微波传输线理论与实用技术

黄志洵　王晓金 著

科学出版社

微波传输线理论与实用技术

黄志洵　王晓金　著

科学出版社
1996

（京）新登字 092 号

内 容 简 介

微波传输线和导波系统，不仅是能量和信息的载体及传递工具，而且是构成各种高频、微波元器件和设备的基础. 近几十年来，其理论研究和实用技术均得到了飞速发展.

本书全面论述了微波传输线理论与实用技术. 全书共四篇，即微波传输线的分析基础；超高频、微波 TEM 系统；微波传输线理论；微波传输线的实用技术. 书末附录中列出了传输线和波导的一些重要特性和参数.

本书内容丰富、资料翔实，文字通顺，是从事天线、微波、电波传播、雷达、通信等工作的科研人员和工程技术人员的很好的参考书，也是高等学校无线电电子学专业的教师、研究生和本科生的重要教学参考书.

微波传输线理论与实用技术

黄志洵　王晓金　著

责任编辑　唐正必

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂 印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1996 年 1 月第 一 版　　开本：787×1092　1/16

1996 年 1 月第一次印刷　　印张：26 1/2

印数：1—1500　　字数：622 000

ISBN 7-03-004618-8/TN · 171

定价：37.20 元

序

微波传输线的种类很多，其理论研究和应用技术发展日新月异. 无论是过去还是现在，它都引起了许多研究者的关注.

北京广播学院黄志洵教授和电子工业部传输线研究所王晓金高级工程师联合写作了本书，我认为是一件好事. 他们都是工作很努力的中年人. 黄志洵是国务院颁证“做出突出贡献的专家”，多年来为研究生讲授《导波理论》课程，并在美国杂志及国内学报上发表过多篇论文，他的专著《截止波导理论导论》曾获国家优秀科技图书奖. 王晓金在长期的微波科学技术工作中，完成了不少重要的工程项目，积累了丰富的经验，并创造了较大的经济效益. 他们的合作使本书在多方面具有特色. 我认为，大专院校师生及工程技术人员阅读本书都将有一定的收获.

是为序.

中国科学院院士
中国电子学会微波分会主任
电子科技大学教授

林为干

前　言

1938 年 2 月 2 日，美国无线电工程师协会(IRE)举行了一次关于波导的学术活动，在讲演之后演示了四种重要模式的技术情况. 1939 年 2 月 1 日，IRE 又搞了一次学术活动，主要演示喇叭(波导开口逐步扩大而成为天线)的有关技术. 两次活动引起了与会者的浓厚兴趣，也标志着微波时代的开始.

关于微波传输线与导波系统的论著，国内外都有一些经典著作. 例如，J. A. Stratton 的《电磁理论》1) (McGraw-Hill，1941)；Б. А. Введенский 和 А. Г. Аренберг 的《无线电波导》2) (Огиз. Гостехиздат，1946)；黄宏嘉的《微波原理》(科学出版社，1963，1964)等. 然而，科学技术是不断向前发展的，拿今天的学术水平来分析，在国内外已出版的著作中，会存在某些不足或局限性. 例如，J. A. Stratton 的《电磁理论》一书是一本重要的专著，它在我国有两种译本. 但该书第 9.5.1 节(“特征模”)中讨论了半径为 a 的无限长圆柱埋在无限大均匀媒质中的情形，使用 4 阶行列式即导出了特征方程，即该书中的式(9.5.9). 但 Stratton 断言说，该特征方程没有办法求根，只能在无限大媒质为良导体的情况下作近似处理. 黄志洵和潘津对此提出了不同的观点，并作出论证. 他们提出了在不作任何近似的条件下针对混合模(hybrid mode)HE_{11}的数值计算解法，并在 1987 年全国微波会议上作了报告，还发表了英文论文(计量学报，Vol. 8，No. 4，267－270，1987)和中文论文(微波学报，1988，No. 2，26－38)，详细介绍了求解过程. 在黄志洵的《截止波导理论导论》(第二版)(中国计量出版社，1991)一书中对此也有清楚的阐述.

