

高等学校教材

结构力学

下册

(第四版)

湖南大学结构力学教研室编

杨蒹康 李家宝 主编

杨蒹康 李家宝 洪范文 主订



高等教育出版社

高等学校教材

结 构 力 学

下 册

(第四版)

湖南大学结构力学教研室 编

杨萑康 李家宝 主编

杨萑康 李家宝 洪范文 主订

高等教育出版社

·北京·

(京)112号

内 容 提 要

本书是在第三版的基础上,根据1995年5月国家教委审订的高等学校工科本科“结构力学课程教学基本要求”修订的。本书内容选材适当,叙述深入浅出,注重联系实际,努力适应当前教学改革的要求。

全书共十七章,分上、下两册出版。上册共十二章,内容包括:绪论,平面体系的几何组成分析,静定结构的内力计算,虚功原理和结构位移计算,力法,位移法,渐近法,近似法,影响线及其应用,矩阵位移法。下册共五章,内容包括:能量原理,结构弹性稳定计算,结构动力计算,结构极限荷载,结构计算简图和简化分析。每章后面附有思考题和习题及大部分习题答案。

本版采用了GB3100~3102—93《量和单位》中规定的有关符号。

本书可作为高等学校土建、水利和道桥类专业及成人教育、自学考试的教材,也可供有关专业工程技术人员参考。

责任编辑 余美茵

图书在版编目(CIP)数据

结构力学 下册/杨茆康,李家宝主编;洪范文等编-4版.
-北京:高等教育出版社,1998
高等学校教材
ISBN 7-04-006663-7

I. 结… II. ①杨…②李…③洪… III. 结构力学-高等学校-教材 IV. 0342

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第02832号

*

高等教育出版社出版
北京沙滩后街55号

邮政编码:100009 传真:64014048 电话:64054588

新华书店总店北京发行所发行

中国科学院印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/16 印张 12.5 字数 310 000

1958年5月第1版

1998年9月第4版 1998年9月第1次印刷

印数 0 001—8 185

定价 10.50元

凡购买高等教育出版社的图书,如有缺页、倒页、脱页等质量问题者,请与当地图书销售部门联系调换。

版权所有,不得翻印

目 录

<p>第十三章 能量原理 1</p> <p> § 13-1 概述 1</p> <p> § 13-2 杆件应变能和应变余能 1</p> <p> § 13-3 势能原理 3</p> <p> § 13-4 余能原理 12</p> <p> 思考题 17</p> <p> 习题 17</p> <p>第十四章 结构弹性稳定计算 19</p> <p> § 14-1 概述 19</p> <p> § 14-2 用静力法确定等截面压杆的 临界荷载 22</p> <p> § 14-3 用静力法确定变截面压杆的 临界荷载 26</p> <p> § 14-4 用能量法确定临界荷载 29</p> <p> § 14-5 等截面直杆稳定 42</p> <p> *§ 14-6 偏心受压直杆稳定 48</p> <p> *§ 14-7 剪力对临界荷载的影响 49</p> <p> *§ 14-8 组合压杆稳定 51</p> <p> § 14-9 刚架稳定 56</p> <p> *§ 14-10 用直接刚度法计算刚架稳定 63</p> <p> 思考题 70</p> <p> 习题 71</p> <p>第十五章 结构动力计算 76</p> <p> § 15-1 概述 76</p> <p> § 15-2 单自由度体系的自由振动 80</p> <p> § 15-3 单自由度体系的受迫振动 85</p> <p> § 15-4 阻尼对振动的影响 92</p> <p> § 15-5 两个自由度体系的自由振动 99</p>	<p> § 15-6 两个自由度体系在简谐荷载下的 受迫振动 105</p> <p> *§ 15-7 一般多自由度体系的 自由振动 108</p> <p> *§ 15-8 振型分解法 121</p> <p> *§ 15-9 无限自由度体系的自由振动 130</p> <p> § 15-10 计算频率的近似方法 133</p> <p> 思考题 138</p> <p> 习题 138</p> <p>第十六章 结构极限荷载 145</p> <p> § 16-1 概述 145</p> <p> § 16-2 静定梁弹塑性分析 147</p> <p> § 16-3 用极限平衡法求超静定梁的 极限荷载 151</p> <p> § 16-4 比例加载时判定极限荷载的 一般定理 156</p> <p> *§ 16-5 刚架的极限荷载 160</p> <p> 思考题 167</p> <p> 习题 168</p> <p>第十七章 结构计算简图和简化分析 172</p> <p> § 17-1 概述 172</p> <p> § 17-2 杆件、支座和结点的简化 172</p> <p> § 17-3 结构体系简化 178</p> <p> § 17-4 结构的简化分析 179</p> <p>附录 函数 $\xi_1(u)$、$\xi_2(u)$、$\xi_3(u)$、 $\eta_1(u)$、$\eta_2(u)$、$\eta_3(u)$ 的数值 187</p> <p>主要参考书目 194</p>
--	--

