陀螺系統

Л. Р. 麦尔金著

國防工業出版社

陀螺系統

Д.Р. 麦尔金 著

郑元鹿 譯

內 容 介 紹

本書是按湯姆生与泰特指出的方向，系統地叙述陀螺系統的理論，同时也考虑到近几年来这方面的發展。在本書中作者力圖說明一般理論对具体陀螺装置的直接应用。本書主要是对陀螺系統的一般性質的研究与以簡化方程式代替运动方程式之可能性的探討。此外，为了闡明一般理論，作者从理論力学与陀螺仪实用理論中选取了許多有实际意义的例題。

本書可供从事理論力学与陀螺仪理論的科学研究人員及高等学校仪表專业与力学專业的高年級学生参考用。

苏联 Д.Р. Меркин 著 "Гироскопические системы"
(Государственное издательство технико-теоретической литературы 1956 年)

国防工业出版社

北京市書刊出版业营业許可証出字第 074 号
北京五三五工厂印刷　　新华書店發行

787×1092 1/25　　10 10/25 印張　　210 千字

1959 年 9 月第一版

1959 年 9 月第一次印刷

印数：0,001—1,050 册　定价：(11) 1.70 元

№ 2544

序

本書是按着湯姆生和泰德所指出的方向，系統地叙述陀螺系統的理論，同时也参考了近几年来有关的著作。書中我們力圖說明一般理論对于具体陀螺装置的直接应用。占書中主要地位的是对陀螺系統一般特性的研究和以簡化方程式代替运动方程式的可能性。为了闡明一般的定理和方法，我們从力学和陀螺仪实用理論的各个領域中选取了許多例題。可是在叙述这些例題时，除了少数例外，我們仔細地分析某一具体的陀螺仪表或装置；我們仅限于指出那些能够最好地闡明一般理論的情况。因此願意更多知道有关陀螺仪表的装置与理論的讀者应参看專門的書籍和文獻。

本書的讀者对象是在陀螺仪理論与理論力学領域中从事工作的人員。我們假定，讀者已經熟悉理論力学的一般知識和运动稳定性的初步理論。为了减少在閱讀本書时可能發生的困难，在附录中扼要地叙述了矩陣理論和运动稳定性理論的某些問題；如果不熟悉这些問題，第三章中基本定理的証明就不可能搞懂。为了同样的目的，当証明是基于熟知的、但不是与本書直接有关的結果时，我們就引証文献；此外，我們力圖指出一些著作，在这些著作中有我們所需要的問題的論述。

作者謹对路里叶（А.И. Лурье）与列托夫（А.М. Летов）表示深切的謝意，他們在閱讀手稿时曾提出很多宝貴的意見。

Д. Р. 麦尔金

列宁格勒，

一九五六年一月。

目　录

引 言

在研究具有一固定点的刚体的运动时，可以指出两个主要的研究方向。

第一是古典方向，这就是研究重刚体的运动方程式的可积分情况以及它們的几何解釋。这个研究方向盛行于二十世紀初叶以前，在这方面的最特出代表人物有：欧拉，拉格朗日，布安索和柯娃列夫斯卡娅。

随着陀螺技术的發展，理論研究的方向也已改变。古典刚体动力学問題已退居于次要地位，而讓位給另外的一些問題，这些問題是迅速發展着的陀螺仪表技术所提出来的。研究具体的、有时甚至是極其复杂的陀螺装置，它們在动基座上的工作情况，摩擦力的影响等問題已具有特殊重要的意义。有关第二个研究方向的最卓越代表人物有：傅科，克雷洛夫，舒列尔，布尔加柯夫①等。

湯姆生和泰德在"自然哲学"的第二版中（1879 年）还拟定了第三个研究方向，它的要点如下：含有陀螺仪的系統的运动方程式包含有速度的綫性項，这些綫性項的系数矩陣是反称的。如果将这些項解釋为力（它們通常叫做陀螺力或陀螺項），那末它們在系統的眞位移上所作的功等于零。这个性質可以取为陀螺力的一般定义，从而可以从它們的一般形式出發来考慮

---

① 有关这两个方向的参考資料非常丰富。例如，关于第一个方向的問題在大多数的理論力学教程和一些專門著作里都有或多或少的叙述，在这些書籍中我們特别指出，苏士洛夫(43)、罗节(37)、戈鲁别夫(8)、克萊因与索莫菲尔德(53)和麦克米倫(25)等人的著作。有关第二个方向（实用方向）的著作中，我們要指出，克雷洛夫与克魯特柯夫(16)、布尔加柯夫(2)、格朗美尔(10)等人的著作（格朗美尔一書的上册是叙述刚体运动的一般理論）。