另一个例子是关于椭圆波导. 前苏联科学院院士 Б. А. Введенский 和 А. Г. Аренберг 在《无线电波导》一书中曾说，对这种波导的研究只是一种科学兴趣，技术上未必有前途. 黄宏嘉教授在《微波原理(卷 I)》(1963)中也曾重复过这个观点. 但事实是，现在椭圆波导的生产和销售都已达到了很大的规模，这说明了该技术有着广泛的应用前景. 例如本书作者之一王晓金多年来在围绕椭圆波导的生产和推广应用方面作了大量工作，并已取得了较大的经济效益.

还应指出的是，近 20 年来微波 TEM 系统有了很大的发展. 这一情况在过去的著作中也是未曾估计到的. 本书包含了我们在这一领域中的研究成果，它对微波理论的研究(例如电磁兼容学研究等)和工程技术工作都有较大参考价值。此外，关于内壁有电介质层的金属壁圆波导的理论，书中也作了详细的论述，内容也比较丰富。

我们撰写这本书，目的在于力图描绘出微波传输线理论的全貌，同时希望能弥补某些经典著作中的不足. 书中采用时谐因子 $e^{j\omega t}(j=\sqrt{-1})$. 关于外国学者的姓名译法问题，除附录 A 中给出的国内普遍采用的 20 人的译名外，其余人名一律采用外文表示. 本书写作的分工如下：黄志洵撰写第一章至第十章、第十二章、第十三章，以及19.7节、20.2

1)　方能航译，科学出版社，1992.

2)　李敦复、钱景仁译，科学出版社，1959.

节、20.3节；王晓金撰写第十一章、第十四章至第十八章、第十九章(除19.7节)，以及20.1节和附录.全书稿由黄志洵负责整理.作者衷心感谢林为干院士在百忙中为本书作序.另外，我们谨向资助本书出版的强志光厂长，以及关怀帮助本书出版的张伦高级工程师、杨益新博士、李瑛女士表示衷心的感谢.本书的某些章节引用了我们与青年研究人员曾诚、贺涛、赵爱军等共同研究所取得的成果，在此顺致谢意.

黄志洵　王晓金

目　录

第一篇　微波传输线的分析基础

第一章　数学分析基础 …………………………………… (1)
1.1　矢量分析 …………………………………… (1)
1.2　Dirac-δ 函数与 Green 函数 …………………………………… (5)
1.3　泛函与变分 …………………………………… (10)
1.4　复变函数与保角变换 …………………………………… (12)
1.5　椭圆积分与椭圆函数 …………………………………… (15)
1.6　圆柱函数 …………………………………… (19)
1.7　Mathieu 函数 …………………………………… (27)
1.8　积分方程 …………………………………… (29)
参考文献 …………………………………… (32)
第二章　传输线的基本理论 …………………………………… (33)
2.1　历史简况 …………………………………… (33)
2.2　经典电报员方程 …………………………………… (40)
2.3　传输线的稳定正弦状态及二次参数 …………………………………… (46)
2.4　传输线上的反射 …………………………………… (49)
2.5　稳态传输线方程的双曲函数形式 …………………………………… (54)
2.6　传输线上的驻波 …………………………………… (57)
2.7　传输线的输入阻抗 …………………………………… (60)
2.8　无耗传输线 …………………………………… (64)
2.9　有耗传输线 …………………………………… (67)
2.10　四分之一波长阻抗变换器 …………………………………… (69)
2.11　共轭匹配问题 …………………………………… (71)
2.12　相速与群速、相时延与群时延 …………………………………… (73)
2.13　传输线的波矩阵分析 …………………………………… (78)
2.14　广义电报员方程 …………………………………… (81)
参考文献 …………………………………… (83)
第三章　导波系统的分析方法 …………………………………… (85)
3.1　导波系统的基本概念 …………………………………… (85)
3.2　本征值问题与非本征值问题 …………………………………… (88)
3.3　非齐次 Helmholtz 方程 …………………………………… (91)
3.4　导波系统的电磁场边值问题求解方法 …………………………………… (93)
参考文献 …………………………………… (101)
第四章　双导体导波系统概论 …………………………………… (102)
4.1　双平行板线 …………………………………… (102)
4.2　双平行圆柱导线 …………………………………… (106)
4.3　圆同轴线 …………………………………… (113)