第十三章 能量原理

§ 13-1 概 述

对于变形体的力学分析,都需用到平衡、几何和物理三方面的条件。前面各章已经讨论了直接从这些条件建立起基本方程,并由此求得结构的内力和位移。在静力分析中,这种解题方法称为静力法或直接法。与此相等价的还有另一种形式的计算方法——虚功法和能量法,本书第六章已经简要地介绍过虚功方程的应用,本章将扼要介绍基于能量原理的解题方法。

在能量法中,有两个重要的基本原理——势能原理和余能原理。基于势能原理的解题方法与前述位移法相对应,它不直接用物理条件和平衡条件去建立位移法的基本方程,而是改用与之等价的势能驻值条件;基于余能原理的解题方法则与力法相对应,它不直接用物理条件和变形谐调条件去建立力法基本方程,而是改用与之等价的余能驻值条件。本章的主要目的是让读者了解,静力法与能量法是相互等价的,只是形式不同而已;其次还将介绍在工程中广为应用的瑞利-里兹法,它是基于能量原理建立的一种近似方法。

§ 13-2 杆件应变能和应变余能

一、应变能密度和应变余能密度

弹性体在外力作用下将产生变形,此时,外力做功所消耗的能量将以应变能的形式贮藏于弹性体中。下面,先以简单拉伸情况为例,藉以引出应变能和应变余能的概念。图 13-1 表示简单拉伸受力状态下的应力-应变曲线,图中曲线与 ϵ 轴所围面积 OAB 为单位体积上的应力在变形过程中所作的功,称为应变能密度,以 v_{IN} 表示,则有

$$v_{IN} = \int_0^{\epsilon} \sigma d\epsilon \quad (a)$$

对于矩形 $OBAC$ 的所余部分 OAC ,我们定义它为单位体积上的应变余能,称为应变余能密度,以 v_{dIN} 表示,则有

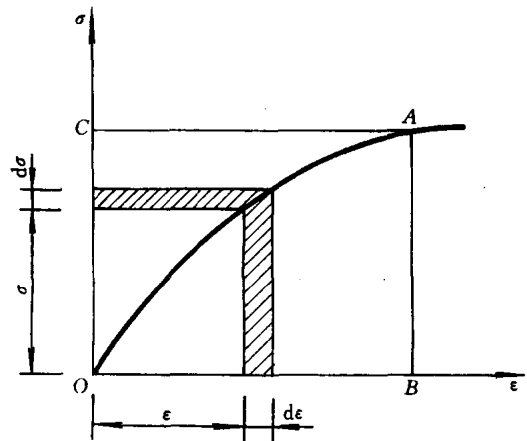


图 13-1

$$v_{dN} = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma \quad (b)$$

当应力与应变为线性关系,即服从胡克定律 $\sigma = E\epsilon$ 时,由式(a)、(b)可得

$$v_{IN} = \int_0^\epsilon \sigma d\epsilon = \int_0^\epsilon E\epsilon d\epsilon = \frac{1}{2} E\epsilon^2$$

$$v_{dN} = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma = \int_0^\sigma \frac{1}{E} \sigma d\sigma = \frac{1}{2E} \sigma^2$$

因 $\sigma = E\epsilon$,所以对线弹性材料而言,有 $v_{IN} = v_{dN}$ 。

二、杆件的应变能和应变余能公式

在杆件结构中,杆件的应变能用杆件截面上的内力 F_N 、 F_Q 、 M 在变形过程中所作的功来表示,单位杆长的应变能称为杆件的应变能密度。

当杆件为纯拉伸、纯剪切、纯弯曲时,其应变能密度分别为

$$v_{IN} = \int_0^\epsilon F_N d\epsilon, \quad v_{IQ} = \int_0^\gamma F_Q d\gamma, \quad v_{IM} = \int_0^\kappa M d\kappa$$

于是,杆件的应变能密度为

$$v_1 = \int_0^\epsilon F_N d\epsilon + \int_0^\gamma F_Q d\gamma + \int_0^\kappa M d\kappa \quad (13-1)$$

对于线弹性材料,上式可表为

$$v_1 = \frac{1}{2} EA\epsilon^2 + \frac{1}{2} \frac{GA}{k} \gamma^2 + \frac{1}{2} EI\kappa^2 \quad (13-2)$$

将式(13-2)分别对 ϵ 、 γ 、 κ 求导可得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial \epsilon} &= EA\epsilon = F_N \\ \frac{\partial v_1}{\partial \gamma} &= \frac{GA}{k} \gamma = F_Q \\ \frac{\partial v_1}{\partial \kappa} &= EI\kappa = M \end{aligned} \right\} \quad (13-3)$$