具有陀螺力的运动方程式。

問題的这样一般提法之所以有好处，是有好几方面原因的，現在分述于下：

1. 在上述意义下的陀螺力不仅在含有陀螺仪的系統中会遇到，而且在不含陀螺仪的各种力学的和电学的系統中也会遇到。因此在不同性質的系統之間可以作出更深入一步的比拟。

2. 具有陀螺力的系統的一般理論使我們有可能以完全新的观点来理解有关具体陀螺装置的熟知事实，而且不是彼此孤立地，而是在一般的相互关系中来研究它們。

3. 在陀螺仪的实用理論中有許多問题，它們的解必須从一般理論求出。現在我們举一些例子来說明。

a) 含有陀螺仪的質系的运动，大家知道，是决定于二阶的非綫性微分方程式的。大家也知道，在某些情况下，把这些方程式簡化以后，也就是抛弃含二阶导数和含两个一阶导数之乘积的項以后，就可以得出实际上可用的解。可是在許多别的情况下，这种簡化可以导致完全不可用的和不容許的結果。例如，陀螺罗盘的运动微分方程式可以允許作这种的簡化，而且簡化方程式的解以很高的精确度描写出它的实际运动的特性。而具有二自由度的傅科陀螺仪虽是近代陀螺罗盘的雛型，但是它的运动方程式却不許可用这种簡化方法。

我們来看第二个例子。在研究具有徑向修正的陀螺垂直仪时，可以导出下列运动方程式：

$$\ddot{\alpha}+N\dot{\beta}+k\beta=0, \qquad \ddot{\beta}-N\dot{\alpha}-k\alpha=0,$$

式中α和β是确定陀螺仪軸位置的角度，而N和k是正的常数。从这个方程組可以得出簡化方程式

$$N\dot{\beta}+k\beta=0, \qquad N\dot{\alpha}+k\alpha=0。$$

这些方程式的解与原始方程組的解毫无共同之处，因原始方程組与簡化方程式不同，它是不穩定的。

б） 大家知道，高速轉动的三自由度自由陀螺仪可以在空間保持其軸方向不变。大家也知道，如果把这种陀螺仪安装在卡尔丹悬架上，那末在陀螺仪軸与外环軸相重合时的位置是不稳定的。这时会發生这样的問題：自由陀螺仪在空間保持其軸方向不变的性質是否是只有它才有的特性，或且是否存在其它的系統，它們也具有能使其初始位置稳定的性質。最后，如果有这些系統，那末还必須指出，可以用来确定不稳定位置的判别条件。

в） 在近代技术中所考虑的具体系統的运动，一般地都不是保守系的运动。因此令人感到極大兴趣的問題，是把湯姆生和泰德的一般方法也推广到非保守系上去，并定出它們的稳定性的判别法和可能轉化为簡化方程式的准則，最后再研討运动的性質。

4. 最后，我們指出下列經典的問題，这問題很可能具有实际意义。大家知道，在某些情况下我們可以得到定常的运动，而所謂定常运动就是：所有循环坐标保持其速度不变，而定位坐标則保持等于其初始值。著名的定常运动稳定性的判别法是屬于劳斯的。然而为了获得定常运动，就必須滿足一系列的条件，这些条件是从这种运动的定义直接得出来的；而实际上在一般情况下要滿足它們是十分困难的。此外，大家都知道，如果对称重剛体的自轉角速度很大，而且其重心位于对称軸上，那末在不破坏陀螺仪自轉角速度之优势的初始条件下，我們可以得到实际上的定常运动（伪规則进动）。自然会提出并解决一般形式的問題如下：是否可以不借助于很难滿足的初始条件，而仅借助于陀螺仪来获得定常运动。

以上所列举的以及一些其它的問題确定了这本書的全部內容。

第一章

陀螺力

§1 陀螺力的一般定义

所謂陀螺力是这样的一些力，它們在系統①的任何无穷小眞位移上所作的功之和等于零（湯姆生和泰德的定义）。

首先应注意，陀螺力可以是作用于系上的眞正的力，也可以仅仅是运动方程式中的某些項当作力来看待（例如，科里奥利慣性力）。因此，用“陀螺力”一詞时，必須記住它的条件性。正因为这个原故，陀螺力也常叫做陀螺項（这两个名詞我們将同时采用）。

