

随机信号原理题解

武延祥 李志舜 编译

光 华 出 版 社

Solutions Manual to Accompany

PROBABILITY RANDOM VARIABLES &
RANDOM SIGNAL PRINCIPLES

Peyton Z. Peebles, Jr. Ph.D.
Professor of Electrical Engineering
The University of Tennessee

McGraw-Hill Book Company 1980

目 录

前言	
第一章 概 率	1
第二章 随机变量	21
第三章 一个随机变量的运算	48
第四章 多元随机变量	71
第五章 多元随机变量的运算	98
第六章 随机过程	121
第七章 随机过程的谱特性	147
第八章 具有随机输入的线性系统	180
第九章 最佳线性系统	227
附录: 傅立叶变换	251
参考文献	263

第一章

概 率

1.1 用规则法表示下列各集:

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{8, 10, 12, 14\} \quad C = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

解: 令 a 为整数, b 为偶整数, c 为奇整数, 则

$$A = \{0 < a < 4\}$$

$$B = \{6 < b < 16\}$$

$$C = \{0 < c\}$$

还可能其它的表达法。

1.2 用列表法将题1.1中各集表示为一个集类。

解: 若集类以 S 表之, 则

$$S = \{A, B, C\}$$

或

$$S = \{\{1, 2, 3\}, \{8, 10, 12, 14\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\}$$

1.3 试说明下列各集为可列集还是不可列集, 是有限集还是无限集:

$$A = \{1\}, \quad B = \{x=1\}, \quad C = \{0 < \text{整数}\},$$

$$D = \{\text{第五公立学校的学生}\}, \quad E = \{\text{第五公立学校的女学生}\},$$

$$F = \{\text{上午8:00, 第五公立学校有课的女学生}\},$$

$$G = \{\text{所有不超过一米的长度}\},$$

$$H = \{-25 \leq x \leq -3\}, \quad I = \{-2, -1, 1 \leq x \leq 2\}.$$

解: A, B, D, E 和 F 是可列的有限集, C 是可列的无限集, G, H 和 I 是不可列的无限集。

1.4 对题1.3中的每一个集, 确定其是否等于任一其它集, 或为任一其它集的子集。

$$\text{解: } A = B, \quad A \subset C, \quad A \subset G, \quad A \subset I.$$

$$B = A, \quad B \subset C, \quad B \subset G, \quad B \subset I.$$

C 和 D 既不等于任一其它集, 也不为任一其它集的子集。

$$E \subset D.$$

$$F \subset D, \quad F \subset E \text{ (注意: } F \text{ 可以为空集)}.$$

G 不等于任一其它集, 也不为任一其它集的子集。

$H \subset G$ 若 λ 以米为单位, 则负的长度是容许的。

I 不等于任一其它集, 也不为任一其它集的子集。

1.5 试指出字母集 $\{a, b, c, d\}$ 的每一个可能的子集。

解: $\{\cdot\}$ (空集);

$$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\};$$

$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\};$$

$$\{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\};$$

$$\{a, b, c, d\}.$$

1.6 用温度计测量温度, 其值为 -40 到 54.4°C , 试写出:

(1). 描述测量温度之论集;

(2). 测量温度不高于冰点的子集;

(3). 测量温度高于冰点但不超过 37.8°C 的子集。

解: 设测量温度为 t , 则:

$$(1). S = \{-40^\circ\text{C} \leq t \leq 54.4^\circ\text{C}\}$$

$$(2). S_1 = \{t \leq 0^\circ\text{C}\}$$

$$(3). S_2 = \{0^\circ\text{C} < t \leq 37.8^\circ\text{C}\}$$

显然, $S_1 \subset S, \quad S_2 \subset S.$

1.7 试证明一个含 N 个元素的集有 2^N 个子集。

证: 空集为一个子集

用一个元素构成的子集数为 N ,

用二个元素构成的子集数为 $\binom{N}{2} = N! / 2!(N-2)!$, 此

即从 N 个不同的元素中每次取 2 个不同的元素构成的组合数。

用三个元素构成的子集数为 $\binom{N}{3} = N! / 3!(N-3)!$

依次类推,一个含 N 个元素的集共有子集数为

$$\sum_{i=0}^N \binom{N}{i} = \sum_{i=0}^N \frac{N!}{i!(N-i)!} = 2^N$$

1.8 在某给定时刻,一个随机噪声电压的可能取值为 -10^V 到 10^V .