公式(13-2)是用应变表示的线弹性杆件的应变能密度。由式(13-3)可见,反映内力与应变之间关系的物理方程,可藉应变能密度 v_1 对应变的偏导数来表示。

利用第六章的图 6-13,可推得应变与位移应满足的几何方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \epsilon \\ \theta &= \frac{dv}{dx} = \gamma - \varphi \\ \frac{d\varphi}{dx} &= \kappa \end{aligned} \right\}$$

则式(13-2)可用位移表示为

$$v_1 = \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{GA}{k} \left(\frac{dv}{dx} + \varphi \right)^2 + \frac{1}{2} EI \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \quad (13-4)$$

一根杆件的应变能公式则为

$$V = \int v_1 dx = \int \frac{1}{2} \left[EA\epsilon^2 + \frac{GA}{k}\gamma^2 + EI\kappa^2 \right] dx \quad (13-5)$$

或

$$V = \int \frac{1}{2} \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{GA}{k} \left(\frac{dv}{dx} + \varphi \right)^2 + EI \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (13-6)$$

当忽略剪切变形($\gamma=0$)时, 因有 $\varphi = -\frac{dv}{dx}$, 所以应变能可表为

$$V = \int \frac{1}{2} \left[EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right] dx \quad (13-7)$$

与前述相仿, 当杆件为纯拉伸、纯剪切、纯弯曲时, 单位杆长的应变余能如下:

$$v_{clN} = \int_0^{F_N} \epsilon dF_N, \quad v_{clQ} = \int_0^{F_Q} \gamma dF_Q, \quad v_{clM} = \int_0^M \kappa dM$$

于是, 杆件的应变余能密度为

$$v_{cl} = \int_0^{F_N} \epsilon dF_N + \int_0^{F_Q} \gamma dF_Q + \int_0^M \kappa dM$$

对于线弹性材料的杆件, 由上式可得

$$v_{cl} = \frac{1}{2EA} F_N^2 + \frac{k}{2GA} F_Q^2 + \frac{1}{2EI} M^2 \quad (13-8)$$

将上式分别对 F_N 、 F_Q 、 M 求导, 得

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_{cl}}{\partial F_N} &= \frac{F_N}{EA} = \epsilon \\ \frac{\partial v_{cl}}{\partial F_Q} &= \frac{kF_Q}{GA} = \gamma \\ \frac{\partial v_{cl}}{\partial M} &= \frac{M}{EI} = \kappa \end{aligned} \right\} \quad (13-9)$$

式(13-8)是用内力表示的线弹性杆件的应变余能密度。由式(13-9)可见, 反映应变与内力之间关系的物理方程, 可藉应变余能密度 v_{cl} 对内力的偏导数来表示。

一根杆件的应变余能公式为

$$V_c = \int v_{cl} dx = \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} F_N^2 + \frac{k}{GA} F_Q^2 + \frac{1}{EI} M^2 \right] dx \quad (13-10)$$

§ 13-3 势能原理

一、势能的定义

杆件结构的势能用 E_p 表示, 它被定义为

$$E_p = V + E_p^* \quad (13-11)$$

式中 V 是杆件结构的应变能, 在刚架中, 通常只考虑弯曲应变能。于是由一根杆件的应变能公式(13-7)可得刚架结构的应变能为

$$V = \sum_e \int \frac{1}{2} EI (v'')^2 dx \quad (13-12)$$

式中 v'' 为 v 对 x 的二阶导数, \sum_e 表示对刚架结构的全部杆件求和。

式(13-11)中的 E_p^* 是结构的荷载势能, 它表示荷载 F_p 由起始位置(通常取未变形时的荷载位置作为起始位置)到最终位置(可任选一满足位移约束条件的几何可能位移状态作为最终位置)过程中所作虚功的负值, 即

$$E_p^* = - \sum_P P \Delta \quad (13-13)$$

式中 \sum_P 表示对全部广义力所作虚功求和。

于是得

$$E_p = \sum_e \int \frac{1}{2} EI (v'')^2 dx - \sum_P P \Delta \quad (13-14)$$

二、势能驻值原理

势能驻值原理可表述为: 在所有几何可能的位移状态中, 真实的位移应使势能为驻值。

这一能量原理说明, 如果位移满足全部变形谐调条件, 而且还能使势能为驻值, 则与此位移相应的内力必然满足全部静力平衡条件。也即势能驻值条件与平衡条件等价。

在小位移、线弹性的稳定平衡问题中, 满足几何方程、物理方程和静力平衡方程的解具有唯一解。此时, 结构的真实位移不仅使势能为驻值, 而且可以证明, 也使势能为极小值, 这就是最小势能原理。

三、势能驻值条件与位移法基本方程

下面, 先导出用位移法基本未知量表示的势能表达式。

设位移法的基本未知量为 Z_1, Z_2, \dots, Z_n , 在位移法的基本结构中, 各杆的挠度方程可表示为

$$v = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i Z_i + v_p \quad (13-15)$$