4.4 微带线 …… (118)
4.5 矩形结构传输线 …… (121)
4.6 指数线 …… (126)
参考文献 …… (129)
第五章 波导概论 …… (131)
5.1 导波系统的色散图 …… (131)
5.2 矩形波导的一般分析 …… (134)
5.3 矩形波导的衰减常数 …… (142)
5.4 矩形波导的阻抗 …… (144)
5.5 波导中场的一般描述 …… (148)
5.6 圆波导的一般分析 …… (151)
5.7 圆波导的特征方程及求解 …… (156)
5.8 消失场 …… (160)
5.9 截止波导 …… (163)
5.10 功率波方法 …… (166)
5.11 微波金属表面问题简述 …… (170)
参考文献 …… (172)

第二篇 超高频、微波 TEM 系统

第六章 横电磁室概论 …… (173)
6.1 对 TEM 波的再认识 …… (173)
6.2 横电磁传输室特性阻抗准静态分析的显式计算 …… (176)
6.3 横电磁传输室特性阻抗准静态分析的级数计算 …… (180)
6.4 吉赫横电磁室特性阻抗的计算 …… (184)
6.5 横电磁室特性阻抗的测量 …… (191)
6.6 横电磁室系列中场强的准静态计算 …… (195)
6.7 平行板横电磁室的应用及其瞬态场测量问题 …… (200)
参考文献 …… (203)
第七章 矩形结构导波系统中的波分析 …… (205)
7.1 横电磁传输室的谐振现象及模式分析 …… (205)
7.2 横电磁传输室的端口特性测试结果及 UUFL 问题 …… (209)
7.3 角锥状同轴结构的导波分析 …… (215)
7.4 吉赫横电磁室的实验研究 …… (232)
参考文献 …… (238)
第八章 矩形结构导波系统中的若干理论与技术问题 …… (240)
8.1 矩形波导中加金属膜片时的分析 …… (240)
8.2 横电磁室系列的研究方向与技术改进 …… (248)
8.3 矩形波导用于准静态场强测量 …… (254)
参考文献 …… (256)

第三篇 微波传输线理论

第九章 单线表面波波导 …… (258)
9.1 Sommerfeld 表面波波导 …… (258)
9.2 Goubau 线原理 …… (261)

9.3 特征方程 …… (262)
9.4 单线表面波波导的性能及应用 …… (263)
参考文献 …… (269)
第十章 内衬电介质层的金属壁圆波导 …… (270)
10.1 BWB 方程和 Brown 方程 …… (270)
10.2 严格理论和普遍化特征方程 …… (281)
10.3 加衬圆波导中的模式和衰减 …… (287)
10.4 内衬单层有耗介质层圆波导的研究 …… (291)
10.5 内衬多层介质层圆波导的分析方法 …… (294)
参考文献 …… (294)
第十一章 椭圆波导理论 …… (296)
11.1 基本分析 …… (296)
11.2 椭圆波导的截止波长 …… (299)
11.3 椭圆波导的特性阻抗 …… (302)
11.4 椭圆波导的衰减常数 …… (304)
11.5 椭圆波导的功率容量 …… (307)
参考文献 …… (308)
第十二章 圆介质波导 …… (309)
12.1 基本概念 …… (309)
12.2 分析方法 …… (311)
12.3 圆棒介质波导的特征方程 …… (312)
12.4 光纤的特征方程及量子分析 …… (314)
12.5 圆管介质波导的特征方程 …… (317)
参考文献 …… (318)
第十三章 微波低温传输线 …… (319)
13.1 微波段低温传输线问题的提出 …… (319)
13.2 微波传输线的噪声功率问题 …… (321)
13.3 常导态时的金属表面电阻 …… (323)
13.4 超导体的物理机制 …… (324)
13.5 超导态时的金属表面电阻及微波超导传输线 …… (325)
13.6 高 T_c 超导体及微波超导传输线 …… (328)
13.7 从传输线理论看超导传输线的优点 …… (328)
参考文献 …… (330)
第四篇 微波传输线的实用技术
第十四章 射频电缆概论 …… (332)
14.1 同轴电缆的最高使用频率及传输功率 …… (332)
14.2 皱纹管同轴射频电缆 …… (333)
14.3 有线电视用同轴射频电缆 …… (335)
14.4 漏泄同轴电缆 …… (336)
参考文献 …… (341)
第十五章 矩形波导与脊波导 …… (342)
15.1 矩形硬波导概述 …… (342)