(1). 求噪声电压的泛集:

(2). 若一半波整流器的输入—输出电压特性为线性的,求描述半波整流器输出正电压的集.

(3). 若在随机噪声电压上迭加 $-3V$ 的直流电压,重作(1)和(2).

解: (1). $S = \{-10 \leq S \leq 10\}$

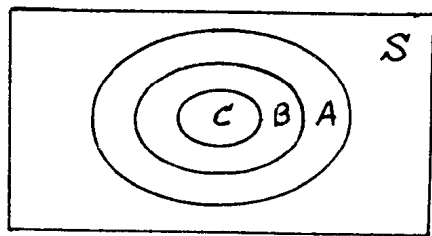
(2). $V = \{0 \leq S \leq 10\}$

(3). (i). $S = \{-13 \leq S \leq 7\}$

(ii). $V = \{0 \leq S \leq 7\}$

1.9 证明: 若 $C \subset B$ 和 $B \subset A$, 则 $C \subset A$.

证: 由文氏图可证得: 若 $C \subset B$ 和 $B \subset A$, 则 $C \subset A$.



1.10 两集 $A = \{-6, -4, -0.5, 0, 1.6, 8\}$ 和 $B = \{-0.5, 0, 1, 2, 4\}$

求: (1). $A - B$ (2). $B - A$ (3). $A \cup B$ (4). $A \cap B$

解: (1). $A - B = \{-6, -4, 1.6, 8\}$

(2). $B - A = \{1, 2, 4\}$

(3). $A \cup B = \{-6, -4, -0.5, 0, 1, 1.6, 2, 4, 8\}$

(4). $A \cap B = \{-0.5, 0\}$

1.11 泛集为 $S = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, 定义两个子集为 $A = \{2, 4, 10\}$

和 $B = \{4, 6, 8, 10\}$, 试求下列各集:

- (1) $\bar{A} = S - A$, (2) $A - B$ 和 $B - A$ (3) $A \cup B$
 (4) $A \cap B$ (5) $\bar{A} \cap B$

解: (1) $\bar{A} = S - A = \{6, 8, 12\}$

(2) $A - B = \{2\}$, $B - A = \{6, 8\}$

(3) $A \cup B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

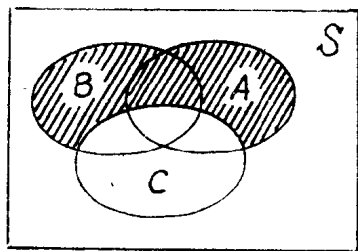
(4) $A \cap B = \{4, 10\}$

(5) $\bar{A} \cap B = \{6, 8\}$

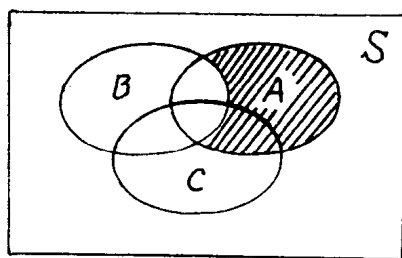
1.12 三个集 A , B 和 C , 用文氏图的阴影部分表示下列各集:

- (1) $(A \cup B) - C$ (2) $\bar{B} \cap A$ (3) $A \cap B \cap C$ (4) $(\overline{A \cup B}) \cap C$