式中 \bar{v}_i 和 v_p 分别为位移法基本结构上由单位位移 $\bar{Z}_i = 1$ 和荷载引起的挠度。对于任意给定的 Z_1, Z_2, \dots, Z_n , 由式(13-15)给出的位移 v 都是原结构的几何可能位移, 但与它们相应的内力却不一定是原结构的静力可能内力。

与广义荷载 P 相应的广义位移 Δ , 也可写成如下的叠加形式:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \bar{\Delta}_i Z_i + \Delta_p \quad (13-16)$$

式中 $\bar{\Delta}_i$ 和 Δ_p 分别为基本结构上由单位位移 $\bar{Z}_i = 1$ 和荷载引起的与荷载相应的广义位移。

将式(13-15)、(13-16)代入结构势能表达式(13-14), 得

$$E_p = \sum_e \int \frac{1}{2} EI \left(\sum_{i=1}^n \bar{v}_i'' Z_i + v_p'' \right)^2 dx - \sum_P P \left(\sum_{i=1}^n \bar{\Delta}_i Z_i + \Delta_p \right)$$

可见, 势能是 n 个基本未知量 Z_i 的函数, 根据势能为驻值的条件

$$\frac{\partial E_p}{\partial Z_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (13-17)$$

可得

$$\sum_e \int EI \sum_{j=1}^n \bar{v}_i'' \bar{v}_j'' Z_j dx - \sum_P P \bar{\Delta}_i = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (13-18)$$

在上式中,注意到 $EI \bar{v}_i'' = -\bar{M}_i$, $\bar{v}_j'' = -\bar{\kappa}_j$,则有

$$\sum_e \int EI \bar{v}_i'' \bar{v}_j'' dx = \sum_e \int \bar{M}_i \bar{\kappa}_j dx = V_{ij}$$

其中 V_{ij} 为虚应变能,根据 $W_{ij} = V_{ij}$,即可证明

$$r_{ij} = \sum_e \int EI \bar{v}_i'' \bar{v}_j'' dx$$

再利用功的互等定理,又可证明

$$R_{iP} = - \sum_P P \bar{\Delta}_i$$

故式(13-18)可改写成

$$\sum_{j=1}^n r_{ij} Z_j + R_{iP} = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad (13-19)$$

这就是位移法的基本方程(即典型方程)。

以上由势能驻值条件导出了位移法的基本方程。由此可见,势能驻值条件就是以能量形式表示的位移法基本方程(也就是平衡条件)。基于势能原理的解法,就是以能量形式表示的位移法。

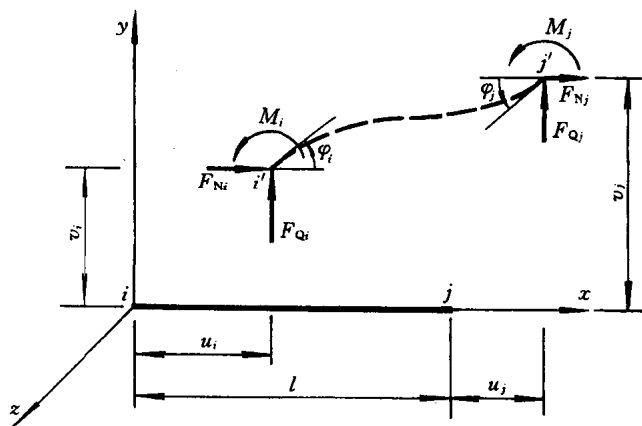


图 13-2

四、按势能原理推导杆件的单元刚度矩阵

设有图 13-2 所示杆件单元 ij ,不考虑剪切变形影响。单元两端的位移列向量为

$$\begin{aligned} \delta &= [u_i \ v_i \ \varphi_i \ u_j \ v_j \ \varphi_j]^T \\ &= [\delta_1 \ \delta_2 \ \delta_3 \ \delta_4 \ \delta_5 \ \delta_6]^T \end{aligned} \quad (a)$$

式中各元素的正向均如图 13-2 所示。

今设杆件单元的位移为

$$\left. \begin{aligned} u &= A_1 + A_2 x \\ v &= A_3 + A_4 x + A_5 x^2 + A_6 x^3 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

利用杆端的边界条件:

$$x=0 \text{ 时, } u = u_i = \delta_1, \quad v = v_i = \delta_2, \quad \frac{dv}{dx} = \varphi_i = \delta_3$$

$$x=l \text{ 时, } u = u_j = \delta_4, \quad v = v_j = \delta_5, \quad \frac{dv}{dx} = \varphi_j = \delta_6$$