現在应用这个定义于某一系統上，这一系統的位置由m个广义坐标q_1，q_2，……，q_m来确定。假定，运动方程式可以写成下列形式：

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T_2}{\partial q_k}=Q_k+\Gamma_k, \qquad (1.1)$$

式中T_2是速度$\dot{q}_k$（$k=1$，……，$s\leqslant m$）的恒正二次型，而Q_k和Γ_k是坐标q_j，速度$\dot{q}_j$（$j=1,\cdots\cdots$，$s\leqslant m$）和时間t的某些函数。

显然，二次型T_2可以解釋为某一系統的动能，而函数Q_k和Γ_k可解釋为广义力。如果力Γ_k滿足下列条件：

$$\Gamma_1 dq_1+\Gamma_2 dq_2+\cdots\cdots+\Gamma_s dq_s=0, \qquad (1.2)$$

也就是說，它們在系的任何无穷小眞位移dq_1，……，dq_s上作的功等于零，那么按照定义，这些力就叫作陀螺力。

---

① 指一群質点或物体所組成的力学系統。在以下的譯文中有时簡称为“系”。——譯者

用 dt 除等式 1.2，我們得到：

$$\Gamma_1\dot{q}_1+\Gamma_2\dot{q}_2+\cdots\cdots+\Gamma_s\dot{q}_s=0\text{。}\tag{1.3}$$

从这里可以直接得出，陀螺力必定取决于速度 $\dot{q}_j$。

設某些力 Γ_k 是速度 $\dot{q}_j$ 的綫性函数：

$$\Gamma_k=g_{k1}\dot{q}_1+g_{k2}\dot{q}_2+\cdots\cdots+g_{ks}\dot{q}_s=\sum_{j=1}^{s}g_{kj}\dot{q}_j,\tag{1.4}$$

式中系数 g_{kj} 取决于坐标 q_1，q_2，……，q_s 和时間 t。我們来研究，力 1.4 是陀螺力时所必須滿足的条件。为此把这些力的值代入等式 1.3 的左边，得：

$$\sum_{k=1}^{s}\Gamma_k\dot{q}_k=\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}g_{kj}\dot{q}_j\dot{q}_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=1}^{s}(g_{kj}+g_{jk})\dot{q}_j\dot{q}_k\text{。}\tag{1.5}$$

由此可知，如果系数 g_{kj} 的矩陣

$$\|g_{kj}\|=\begin{Vmatrix}g_{11}&\cdots&g_{1s}\\ \cdot&\cdot\cdot\cdot&\cdot\\ \cdot&\cdot\cdot\cdot&\cdot\\ g_{s1}&\cdots&g_{ss}\end{Vmatrix}$$

是反称矩陣，也就是如果

$$g_{kj}=-g_{jk},\quad g_{kk}=0,$$

那末总和 1.5 将恒等于零，从而力 1.4 是陀螺力。

以后，矩陣 $\|g_{kj}\|$ 的行列式

$$G=\begin{vmatrix}0&g_{12}&\cdots&g_{1s}\\ g_{21}&0&\cdots&g_{2s}\\ \cdot&\cdot&\cdots&\cdot\\ g_{s1}&g_{s2}&\cdots&0\end{vmatrix}\quad(g_{kj}=-g_{jk})$$

将具有很重要的意义。

可以回想一下，奇阶反称行列式恒等于零，而偶阶反称行

列式等于它的元素的有理整函数之平方[6]①。

这样一来，具有实数元素的反称行列式永远不是负的。

由直接計算很容易得到：

$$G_2=\begin{vmatrix}0 & g_{12}\\ g_{21} & 0\end{vmatrix}=g_{12}^2,$$

$$G_4=\begin{vmatrix}0 & g_{12} & g_{13} & g_{14}\\ g_{21} & 0 & g_{23} & g_{24}\\ g_{31} & g_{32} & 0 & g_{34}\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & 0\end{vmatrix}=(g_{12}g_{34}-g_{13}g_{24}+g_{14}g_{23})^2。\qquad(1.6)$$