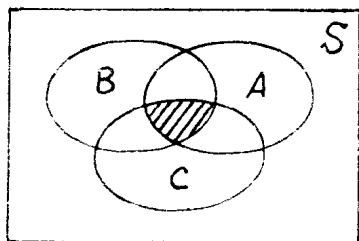
解:



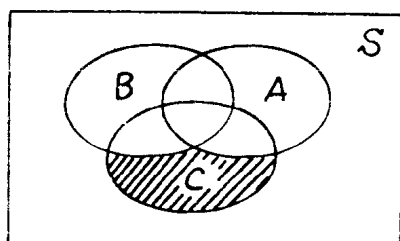
(1). 阴影部分为 $(A \cup B) - C$



(2). 阴影部分为 $\bar{B} \cap A$



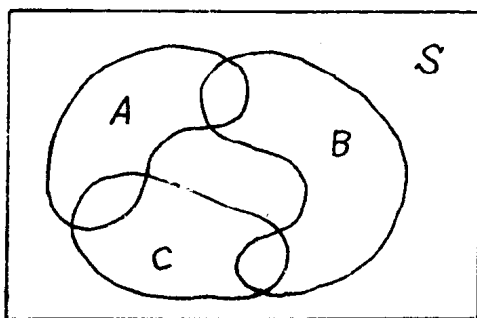
(3). 阴影部分为 $A \cap B \cap C$



(4). 阴影部分为 $(\overline{A \cup B}) \cap C$

1.13 画出三事件 A , B 和 C 的文氏图, 这里 $A \cap B \neq \emptyset$,
 $B \cap C \neq \emptyset$, $C \cap A \neq \emptyset$, 但 $A \cap B \cap C = \emptyset$

解:



$$\begin{aligned} A \cap B &\neq \emptyset \\ B \cap C &\neq \emptyset \\ A \cap C &\neq \emptyset \\ A \cap B \cap C &= \emptyset \end{aligned}$$

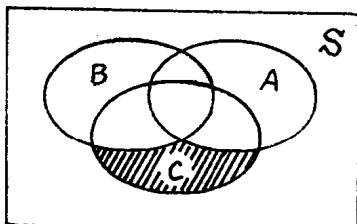
1.14 用文氏图证明下列各恒等式成立:

(1). $(\overline{A \cup B}) \cap C = C - [(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

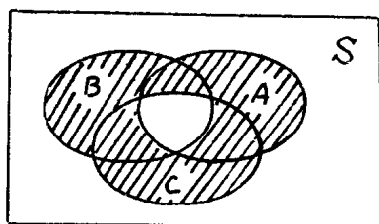
(2). $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C) = (\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (\bar{C} \cap A)$

(3). $\overline{(A \cup B \cup C)} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

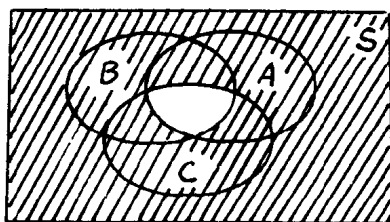
证:



(1)



(2)



(3)

(1). 阴影部分表示 $(\overline{A \cup B}) \cap C$, 也表示 $C - [(A \cap C) \cup (B \cap C)]$.

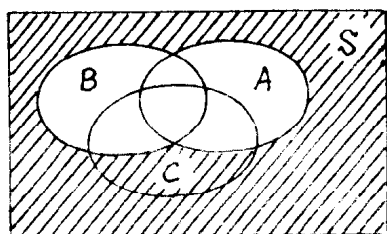
(2). 阴影部分表示 $(A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$, 也表示
 $(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (\bar{C} \cap A)$

(3). 阴影部分表示 $\overline{(A \cup B \cup C)}$, 也表示 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