可以定出式(b)中的六个常数 A_1, A_2, \dots, A_6 , 再将其代回式(b), 得

$$\left. \begin{aligned} u &= N_1 \delta_1 + N_4 \delta_4 \\ v &= N_2 \delta_2 + N_3 \delta_3 + N_5 \delta_5 + N_6 \delta_6 \end{aligned} \right\} \quad (c)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{l}, & N_4 &= \frac{x}{l} \\ N_2 &= 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3}, & N_5 &= 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} \\ N_3 &= x - 2 \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}, & N_6 &= -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \end{aligned} \right\} \quad (13-20)$$

N_1, N_2, \dots, N_6 称为形状函数。

$$\begin{aligned} \text{令 } \mathbf{N}_I &= [N_1 \quad N_4], & \boldsymbol{\delta}_I &= [\delta_1 \quad \delta_4]^T \\ \mathbf{N}_{II} &= [N_2 \quad N_3 \quad N_5 \quad N_6], & \boldsymbol{\delta}_{II} &= [\delta_2 \quad \delta_3 \quad \delta_5 \quad \delta_6]^T \end{aligned}$$

则式(c)可写成

$$\left. \begin{aligned} u &= \mathbf{N}_I \boldsymbol{\delta}_I \\ v &= \mathbf{N}_{II} \boldsymbol{\delta}_{II} \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

由式(13-7)有单元的应变能

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} [EA(u')^2 + EI(v'')^2] dx$$

将式(d)代入上式, 得

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} EA (\mathbf{N}'_I \boldsymbol{\delta}_I)^2 dx + \int_0^l \frac{1}{2} EI (\mathbf{N}''_{II} \boldsymbol{\delta}_{II})^2 dx$$

因 $\mathbf{N}' \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{N}'^T$, $\mathbf{N}'' \boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{N}''^T$, 故上式又可写成

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_I^T \int_0^l EA \mathbf{N}'_I{}^T \mathbf{N}'_I dx \boldsymbol{\delta}_I + \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}_{II}^T \int_0^l EI \mathbf{N}''_{II}{}^T \mathbf{N}''_{II} dx \boldsymbol{\delta}_{II} \quad (e)$$

式(e)是用杆端位移 $\boldsymbol{\delta}_I$ 和 $\boldsymbol{\delta}_{II}$ 表达的应变能公式, 它可改写成用 $\boldsymbol{\delta}$ 表示的统一形式如下:

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\delta} \quad (13-21)$$

式中 \mathbf{k} 为 6×6 对称方阵。比较式(e)和式(13-21)可得 \mathbf{k} 中各元素为

$$k_{ii} = \int_0^l EA (N'_i)^2 dx \quad (i=1, 4)$$

$$\begin{aligned}
k_{ij} = k_{ji} &= \int_0^l EAN'_i N'_j dx & (i=1, j=4 \text{ 或 } i=4, j=1) \\
k_{ij} = k_{ji} &= 0 & (i=1, 4, j=2, 3, 5, 6) \\
k_{ii} &= \int_0^l EI(N''_i)^2 dx & (i=2, 3, 5, 6) \\
k_{ij} = k_{ji} &= \int_0^l EIN''_i N''_j dx & (i \neq j, i=2, 3, 5, 6, j=2, 3, 5, 6)
\end{aligned}
\tag{13-22}$$

单元的杆端力列向量为

$$\begin{aligned}
\mathbf{F} &= [F_{Ni} \ F_{Qi} \ M_i \ F_{Nj} \ F_{Qj} \ M_j]^T \\
&= [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6]^T
\end{aligned}
\tag{f}$$

单元的荷载势能为

$$E_p^* = -\delta^T \mathbf{F}$$

单元的总势能

$$E_p = V + E_p^* = \frac{1}{2} \delta^T \mathbf{k} \delta - \delta^T \mathbf{F}$$

由势能驻值条件

$$\frac{\partial E_p}{\partial \delta} = 0$$

可得

$$\mathbf{k} \delta - \mathbf{F} = 0$$

即

$$\mathbf{F} = \mathbf{k} \delta \tag{13-23}$$

这就是单元的刚度方程, \mathbf{k} 就是单元刚度矩阵, 其元素可按式(13-22)求得, 于是有

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ & & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \text{对} & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ & & & & & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \tag{13-24}$$

称

它与第十二章中用静力法导出的单元刚度矩阵完全相同。

此外, 把式(13-21)所表示的应变能 V 对杆端位移 δ 求导, 得

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = \mathbf{k} \delta \tag{g}$$

将式(g)与式(13-23)对照, 可得

$$\mathbf{F} = \frac{\partial V}{\partial \delta} \tag{13-25}$$

这就是用变形能 V 表达的单元刚度方程。

五、瑞利 - 里兹法

由于根据势能原理的解法对应于结构力学的位移法,因此,能量原理解法本身是一种精确方法。但在精确解难以求得或不能求得的很多实际问题中,能量原理又能为我们提供求近似解的有效途径。由瑞利提出经里兹改进和推广的瑞利 - 里兹法就是一种著名的能量近似方法。现介绍如下。