15.2 矩形硬波导的功率容量和充气技术 …………………………… (345)
15.3 矩形软波导概述 …………………………… (347)
15.4 皱纹波导的特征方程及场分布 …………………………… (352)
15.5 脊波导 …………………………… (355)
参考文献 …………………………… (357)
第十六章 圆波导 …………………………… (359)
16.1 圆形硬波导 …………………………… (359)
16.2 螺旋波导 …………………………… (361)
参考文献 …………………………… (363)
第十七章 椭圆波导与茧形波导 …………………………… (364)
17.1 光壁型椭圆波导 …………………………… (364)
17.2 皱纹型椭圆波导概述 …………………………… (366)
17.3 皱纹型椭圆波导的设计计算 …………………………… (367)
17.4 茧形波导 …………………………… (370)
参考文献 …………………………… (376)
第十八章 微波传输线过渡器 …………………………… (377)
18.1 传输线过渡器概述 …………………………… (377)
18.2 同轴线-波导过渡器 …………………………… (379)
18.3 微带向同轴线及波导的过渡 …………………………… (380)
18.4 矩形-圆形波导过渡器 …………………………… (381)
18.5 矩形-脊形波导过渡器 …………………………… (382)
18.6 矩形-椭圆波导过渡器 …………………………… (383)
18.7 矩形-茧形波导过渡器 …………………………… (384)
参考文献 …………………………… (385)
第十九章 波导元件 …………………………… (386)
19.1 弯波导和扭波导 …………………………… (386)
19.2 匹配负载和短路器 …………………………… (387)
19.3 波导定向耦合器 …………………………… (388)
19.4 魔 T …………………………… (391)
19.5 波导膜片及螺钉 …………………………… (392)
19.6 回转式波导衰减器 …………………………… (394)
19.7 截止波导衰减器 …………………………… (395)
参考文献 …………………………… (398)
第二十章 微波传输线的测试技术 …………………………… (399)
20.1 微波传输线的频域测量 …………………………… (399)
20.2 微波传输线的时域测量 …………………………… (404)
20.3 波导短路器的测量 …………………………… (406)
参考文献 …………………………… (408)
附录 …………………………… (409)
A. 国内已有确定译名的外国著名科学家 …………………………… (409)
B. 几种常用绝缘材料的电性能 …………………………… (409)
C. 常用金属材料的电阻率(常温) …………………………… (409)

D. 几种波导的基本特性 …………………………………………………………………… (410)
E. 驻波比、反射系数模、回波损耗、极化衰减器角度之间的关系 ………………………… (410)

第一篇　微波传输线的分析基础

第一章　数学分析基础

1837 年 7 月，英国人在 1500 米的距离上作了电报表演．这是人类历史上第一次进行的电讯联系，也是传输线的最早应用．自那以来，已经过去了一个半世纪．对于微波传输线，如果从 1936 年（用圆波导传输微波获得成功）算起，至今也有近 60 年的历史．微波理论与技术是在电磁场理论与经典电动力学基础上发展起来的，而这一切是与 19，20 世纪的数学发展紧密地联系在一起的．本章简述本书内容所需的若干数学分析基础．当然，我们的叙述仅着眼于满足以后各章分析的需要．

1.1　矢量分析[1,2]

仅用数值就能够表示的物理量称为标量．标量的实例如质量、温度、时间等．此外，现实世界中有一些必须由数值、方向综合表示才能确切说明的物理量，称之为矢量．常用的矢量如力、速度、加速度、电场强度、磁场强度等．本书中一律用黑正体英文字母表示矢量．

在一个三维正交曲线坐标系中，若沿三个相互垂直的坐标方向的分量都给定，则一个从该点发出的矢量也就被确定了．图 1.1 表示一个直角坐标系．设有一个空间矢量（也叫

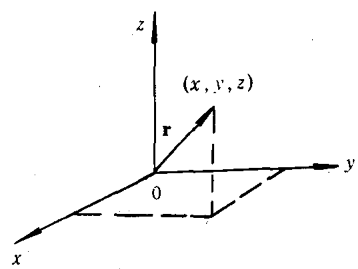

图 1.1　直角坐标系

位置矢量）$\mathbf{r}$，它以坐标系原点为起点，空间任意点(x,y,z)为终点，则有

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i}_x + y\mathbf{i}_y + z\mathbf{i}_z \tag{1.1.1}$$