1.15 试用文氏图证明摩根定理 $\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 和 $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$

$$= \bar{A} \cup \bar{B}.$$

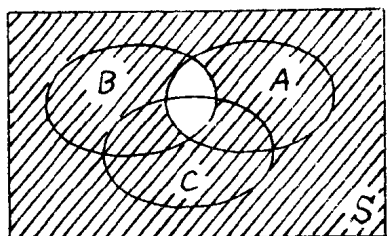
证:



阴影部分表示 $\overline{A \cup B}$

也表示 $\bar{A} \cap \bar{B}$

$$\text{所以 } \overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



阴影部分表示 $\overline{A \cap B}$

也表示 $\bar{A} \cup \bar{B}$

$$\text{所以 } \overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

1.16 泛集 $S = \{-20 < s < -4\}$ 。若 $A = \{-10 \leq s \leq -5\}$ 和 $B = \{-7 < s < -4\}$, 求: (1). $A \cup B$ (2). $A \cap B$ (3). 第三个集 C , 使满足 $A \cap C$ 和 $B \cap C$ 尽可能大, 同时集 C 中的最小元素为 -9 。(4). $A \cap B \cap C$ 。

解: (1). $A \cup B = \{-10 \leq s < -4\}$

(2). $A \cap B = \{-7 < s \leq -5\}$

(3). 令集 $C = \{-9 \leq s \leq N\}$, 对 $-5 \leq N \leq -4$ 中的任何值, 均满足使得 $A \cap C$ 尽可能大的要求。若 $C = \{-9 \leq s \leq -4\}$, 则 $B \cap C$ 为最大。因此满足题中两项要求的集 $C = \{-9 \leq s \leq -4\}$ 。

(4). $A \cap B \cap C = \{-7 < s \leq -5\}$

1.17 用摩根定理证明:

$$(1). \overline{A \cap (B \cup C)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$$

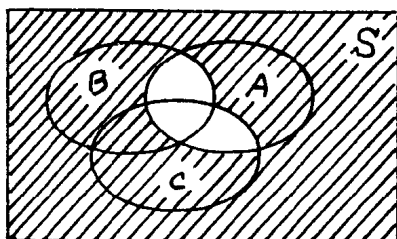
$$(2). \overline{(A \cap B) \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

并用文氏图检验所得结果。

证: (1) 为了证明 $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$, 对等式左边

进行计算。由摩根定理得到 $\overline{A \cap (B \cup C)} = \bar{A} \cup \overline{(B \cup C)} = \bar{A} \cup (\bar{B} \cap \bar{C})$ 。
最后,由分配律即得所求之等式 $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$ 。

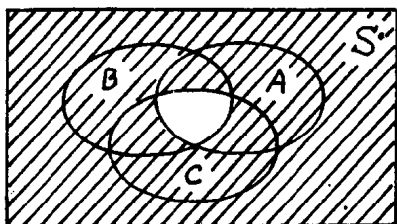
用文氏图验证:



阴影部分表示 $\overline{A \cap (B \cup C)}$
也表示 $(\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$
所以 $\overline{A \cap (B \cup C)} = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup \bar{C})$

(2) 将摩根定理用于方程 $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$ 的右边,我们得到 $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \overline{(B \cap C)} = \bar{A} \cup (\bar{B} \cup \bar{C}) = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

用文氏图验证:



阴影部分表示 $\overline{A \cap B \cap C}$
也表示 $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$
所以 $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

1.18 掷一枚骰子,若事件 $A = \{\text{出现奇数}\}$, $B = \{\text{出现的数大于3}\}$,求 $A \cup B$ 和 $A \cap B$ 的概率。

解: 各事件为 $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{5\}$, $A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ 。若所掷骰子各点数出现的机会相等,则互相排斥的六个结果的每一个出现的概率为 $1/6$ 。因此,根据概率公理

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$P(A \cup B) = \frac{5}{6}$$