我們来考慮几个例子。

例 1　陀螺仪运动方程式。假定，剛体有一固定点 O，对該点的慣性橢球是一个旋轉橢球体。动力对称軸我們将称之为陀螺仪軸，这个軸的位置可以由單位向徑 $\bar{r}$ 完全确定（圖 1）。很明显，这向徑同时也确定赤道平面（通过物体的固定点而与陀螺仪軸相垂直的平面）的位置。

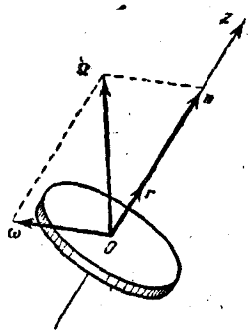

圖　1

将陀螺仪的轉动角速度向量 $\bar{\Omega}$ 分解为軸向分量 $\bar{n}$ 与赤道分量 $\bar{\omega}$。于是

$$\bar{\Omega}=\bar{\omega}+n\bar{r}\qquad(1.7)$$

对定点 O 的慣性橢球是旋轉橢球体，因此对所有位于赤道平面內并通过定点 O 的軸，物体的慣性矩彼此相等。因此陀螺仪的动量矩向量 $\bar{K}$ 等于

$$\bar{K}=A\bar{\omega}+Cn\,\bar{r},\qquad(1.8)$$

式中 A是陀螺仪的赤道慣性矩，而 C 是軸慣性矩。

以 $\bar{L}$ 表示作用于物体上的諸外力对定点 O 的主矩。于是，根据动量矩定律，我們有：

---

① [6] 系原書之参考文献序号，为节約紙張起見，中譯本将参考文献删掉，讀者如要参考，請查原書。——国防工业出版社編輯部注

$$\frac{d\bar{K}}{dt}=\bar{L}, \tag{1.9}$$

或，利用公式 1.8，

$$A\frac{d\bar{\omega}}{dt}+C\frac{d\bar{n}}{dt}\bar{r}+Cn\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{L}。 \tag{1.10}$$

不难看出，这个等式左边的第一项和第三项向量位于赤道平面內。对于后者可以由下述理由推知：單位向量的导数与原向量本身垂直。为了証明第一项所确定的向量位于赤道平面內，我們利用欧拉公式

$$\bar{v}=\bar{\Omega}\times\bar{r},$$

式中 $\bar{v}$ 是單位向量 $\bar{r}$ 端点的速度向量。应用公式（1.7），我們得到：

$$\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v}=\bar{\Omega}\times\bar{r}=(\bar{\omega}+n\bar{r})\times\bar{r}=\bar{\omega}\times\bar{r}\ (因\bar{r}\times\bar{r}=0)。 \tag{1.11}$$

用向量 $\bar{r}$ 从左边与上式作向量积并展开双重向量积：

$$\bar{r}\times\bar{v}=\bar{r}\times(\bar{\omega}\times\bar{r})=\bar{\omega}(\bar{r}\cdot\bar{r})-\bar{r}(\bar{\omega}\cdot\bar{r})=\bar{\omega}$$

（因为 $\bar{r}\cdot\bar{r}=1$；而由于 $\bar{\omega}\perp\bar{r}$，$\bar{\omega}\cdot\bar{r}=0$）。将上式对 t 微分，得

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\frac{d\bar{r}}{dt}\times\bar{v}+\bar{r}\times\frac{d\bar{v}}{dt};$$

或，認定 $\frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{v}$，而 $\bar{v}\times\bar{v}=0$，得

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{r}\times\frac{d\bar{v}}{dt}。$$

由此可見，向量 $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ 垂直于向量 $\bar{r}$，亦即位于赤道平面內。

将向量 $\bar{L}$ 分解为軸向分量与赤道分量：

$$\bar{L}=\bar{L}_z\bar{r}+\bar{L}_q。$$

如果把这一等式連同公式（1.11）代入方程式 1.10 中，那末方程式 1.10 就可以分解成两个式子：

$$A\frac{d\bar{\omega}}{dt}+Cn\bar{\omega}\times\bar{r}=\bar{L}_q, \tag{1.12}$$

$$C\frac{dn}{dt}=L_z, \tag{1.13}$$

其中第一个方程式确定陀螺仪軸的运动，而第二个方程式确定陀螺仪轉动角速度的軸向分量的变化①。

将方程式 1.12 改写成下列形式：

$$A\frac{d\bar{\omega}}{dt}=\bar{L}_a+Cn\ \bar{r}\times\bar{\omega}。$$

这一方程式可以約定地表述如下：陀螺仪軸的运动如同一个質点的运动，这一質点具有“質量”A和“速度”$\bar{\omega}$，而且作用在这質点上除了外“力”$\bar{L}_a$ 以外，还有附加“力”$\bar{\Gamma}=Cn\ \bar{r}\times\bar{\omega}$。

