar{z}=\overline{x+iy}=x-iy.$$

$\sqrt{x^2+y^2}$称为复数$z=x+iy$的模，记为$|z|$，即

$$|z|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

上面的基本概念都是我们在中学里学习过的，为了正确掌握它们，须注意以下几点：

（1）复数的实部是实数，虚部也是实数，而不是虚数．任何一个复数z均可表示为$z=\mathrm{Re}z+i\mathrm{Im}z$．

（2）复数没有大小关系，这是与实数的性质的显著区别．但是，两个复数的模（由于它们是实数）可以比较大小．

（3）实数和纯虚数都是复数，但复数并不就是实数和纯虚数组成的，还有既不是实数，也不是纯虚数的复数，如$2+3i$就是这样的复数．

我们把不是实数的复数统称为虚数．显然，虚数与复数是两个不同的概念，虚数与纯虚数也不同．因此，我们有以下关系：

$$\text{复数}\begin{cases}\text{实数}\\ \text{虚数}\begin{cases}\text{纯虚数}\\ \text{非纯虚数}\end{cases}\end{cases}$$

（4）复数z的模与它的共轭复数$\bar{z}$的模相等，即$|z|=|\bar{z}|$．事实上，设$z=x+iy$，则$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$；$\bar{z}=x-iy$，$|\bar{z}|=\sqrt{x^2+(-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=|z|$．

（5）实数的共轭复数是它本身，反之，如果一个复数与它的共轭复数相等，那末这个复数一定是实数．

由复数的定义，我们看出，一个复数是由一对有序实数

唯一确定的，例如，复数$1-2i$是由实数对$(1,-2)$唯一确定的，2是由$(2,0)$唯一确定的，$2i$可由实数对$(0,2)$唯一确定．我们在解析几何中曾经利用平面直角坐标系，将平面上的点与有序实数对之间建立一一对应关系．因此，我们自然想到复数与平面上的点也会有这种关系．

我们可以借助横坐标为x，纵坐标为y的点表示复数$z=x+iy$，这样表示复数的平面称为复平面或z平面，x轴称为实轴，y轴称为虚轴．

在复平面上，复数z的模$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$便是这个复数所表示的点到坐标原点的距离．

复平面与通常平面的意义不同，复平面上的点表示复数，而通常平面没有这种意义．此外，虽然在虚轴上的刻度仍然用实数表示（图1.1），但是它却表示以此实数为虚部的纯虚数．如虚轴上的一点A，刻度为1，它却代表i，而不是1．

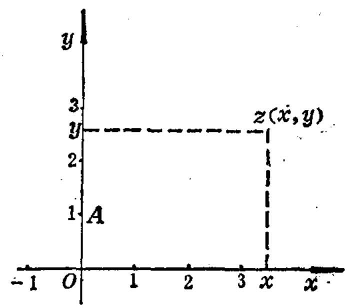

图 1.1

引进了复平面以后，复数z就有了直观的几何形象，即复数是复平面上的点．进而两个复数之间的关系就可归结为复平面上两点之间的关系；而且，今后我们不再将“数”和“点”加以区别．例如，我们可以说“点$1+i$”、“顶点为z_1、z_2、z_3的三角形”等等．

将复数通过复平面上的点来表示的方法称为复数的点表示法．

在图1·1中，我们还可以看到，点$z=x+iy$与从原点O到点z的向量$\overrightarrow{Oz}$是一一对应的. 原点对应于零向量，向量$\overrightarrow{Oz}$在实轴上的投影是x，在虚轴上的投影是y，z的模$|z|$就是向量$\overrightarrow{Oz}$的长度.

象这种用复平面上的向量表示复数的方法，称为复数的向量表示法.

解析几何中对于平面上的点可以用极坐标来描述. 同样，我们也可以用极坐标（r，θ）来表示复平面上的点.

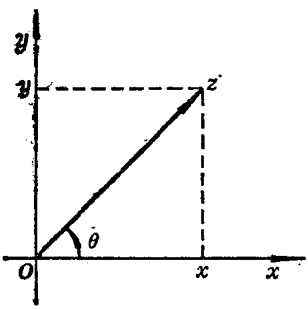

图 1.2

在图1.2中，Ox是极轴，θ是Ox轴的正向与$\overrightarrow{Oz}$的夹角. 复数$z=x+iy$可以用点z到原点的距离r以及角度θ来表示. 由于

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,$$

所以

$$z=x+iy=r\cos\theta+ir\sin\theta$$
$$=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

复数的这种表示方法，称为三角表示法.

必须注意，虽然一对实数（r，θ）可以确定唯一的复数，一个复数也有唯一的r，但却有无穷个θ（它们可以相差2π的整数倍），从而有无穷多对（r，θ）与它相对应. 事实上，如果$z=r(\cos\theta_0+i\sin\theta_0)$，那么对所有$\theta=\theta_0+2k\pi$（$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，……），均有$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$成立.