1.19 在掷两枚骰子的游戏中,若出现的点数之和为7或11,则投掷者就全胜。求投掷者全胜的概率。

解：掷两枚骰子，可能有36种相互排斥的结果，每一种结果出现的概率为 $\frac{1}{36}$ 。仅有6种结果两点数之和为7：(1, 6), (2, 5), (3, 4), (5, 2)和(6, 1)，2种结果为两点数之和为11：(5, 6)和(6, 5)。共8种结果满足事件“7或11”，因此，

$$P(\text{两点数之和为7或11}) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

1.20 一个指针围绕一个轮子旋转，轮子的外圈均匀地标有刻度0到100。求

- (1). 本试验的样本空间；
- (2). 指针停在20和35之间的概率；
- (3). 指针停在58上的概率。

解：(1). 本试验的样本空间为 $S = \{0 < S \leq 100\}$

$$(2). P\{20 < S \leq 35\} = (35 - 20)/100 = 15/100$$

(3). $P\{S = 58\} = 0$ ，因为数58仅是样本空间 S 中无限个数中的一个。

1.21 某试验的样本空间为 $S = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}\}$ ，其中10个元素几乎是同等的。定义三个事件为 $A = \{a_1, a_5, a_9\}$ ， $B = \{a_1, a_2, a_6, a_9\}$ 和 $C = \{a_6, a_9\}$ ，求下列各概率。

- (1). $A \cup C$
- (2). $B \cup \bar{C}$
- (3). $A \cap (B \cup C)$
- (4). $\overline{A \cup B}$
- (5). $(A \cup B) \cap C$

解：(1). 因为 $A \cup C = \{a_1, a_5, a_6, a_9\}$

$$\text{所以 } P(A \cup C) = 4/10 = 2/5$$

(2). 因为 $B \cup \bar{C} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$
 $= S$

$$\text{所以 } P(B \cup \bar{C}) = P(S) = 1$$

$$(3). P[A \cap (B \cup C)] = P\{a_1, a_9\} = 2/10$$

$$(4). P(\overline{A \cup B}) = P\{a_3, a_4, a_7, a_8, a_{10}\} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$(5). P[A \cup (B \cap C)] = P\{a_1, a_5, a_6, a_9\} = 4/10 = 2/5$$

1.22 若 A 为任一事件，试证 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ 。

证：事件 A 和 $\bar{A}$ 是相互排斥的，并张成整个样本空间，因此，根据概率公理得

$$P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1 = P(A) + P(\bar{A})$$

即： $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

1.23 某试验为掷单个骰子，定义两个事件： $A = \{\text{出现} 6\}$ 和 $B = \{\text{出现} 2 \text{ 或出现} 5\}$

(1). 求 $P(A)$ 和 $P(B)$

(2). 定义第三个事件 C ，使 $P(C) = 1 - P(A) - P(B)$

解：(1). $P(A) = P\{\text{出现} 6\} = 1/6$

$$P(B) = P\{\text{出现} 2 \text{ 或出现} 5\} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(2). 如果集合 C 包括了除集 A 和 B 以外样本空间的剩余部分，就保证

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

因此

$$C = \overline{A \cup B} = \{1, 3, 4\}$$

1.24 在一个盒子中有500个彩色球，其中黑色75个，绿色150个，红色175个，白色70个，兰色30个。求取一每种颜色的球的概率。

解： $P(\text{黑色}) = 75/500 = 3/20$

$$P(\text{绿色}) = 150/500 = 3/10$$

$$P(\text{红色}) = 175/500 = 7/20$$

$$P(\text{白色}) = 70/500 = 7/50$$

$$P(\text{兰色}) = 30/500 = 3/50$$

1.25 从一副扑克牌(52张)中抽出一张牌，求：

(1). 该张牌为J的概率；

(2). 该张牌为5或小于5的概率；

(3). 该张牌是红10的概率。

解：(1). 若所抽之牌为J的概率记以 $P(J)$ ，则

$$P(J) = 4/52 = 1/13$$

(2) 若所抽之牌为5或小于5的概率记以 $P(\leq 5)$, 则

$$\begin{aligned} P(\leq 5) &= [4 \text{ 张 } 5 + 4 \text{ 张 } 4 + 4 \text{ 张 } 3 + 4 \text{ 张 } 2] / 52 \text{ 张} \\ &= 16/52 = 4/13 \end{aligned}$$