显然，“力”$\bar{\Gamma}$ 是陀螺力，因为它在无穷小位移 $\bar{\omega}dt$ 上的元功

$$\bar{\Gamma}\bullet\bar{\omega}\,dt=Cn(\bar{r}\times\bar{\omega})\bullet\bar{\omega}\,dt$$

恒等于零（按混合向量积中含有二相同向量 $\bar{\omega}$ 的性質）。

陀螺力 $Cn\ \bar{r}\times\bar{\omega}$（它的正确名称应是陀螺力矩）位于赤道平面內（圖 2），它的大小等于 $Cn\ \omega$。H. E. 茹科夫斯基[12] 曾經指出：陀螺力矩 $Cn\ \bar{r}\times\bar{\omega}$ 就是科里奥利惯性力的主矩，而且可以用初等的推理論証。

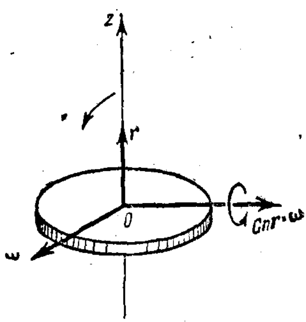

圖 2

大家知道，陀螺力矩是陀螺仪一系列重要性質的产生原因，这些性質使陀螺仪在技术上获得广泛的应用。我們認为，急轉陀螺仪的一些基本性質已为讀者所熟悉，因此不准备在这里多講了（以广义坐标表示的陀螺仪运动方程式将在§2中給出）。

例 2 在不变磁場中电子的运动。設以 m 表示电子的質量，e 表示它的电荷，$\bar{H}$ 表示磁場强度，c 表示电动力学常数（$c=3\times10^{10}$ 厘米/秒），則电子在不变磁場（$\bar{H}=$ 常数）中的运动方程式是

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{e}{c}\bar{v}\times\bar{H}, \tag{1.14}$$

式中 $\bar{v}$ 是电子的速度向量[44]。

---

① Ю. А. 克魯特科夫[16] 曾極其詳尽地研究了用向量形式敘述的陀螺仪理論。

从磁場 $\bar{H}$ 这方面作用于电子上的力 $\frac{e}{c}\bar{v}\times\bar{H}$ 是陀螺力：它在无穷小位移 $d\bar{r}$ 上所作的功 δA 恒等于零。实际上，

$$\delta A=\frac{e}{c}(\bar{v}\times\bar{H})\cdot d\bar{r}=\frac{e}{c}(\bar{v}\times\bar{H})\cdot\bar{v}\,dt=0.$$

如果取 z 軸的方向与向量 $\bar{H}$ 平行，那末 $\bar{H}$ 在固定直角坐标軸 x，y 和 z 上的投影是 0，0，H，而向量 $\bar{v}$ 的投影是 $\dot{x}$，$\dot{y}$ 和 $\dot{z}$，其中 x，y 和 z 是电子的坐标。

方程式 1.14 現在可以写成：

$$m\frac{d\bar{v}}{dt}=\frac{e}{c}\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\\ 0 & 0 & H\end{vmatrix},$$

或写成坐标軸上的投影式：

$$\left.\begin{aligned}m\ddot{x}&=\frac{e}{c}H\dot{y},\\ m\ddot{y}&=-\frac{e}{c}H\dot{x},\\ m\ddot{z}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1.15)$$

头两个方程式与第三方程式无关，因此它們可以單独地拿出来考虑。陀螺力

$$\Gamma_1=\frac{e}{c}H\dot{y},\qquad \Gamma_2=-\frac{e}{c}H\dot{x}$$

綫性地取决于速度 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，而它們的系数矩陣是反称矩陣：

$$\begin{Vmatrix}0 & \frac{e}{c}H\\ -\frac{e}{c}H & 0\end{Vmatrix}.$$

如果我們把三个方程式放在一起考虑，那末陀螺系数的矩陣是：

$$\left\|\begin{matrix} 0 & -\frac{e}{c}H & 0 \\ -\frac{e}{c}H & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|。$$