对变形体来说,如果它的内力与外力能满足全部静力平衡条件,即满足杆件的平衡微分方程,而且在联结处和边界处能满足力的平衡条件,则称此种内力为静力可能的内力。在静定结构中,静力可能内力是它的唯一解;但在超静定结构中,静力可能内力则可有无限组,其中只有满足变形谐调条件的那一组才是真实的解。方法就是从满足变形谐调条件出发,从静力可能内力中寻找结构的真实解。如果变形体的应变 ϵ 、 γ 、 κ 与位移 u 、 v 、 φ 能满足几何方程,而且位移在结点处能满足联结条件,在支承处能与约束几何相容,则称此种变形为几何可能的位移,或称满足变形谐调条件的位移。在变形体上,这种几何可能位移有无限组,但只有同时能满足静力平衡条件的那一组才是其真实解答。由势能驻值原理可知,势能驻值条件是与静力平衡条件等价的,于是就可用它来替代静力平衡条件去建立位移法方程,即从几何可能位移中利用势能驻值条件去求真实解。

因为总势能是一个泛函(简单说泛函就是函数的函数),于是对稳定平衡问题来说,按位移法求解就归结为求泛函极值的问题。瑞利 - 里兹法就是建立在泛函求极值基础上的一种近似解法。它将结构的几何可能位移设定为包含几个独立参数的已知函数,这时,随位移而变的结构的总势能,就成为随这几个参数而变的函数。再根据势能驻值条件,建立几个线性代数方程来求解这些参数,从而获得一组满足变形谐调条件的位移,这就是结构位移的近似解。

例如,在梁的弯曲问题中,可设梁的位移(挠度)为

$$v = \sum_{i=1}^n a_i f_i(x) \quad (a)$$

其中 $f_i(x)$ 是满足梁的位移边界条件的已知函数, a_i 是 n 个待定的参数。根据设定的 v , 即可算出总势能 E_p , 它包含 n 个独立的参数 a_i , 再由驻值条件

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (b)$$

可得 n 个代数方程, 联立求解这组方程即可求出参数 a_i , 这样就得到了梁的近似挠曲线。

值得指出, 增加待定参数 a_i 的个数, 即增加独立函数 $f_i(x)$ 的个数, 一般可以提高精确度。

例 13-1 试用瑞利 - 里兹法求图 13-3 所示悬臂梁的挠度。

[解] (1) 设挠度曲线为三角函数

$$v = \sum_{i=1, 3, 5, \dots} a_i \left(1 - \cos \frac{i\pi x}{2l} \right)$$

只取首项, 则

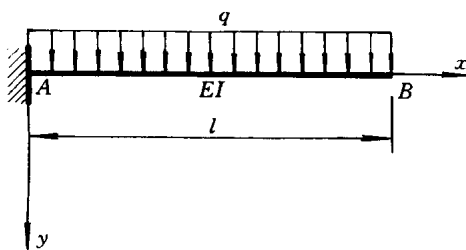


图 13-3

$$v = a_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

以上所设函数能满足该梁的位移边界条件,即

$$(v)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=0} = 0.$$

梁的应变能

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} EI (v'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(a_1 \frac{\pi^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x}{2l} \right)^2 dx = \frac{EI \pi^4}{64l^3} a_1^2$$

荷载势能为

$$E_p^* = - \int_0^l qa_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right) dx = - ql \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) a_1$$

总势能

$$E_p = V + E_p^* = \frac{EI \pi^4}{64l^3} a_1^2 - ql \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) a_1$$

由驻值条件

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_1} = 0$$

得

$$\frac{EI \pi^4}{32l^3} a_1 - ql \left(1 - \frac{2}{\pi} \right) = 0$$

解得

$$a_1 = \frac{32 \left(1 - \frac{2}{\pi} \right)}{\pi^4} \cdot \frac{ql^4}{EI} = 0.1194 \frac{ql^4}{EI}$$

所以

$$v = 0.1194 \frac{ql^4}{EI} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

悬臂端最大挠度为

$$v_{\max} = (v)_{x=l} = 0.1194 \frac{ql^4}{EI}$$

比精确解 $0.125 \frac{ql^4}{EI}$ 约小 4.5%。

(2) 设挠度曲线为幂函数

$$v = \sum_i a_i x^{i+1}$$

显然满足

$$(v)_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{dv}{dx} \right)_{x=0} = 0$$

若取前两项,则

$$v = a_1 x^2 + a_2 x^3$$

应变能

$$V = \int_0^l \frac{EI}{2} (v'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l (2a_1 + 6a_2 x)^2 dx$$

$$= EI(2la_1^2 + 6l^2 a_1 a_2 + 6l^3 a_2^2)$$

荷载势能

$$\begin{aligned} E_p^* &= - \int_0^l qvdxdx = -q \int_0^l (a_1 x^2 + a_2 x^3) dx \\ &= -\frac{ql^3}{12}(4a_1 + 3la_2) \end{aligned}$$