(3) 若 $P(\leq 10)$ 表所抽之牌为 ≤ 10 的概率, 则

$$\begin{aligned} P(\leq 10) &= [1 \text{ 张 } \leq 10 \heartsuit + 1 \text{ 张 } \leq 10 \spadesuit] / 52 \text{ 张} \\ &= 2/52 = 1/26 \end{aligned}$$

1.26 从一副52张的扑克牌中抽出两张牌(第一张抽出后不放回), 求:

(1) 已知第一张牌是王后, 第二张牌也是王后的概率;

(2) 已知第一张牌是王后, 第二张牌是7的概率;

(3) 两张牌都是王后的概率。

解: (1) $P(\text{第2张为王后} | \text{第1张为王后}) = 3/51$

(2) $P(\text{第2张为7} | \text{第1张为王后}) = 4/51$

(3) $P(\text{王后} \cap \text{王后}) = P(\text{王后} | \text{王后}) P(\text{王后})$
 $= \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{52} = 1/221$

1.27 一副完全洗好的扑克牌(52张), 分给你4张牌, 求4张全为A的概率。

解: 4张全为A的概率为

$$\begin{aligned} P(4 \text{ 张 } A) &= P(\text{第4张为A} | \text{前3张为A}) \cdot P(\text{前3张为A}) \\ &= \frac{1}{49} P(\text{前3张为A}) \\ &= \frac{1}{49} P(\text{第3张为A} | \text{前两张为A}) P(\text{前两张为A}) \\ &= \frac{1}{49} \cdot \frac{2}{50} P(\text{前两张为A}) \\ &= \frac{1}{49} \cdot \frac{2}{50} P(\text{第2张为A} | \text{第1张为A}) P(\text{第1张为A}) \\ &= \frac{1}{49} \cdot \frac{2}{50} \cdot \frac{3}{51} \cdot \frac{4}{52} \\ &= \frac{1}{270725} = 3.694 \times 10^{-6} \end{aligned}$$

1.28 在一只盒子中有100只电阻, 其阻值和容许偏差如表1-28所示。现从该盒子中选取一只电阻, 并假设每只电阻被选中的可能性

相同。定义两个事件D和E：事件D为“选取一只22Ω的电阻”，事件E为“选取一只容许偏差为10%的电阻”。求 $P(D)$ ， $P(E)$ ， $P(D \cap E)$ ， $P(D|E)$ 和 $P(E|D)$ 。

表1-28 盒中的电阻数
(已知阻值和容许偏差)

阻值(Ω)	容许偏差		总计
	5%	10%	
22	10	14	24
47	28	16	44
100	24	8	32
总计	62	38	100

解：

$$P(D) = 24/100$$

$$P(E) = 38/100$$

$$P(D \cap E) = 14/100$$

$$P(D|E) = 14/38 = \frac{7}{19}$$

$$P(E|D) = 14/24 = 7/12$$

1.29 在题1.28的选取电阻试验中，定义两个互斥事件 B_1 和 B_2 ，使 $B_1 \cup B_2 = S$ 。

(1). 用全概率公式求事件D“选取一只22Ω的电阻”的概率；

(2). 用贝叶斯公式求事件E“选取一只电阻为22Ω，且容许偏差为5%”的概率。

解：定义 B_1 = “选取一只容许偏差为5%的电阻”， B_2 = “选取一只容许偏差为10%的电阻”。

(1). 根据全概率公式可得

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D|B_1) \cdot P(B_1) + P(D|B_2) \cdot P(B_2) \\ &= \frac{10}{62} \cdot \frac{62}{100} + \frac{14}{38} \cdot \frac{38}{100} = \frac{24}{100} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2). P(E) &= P(B_1|D) = P(D|B_1) P(B_1) / P(D) \\ &= \frac{10}{62} \cdot \frac{62}{100} / \frac{24}{100} = 10/24 \end{aligned}$$