在第三章里我們还要回过来考虑方程式 1.15。

例 3 点的相对运动。大家知道，在相对运动中質点的基本运动方程式具有下列形状：

$$m\,\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{J}_e + \bar{J}_c, \tag{1.16}$$

式中：m 是点的質量；

$\bar{a}_r$ 是点的相对加速度向量；

$\bar{F}$ 是作用于点上的力；

$\bar{J}_c = -m\,\bar{a}_e$ 是牵連慣性力（$\bar{a}_e$ 是点的牵連加速度向量）；

$\bar{J}_c = -m\,\bar{a}_c$ 是科里奥利慣性力（$\bar{a}_c$ 是科里奥利加速度或旋轉加速度）。

如果以 $\bar{v}_r$ 表示点的相对加速度向量，以 $\bar{\omega}$ 表示动参考坐标系的轉动角速度向量（牵連角速度向量），那末

$$\bar{a}_c = 2\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r,$$

因而科里奥利慣性力等于

$$J_c = -2m\,\bar{\omega} \times \bar{v}_r = 2m\,\bar{v}_r \times \bar{\omega}。 \tag{1.17}$$

这个力是陀螺力，因为它在无穷小相对位移 $\bar{v}_r\,dt$ 上作的功恒等于零。

如果 x，y，z 是点在相对坐标系中的直角坐标量，那末

$$\bar{J}_c = 2m\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}。$$

以 Γ_1，Γ_2，Γ_3 表示科里奥利慣性力在直角坐标系諸軸 x，y 和 z 上的投影，則

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= 2m\omega_z\dot{y} - 2m\,\omega_y\dot{z}, \\ \Gamma_2 &= -2m\,\omega_z\dot{x} + 2m\,\omega_x\dot{z}, \\ \Gamma_3 &= 2m\,\omega_y\dot{x} - 2m\,\omega_x\dot{y}。 \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

陀螺力 Γ_1, Γ_2 和 Γ_3 綫性地取决于速度 $\dot{x}$, $\dot{y}$ 和 $\dot{z}$, 而它們的系数矩陣

$$\begin{Vmatrix} 0 & 2m\omega_z & -2m\omega_y \\ -2m\omega_z & 0 & 2m\omega_x \\ 2m\omega_y & -2m\omega_x & 0 \end{Vmatrix}$$

是反称矩陣。

重自由質点在地球表面附近的运动是所考虑例子中的一种特殊情况。如果取 x 軸方向水平朝东, y 軸方向水平朝北, 而 z 軸方向沿鉛垂綫朝上（圖 3）, 那末地球自轉角速度向量 $\bar{\omega}$ 在坐标軸 x, y 和 z 上的投影是:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega\cos\varphi, \quad \omega_z = \omega\sin\varphi,$$

其中 φ 是地理緯度。

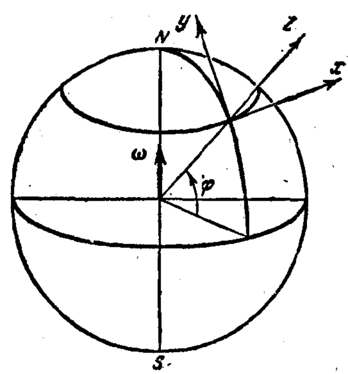

圖 3

在地球表面附近, 我們不能把引力和牵連慣性力①分开。这两个力的几何和确定了重力 $m\bar{g}$, 它的方向沿鉛垂綫而朝下。因此在所考虑的情形中

$$(\bar{F}+\bar{J}_e)_x = 0, \quad (\bar{F}+\bar{J}_e)_y = 0, \quad (\bar{F}+\bar{J}_e)_z = -mg.$$

将上式代入公式 1.16 中, 并考虑到公式 1.18, 就可以得到重自由質点在地球表面附近的运动方程式（在方程式中已約去質量 m）②:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= 2\omega\dot{y}\sin\varphi - 2\omega\dot{z}\cos\varphi, \\ \ddot{y} &= -2\omega\dot{x}\sin\varphi, \\ \ddot{z} &= -g + 2\omega\dot{x}\cos\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (1.19)$$

質点在地球表面附近运动时, 陀螺力 Γ_1, Γ_2 和 Γ_3 是（对質量等于 1 的点来說）:

---

① 按原文直譯应为"牵連加速度的慣性力"。——譯者

② 这些方程式可以在任何足夠完整的理論力学教程中找到。