我们把复数z所对应的且满足$-\pi<\theta\leqslant\pi$的那个θ角称

为z的主幅角．记作$\arg z$，即

$$\theta=\arg z.$$

而把那些取值为$\arg z+2k\pi$（$k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$）的角统称为$z$的幅角，记作$\operatorname{Arg} z$。显然

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi \quad (k=0, \pm 1, \pm 2\cdots).$$

利用我们熟知的欧拉公式

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta},$$

复数的三角形式可以转化为指数形式：

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta},$$

这种把复数表示成指数形式的方法我们称为复数的指数表示法．

以上给出了复数的四种常用的表示法，对于点表示法与向量表示法，我们容易根据复数$z=x+iy$立即得到它在复平面上所表示的点和向量．而指数表示法和三角表示法均要求出r和θ的值．根据$r=\sqrt{x^2+y^2}$，很容易算出r的值，又由

$$x=r\cos\theta \quad 和 \quad y=r\sin\theta \tag{1.1}$$

即知

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},$$

从而得到θ的值：

$$\theta=\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+2k\pi$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

下面我们来求主幅角$\arg z$，因为

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\leqslant\frac{\pi}{2}$$

所以，主幅角取为$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$就不能表示$z$平面上第二、三象限的点．于是我们作如下讨论：

对于$z\neq 0$，

（1）z在第一或第四象限时，即 $x>0$ 时，取 $\arg z=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

（2）z在虚轴上时，如果$y>0$，那么取$\arg z=\frac{\pi}{2}$；如果$y<0$，取 $\arg z=-\frac{\pi}{2}$.

（3）z在第二象限时，即 $x<0$，$y\geqslant 0$时，显然，$\frac{\pi}{2}<\theta=\arg z\leqslant\pi$，从而$-\frac{\pi}{2}<\theta-\pi\leqslant 0$，而 $\operatorname{tg}(\theta-\pi)=-\operatorname{tg}(\pi-\theta)=\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$，注意到$\theta-\pi$在反正切的主值范围内，便知$\theta-\pi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$，故取$\arg z=\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

（4）z在第三象限时，即考虑$x<0$，$y<0$的情形．此时$-\pi<\theta=\arg z<-\frac{\pi}{2}$，从而$0<\theta+\pi<\frac{\pi}{2}$，而$\operatorname{tg}(\theta+\pi)=\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}$，$\theta+\pi$在反正切主值范围内，于是$\theta+\pi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$，故取$\arg z=-\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$.

综上得到：当$z\neq 0$时，

$$\arg z=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}，当x>0时\\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}，当x<0，y\geqslant 0时\\ -\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}，当x<0，y<0时\\ \frac{\pi}{2}，当x=0，y>0时\\ -\frac{\pi}{2}，当x=0，y<0时\end{cases}\qquad(1.2)$$

（1.2）式给出了主幅角θ的求法.

以下我们来看几个例子.

例1 将复数$z_1=2-2i$，$z_2=-1+\sqrt{3}\,i$表成三角形式与指数形式（其中幅角取主幅角）.

解：$r_1=|z_1|=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$，由（1.2）式知，

$$\theta_1=\arg z_1=\operatorname{arctg}\left(-\frac{2}{2}\right)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}.$$

于是

$$z_1=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=2\sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

又，$r_2=|z_2|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$，由（1.2)式知，

$$\theta_2=\arg z_2=\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right)=\pi+\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi.$$

于是

$$z_2=2\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)=2\,e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

例2 将$z_1=2i$，$z_2=3$，$z_3=-1$，$z_4=-2i$写成三角形式与指数形式.

解：注意到z_1，z_2，z_3，z_4是复平面上的特殊点，处于虚轴或实轴上，因此，它们的主幅角容易直接看出，而不必去查（1.2）式. 事实上，z_1位于虚轴上，并且在上半复平面，于是$\theta_1=\frac{\pi}{2}$；z_2在实轴上，并且在右半复平面，因此$\theta_2=0$；z_3在实轴上，并且在左半复平面，因此$\theta_3=\pi$；z_4在

虚轴上，并且在下半平面，于是$\theta_4=-\frac{\pi}{2}$. 至于这些复数的模是显然的，$r_1=2$，$r_2=3$，$r_3=1$，$r_4=2$.

由此得知，

$$z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{2}},$$

$$z_2=3\ (\cos 0+i\sin 0)=3e^{i0},$$

$$z_3=1\ (\cos\pi+i\sin\pi)=e^{i\pi},$$

$$z_4=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2e^{-i\frac{\pi}{2}}.$$

例3 已知$z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}$，$z_2=3e^{-i\frac{2}{3}\pi}$，试在复平面上将它们表示出来.

解法1： 如图1.3，将Ox轴绕原点O按逆时针方向旋转$\theta_1=\frac{\pi}{4}$，并截取$OA=2$，于是z_1表示为点A或向量$\overrightarrow{OA}$.

将Ox轴绕原点O按顺时针方向旋转$\theta_2=\frac{2}{3}\pi$，并截取$OB=3$，于是z_2表示点B或向量$\overrightarrow{OB}$.

解法2： 由于$z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$=2\cos\frac{\pi}{4}+i\ 2\sin\frac{\pi}{4}$$

$=\sqrt{2}+\sqrt{2}\ i$，故在图1.3中，取横坐标为$\sqrt{2}$，纵坐

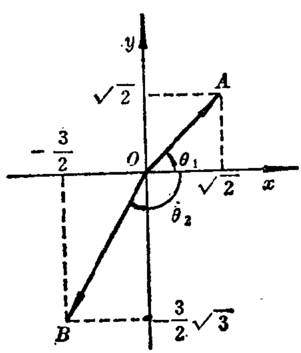

图 1.3