1.30 在三只盒子中放有电容器，放置情况如表1-30所示。做一个试验，首先随意地选取一只盒子，假设每只盒子选中的可能性相等。然后从被选中的盒子中抽取一只电容器。

(1). 已知选中了盒子2，那么抽取的电容器为0.01μF的概率

是多少?

(2). 若抽取的电容器为 $0.01 \mu\text{F}$, 求其来自盒子3的概率。(提示: 用贝叶斯公式和全概率公式)。

解:

$$(1). P(0.01 \mu\text{F} | \text{盒子2}) = \frac{95}{210}$$

(2). 根据贝叶斯公式有

$$P(0.01 \mu\text{F} | \text{盒子3}) P(\text{盒子3}) \\ = P(\text{盒子3} | 0.01 \mu\text{F}) P(0.01 \mu\text{F})$$

因此

$$P(\text{盒子3} | 0.01 \mu\text{F}) \\ = \frac{P(0.01 \mu\text{F} | \text{盒子3}) P(\text{盒子3})}{P(0.01 \mu\text{F})}$$

表1-30 电容器

电容值(μF)	盒中电容数			总计
	1	2	3	
0.01	20	95	25	140
0.1	55	35	75	165
1.0	70	80	145	295
总计	145	210	245	

又根据全概率公式可得

$$P(0.01 \mu\text{F}) = P(0.01 \mu\text{F} | \text{盒子1}) P(\text{盒子1}) \\ + P(0.01 \mu\text{F} | \text{盒子2}) P(\text{盒子2}) \\ + P(0.01 \mu\text{F} | \text{盒子3}) P(\text{盒子3}) \\ = \frac{20}{145} \frac{1}{3} + \frac{95}{210} \frac{1}{3} + \frac{25}{245} \frac{1}{3} \\ = \frac{5903}{3 \times 29 \times 42 \times 7}$$

所以

$$P(\text{盒子3} | 0.01 \mu\text{F}) = \frac{\frac{25}{245} \frac{1}{3}}{\frac{5903}{3 \times 29 \times 42 \times 7}} = \frac{870}{5903} \approx 0.1474$$

1.31 在题1.30中, 若已选中了某一盒子, 试列出九种电容器选法的条件概率。

解: 若已选中了盒子1, 则

$$P(0.01 \mu\text{F} | \text{盒子1}) = \frac{20}{145}, \quad P(0.1 \mu\text{F} | \text{盒子1}) = \frac{55}{145}$$

$$P(1.0 \mu\text{F} | \text{盒子1}) = 70/145$$

若已选中了盒子2, 则

$$P\{0.01\mu F | \text{盒子2}\} = 95/210 \quad P(0.1\mu F | \text{盒子2}) = 35/210$$

$$P(1.0\mu F | \text{盒子2}) = 80/210$$

若已选中了盒子3, 则

$$P(0.01\mu F | \text{盒子3}) = 25/245 \quad P(0.1\mu F | \text{盒子3}) = 75/245$$

$$P(1.0\mu F | \text{盒子3}) = 145/245$$

1.32 某一基本的二元通信系统, 由一部发射机和一部接收机组组成。发射机经过信道向接收机发送两个符号0或1中的一个符号。信道偶然地会发生故障, 使得当发送0时在接收端出现1, 或反之, 当发送1时在接收端出现0。