总势能

$$E_p = V + E_p^*$$

由驻值条件

$$\frac{\partial E_p}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial a_2} = 0$$

有

$$\left. \begin{aligned} 4a_1 + 6la_2 &= \frac{ql^2}{3EI} \\ 6a_1 + 12la_2 &= \frac{ql^2}{4EI} \end{aligned} \right\}$$

解得

$$a_1 = \frac{5ql^2}{24EI}, \quad a_2 = -\frac{ql}{12EI}$$

故有

$$v = \frac{ql^2}{12EI} \left(\frac{5}{2} - \frac{x}{l} \right) x^2$$

悬臂端挠度为

$$(v)_{x=l} = \frac{ql^4}{8EI}$$

与精确解相同。

例 13-2 试用瑞利-里兹法求图 13-4 所示简支梁的挠度和弯矩。

【解】 设挠度曲线为

$$v = \sum_{i=1} a_i \sin \frac{i\pi x}{l}$$

这个函数不仅满足简支梁两端的位移边界条件 $(v)_{x=0} = 0, (v)_{x=l} = 0$; 而且满足两端的静力边界条件(即两端弯矩为零) $(v'')_{x=0} = 0, (v'')_{x=l} = 0$.

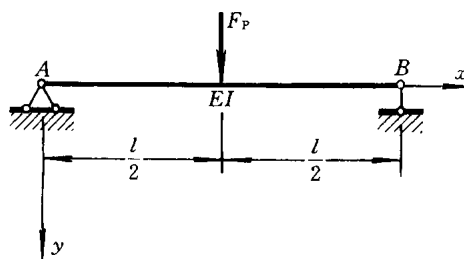


图 13-4

(1) 只取级数的首项

$$v = a_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

则

$$V = \int_0^l \frac{EI}{2} (v'')^2 dx = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(-\frac{a_1 \pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} a_1^2$$

$$E_p^* = -F_P (v)_{x=l/2} = -F_P a_1$$

所以

$$E_p = V + E_p^* = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} a_1^2 - F_P a_1$$

由 $\frac{\partial E_p}{\partial a_1} = 0$ 得

$$\begin{aligned} \frac{\pi^4 EI}{2l^3} a_1 - F_P &= 0 \\ a_1 &= \frac{2F_P l^3}{\pi^4 EI} = 0.0205 \frac{F_P l^3}{EI} \end{aligned}$$

于是得近似解

$$v = 0.0205 \frac{F_P l^3}{EI} \sin \frac{\pi x}{l}$$

最大挠度发生在梁的中点处,即

$$v_{\max} = (v)_{x=l/2} = 0.0205 \frac{F_P l^3}{EI}$$

比精确解 $\frac{F_P l^3}{48EI}$ 约小 1.6%。

由
得

$$M = -EIv''$$

$$M = \frac{2F_P l}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l} = 0.2026 F_P l \sin \frac{\pi x}{l}$$

中点最大弯矩为

$$M_{\max} = (M)_{x=l/2} = 0.2026 F_P l$$

比精确值 $0.25F_P l$ 约小 19%。

(2) 取级数的前三项

$$v = a_1 \sin \frac{\pi x}{l} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{l}$$

则得

$$V = \int_0^l \frac{EI}{2} (v'')^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} (a_1^2 + 16a_2^2 + 81a_3^2)$$

进行上述积分时,利用了正弦函数的正交关系,即

$$\int_0^l \sin \frac{i\pi x}{l} \sin \frac{j\pi x}{l} dx = \begin{cases} \frac{l}{2} & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

又

$$E_p^* = -F_P (v)_{x=l/2} = -F_P (a_1 + 0 - a_3)$$

因此

$$E_p = V + E_p^* = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} (a_1^2 + 16a_2^2 + 81a_3^2) - F_P (a_1 - a_3)$$

由驻值条件 $\frac{\partial E_p}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial E_p}{\partial a_2} = 0$, $\frac{\partial E_p}{\partial a_3} = 0$

得 $\frac{\pi^4 EI}{2l^3} a_1 - F_P = 0$, $\frac{8\pi^4 EI}{l^3} a_2 = 0$, $\frac{81\pi^4 EI}{2l^3} a_3 + F_P = 0$

故有
$$a_1 = \frac{2F_P l^3}{\pi^4 EI}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{2F_P l^3}{81\pi^4 EI}$$

则
$$v = \frac{2F_P l^3}{\pi^4 EI} \left(\sin \frac{\pi x}{l} - \frac{1}{81} \sin \frac{3\pi x}{l} \right)$$