样本空间有两个元素(1或0), 我们用 B_i ($i=1, 2$) 分别表示事件“信道前符号为1”和“信道前符号为0”, 用 A_i ($i=1, 2$) 分别表示事件“信道后符号为1”和“信道后符号为0”。若对发送, 选取符号1和0的概率为:

$$P(B_1) = 0.6 \quad \text{和} \quad P(B_2) = 0.4$$

条件概率描述信道对所发送符号的影响。若各条件概率为

$$P(A_1 | B_1) = P(A_2 | B_2) = 0.95$$

$$\text{和} \quad P(A_2 | B_1) = P(A_1 | B_2) = 0.05$$

求 $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(B_1 | A_1)$, $P(B_2 | A_1)$, $P(B_1 | A_2)$ 和 $P(B_2 | A_2)$ 。

解: 对发射机发送符号1和0这两种情况, 因为 A_1 和 A_2 为接收端仅有可能发生的两个事件且为互斥事件, 所以

$$P(A_1 | B_i) + P(A_2 | B_i) = 1 \quad (i=1, 2)$$

根据全概率公式, 可得到接收的符号的概率:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1 | B_1)P(B_1) + P(A_1 | B_2)P(B_2) \\ &= 0.95 \times 0.6 + 0.05 \times 0.4 = 0.59 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_2) &= P(A_2 | B_1)P(B_1) + P(A_2 | B_2)P(B_2) \\ &= 0.05 \times 0.6 + 0.95 \times 0.4 = 0.41 \end{aligned}$$

根据贝叶斯公式有:

$$P(B_1 | A_1) = P(A_1 | B_1)P(B_1) / P(A_1) = \frac{0.95 \times 0.6}{0.59}$$

$$= 0.966$$

$$P(B_2|A_2) = P(A_2|B_2)P(B_2)/P(A_2) = \frac{0.95 \times 0.4}{0.41} \\ = 0.927$$

$$P(B_1|A_2) = P(A_2|B_1)P(B_1)/P(A_2) = \frac{0.05 \times 0.6}{0.41} \\ = 0.073$$

$$P(B_2|A_1) = P(A_1|B_2)P(B_2)/P(A_1) = \frac{0.05 \times 0.4}{0.59} \\ = 0.034$$

上述结果中, $P(B_1|A_2)$ 和 $P(B_2|A_1)$ 是系统发生故障的概率, 而 $P(B_1|A_1)$ 和 $P(B_2|A_2)$ 是系统正确传输符号的概率。

1.33 在题 1.32 中, 若 $P(B_1) = 0.7$, $P(B_2) = 0.3$, $P(A_1|B_1) = P(A_2|B_1) = 1.0$ 和 $P(A_2|B_2) = P(A_1|B_2) = 0$, 求 $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(B_1|A_1)$, $P(B_2|A_1)$, $P(B_1|A_2)$ 和 $P(B_2|A_2)$, 并判断该系统信道的类型。

解: 根据题 1.32 可得

$$P(A_1) = 1.0 \times 0.7 + 0.0 \times 0.3 = 0.7$$

$$P(A_2) = 0.0 \times 0.7 + 1.0 \times 0.3 = 0.3$$

$$P(B_1|A_1) = 1.0 \times 0.7 / 0.7 = 1.0$$

$$P(B_2|A_2) = 1.0 \times 0.3 / 0.3 = 1.0$$

$$P(B_1|A_2) = 0$$

$$P(B_2|A_1) = 0$$

因为在符号接收端出现错误的概率为零, 所以系统是理想的(即无噪声)。

1.34 某公司出售音频功率为 10, 25 和 50 W 的高保真度放大器。该公司现有 10 W 放大器 100 块, 其中 15% 为不合格品, 25 W 的 70 块, 其中 10% 为不合格品, 而 50 W 的 30 块, 其中 10% 为不合格品。

(1) 售出一块 10 W 的放大器为不合格品的概率是多少?

(2) 若每种放大器售出的可能性相等, 那么随意抽出一块为 50 W 且为不合格品的概率是多少?

(3) 随意抽取一块板出售为不合格品的概率是多少?