从以上结果可见,因 $a_2=0$,所以 v 中没有 $\sin \frac{2\pi x}{l}$ 这一项,原因是梁在中点作用集中荷载时,其变形和内力都应该对通过梁中点的竖轴正对称,而 $\sin \frac{2\pi x}{l}$ 则是反对称的,故应为零。如果我们能预见到这一结论,则在设定 v 的正弦级数式时,可取

$$v = \sum_{i=1,3,5,\dots} a_i \sin \frac{i\pi x}{l}$$

可以证实,对于上式取级数的前二项计算,其结果要比只取首项精确。还可指出,如果选用无穷三角级数来表示梁的挠度曲线,则瑞利-里兹法将给出精确解。

以上,只用简单的例子说明了瑞利-里兹法的解题过程,由此可以看到,采用这一近似解法时,关键是要选取合适的几何可能位移函数,选择得好,可以迅速获得满意的结果。实践证明,三角函数或多项式函数使用起来总是很方便的。

瑞利-里兹法在本书的结构动力计算和弹性稳定计算中,都将被采用。

§ 13-4 余能原理

一、余能的定义

杆件结构的余能用 E_c 表示,它被定义为

$$E_c = V_c + E_c^* \quad (13-26)$$

式中 V_c 是杆件结构的应变余能,用内力表示。由一根杆件的应变余能公式(13-10)可得杆件结构的应变余能为

$$V_c = \sum_c \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} F_N^2 + \frac{k}{GA} F_Q^2 + \frac{1}{EI} M^2 \right] dx \quad (13-27)$$

式中 \sum_c 表示对结构的全部杆件求和。

式(13-26)中的 E_c^* 是结构的支座位移余能,或称给定边界位移的余能,即在支座位移 c 上相应支座反力 R 所作虚功总和的负值,可表为

$$E_c^* = - \sum_c R c \quad (13-28)$$

式中 \sum_c 表示对全部支座反力所作虚功求和。

于是得

$$E_c = \sum_c \int \frac{1}{2} \left[\frac{1}{EA} F_N^2 + \frac{k}{GA} F_Q^2 + \frac{1}{EI} M^2 \right] dx - \sum_c R c \quad (13-29)$$

二、余能驻值原理

超静定杆件结构的余能驻值原理可表述为:在所有静力可能的内力状态中,真实的内力应使余能为驻值。

这一原理说明,如果内力满足全部静力平衡条件,而且还能使余能为驻值,则与此内力相应的变形必然满足变形谐调条件。也即余能驻值条件与变形谐调条件等价。

可以证明,超静定结构中,在同时满足静力平衡方程、几何方程和物理方程的解具有唯一解的情况下,结构的真实内力不仅使余能为驻值,而且使余能为极小值,这就是最小余能原理。

三、余能驻值条件与力法基本方程

下面,先导出用力法基本未知量表示的余能表达式。

设力法的基本未知量为 X_1, X_2, \dots, X_n , 在力法的基本结构中,各杆的内力可表为

$$\left. \begin{aligned} F_N &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Ni} X_i + F_{NP} \\ F_Q &= \sum_{i=1}^n \bar{F}_{Qi} X_i + F_{QP} \\ M &= \sum_{i=1}^n \bar{M}_i X_i + M_P \end{aligned} \right\} \quad (13-30)$$

支座反力也可写成

$$R = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i X_i + R_P \quad (13-31)$$

式中 $\bar{F}_{Ni}, \bar{F}_{Qi}, \bar{M}_i$ 和 \bar{R}_i 分别为力法基本结构在 $\bar{X}_i = 1$ 作用下,各杆产生的内力和反力; F_{NP}, F_{QP}, M_P 和 R_P 分别为荷载作用下力法基本结构中各杆的内力和反力。

又因

$$\left. \begin{aligned} \delta_{ij} &= \sum_e \int \left(\frac{\bar{F}_{Ni} \bar{F}_{Nj}}{EA} + \frac{k \bar{F}_{Qi} \bar{F}_{Qj}}{GA} + \frac{\bar{M}_i \bar{M}_j}{EI} \right) dx \\ \Delta_{iP} &= \sum_e \int \left(\frac{\bar{F}_{Ni} F_{NP}}{EA} + \frac{k \bar{F}_{Qi} F_{QP}}{GA} + \frac{\bar{M}_i M_P}{EI} \right) dx \\ \Delta_{i\Delta} &= - \sum_c \bar{R}_i c \end{aligned} \right\} \quad (13-32)$$

式中 $\delta_{ij}, \Delta_{iP}, \Delta_{i\Delta}$ 是力法基本结构分别由 $\bar{X}_j = 1$ 、荷载和支座位移引起的与 X_i 相应的位移。

将式(13-30)、(13-31)代入余能表达式(13-29),并应用式(13-32)得

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \delta_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n (\Delta_{iP} + \Delta_{i\Delta}) X_i \quad (13-33)$$

可见,余能是 n 个基本未知量 X_i 的函数,根据余能为驻值的条件

$$\frac{\partial E_c}{\partial X_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (13-34)$$

将式(13-33)代入后得