式中，$\mathbf{i}_x,\mathbf{i}_y,\mathbf{i}_z$ 是三个方向的单位矢量．空间矢量的大小为

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.1.2}$$

又如，电磁学中的波矢量(wave vector)是指向波传播方向的矢量：

$$\mathbf{k} = k_x\mathbf{i}_x + k_y\mathbf{i}_y + k_z\mathbf{i}_z \tag{1.1.3}$$

显然，波矢量的大小为

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \tag{1.1.4}$$

如果波传播方向为 z 向，则式(1.1.3)成为

$$\mathbf{k} = k_z \mathbf{i}_z \tag{1.1.5}$$

现在介绍矢量的乘法. 设有两个矢量：

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i}_x + A_y \mathbf{i}_y + A_z \mathbf{i}_z \tag{1.1.6}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i}_x + B_y \mathbf{i}_y + B_z \mathbf{i}_z \tag{1.1.7}$$

如要使它们相乘，则有点积与叉积之分. 先看点积，**A** dot **B** 写作 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$，其结果为一标量：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \tag{1.1.8}$$

式中，θ 为两矢量的夹角，而 A，B 为

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$$

对于矢量的叉积，**A** cross **B** 写作 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$，其结果为一矢量，方向由右手定则确定，大小为

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = AB\sin\theta \tag{1.1.9}$$

矢量相乘的情况示意见图 1.2.

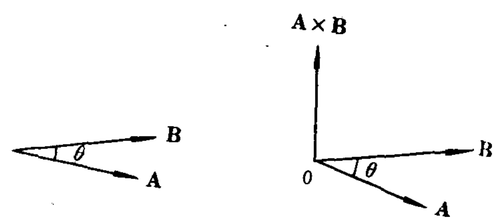

图 1.2　矢量相乘的示意图

关于矢量相乘，以下的几个关系式是有用的：

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \tag{1.1.10}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \tag{1.1.11}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = -\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{C} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) \tag{1.1.12}$$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{C} \cdot \mathbf{B})\mathbf{A} \tag{1.1.13}$$

现在讨论矢量的微分算子(也叫劈形算符). 微分算子最早由 W. R. Hamilton(1805—1865)引入，目的是使矢量分析更加方便. 一阶微分算子的定义为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{i}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{i}_z \tag{1.1.14}$$

把 ∇ 看成是一个矢量，还是一个微分符号？一般认为，∇ 兼有这两种性质. 传统的观点是，这个读作 nabla(古乐器名)的算子，只有作用在有连续的一阶偏导数的标量函数或矢量函数上时，才有意义. 下面分三个方面进行讨论：

(1) 梯度

∇ 与标量函数 u 相乘，得该函数的梯度 ∇u，是一个矢量函数. 对于直角坐标系，表示式为

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{i}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{i}_z \tag{1.1.15}$$

对圆柱坐标系 (r,φ,z) 为

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r}\mathbf{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\mathbf{i}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{i}_z \tag{1.1.16}$$

(2) 散度

∇ 与矢量函数 $\mathbf{A}$ 的点积,是该函数的散度,是一个标量函数. 对直角坐标系,表示式为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.1.17}$$

对圆柱坐标系为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.1.18}$$

(3) 旋度

∇ 与矢量函数 $\mathbf{A}$ 的叉积,是该函数的旋度,是矢量函数. 对直角坐标系,表示式为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_x & \mathbf{i}_y & \mathbf{i}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \tag{1.1.19a}$$

亦即

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{i}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{i}_z \tag{1.1.19b}$$

对圆柱坐标系,表示式为

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\mathbf{i}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\mathbf{i}_\varphi + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\mathbf{i}_z \tag{1.1.20}$$

以上三个方面,由于梯度、散度、旋度的对应英文为 gradient,divergence,curl,故 ∇u 也写作 grad$u$,$\nabla \cdot \mathbf{A}$ 写作 div$\mathbf{A}$,$\nabla \times \mathbf{A}$ 写作 curl $\mathbf{A}$.

1892年,亥维赛(O. Heaviside,1850—1925)通过对矢量的分析及 nabla 算子的处理,认为应注意定义式(1.1.14)所表现出来的微分性质. 他给出

$$\mathrm{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\mathrm{curl}\mathbf{H} \tag{1.1.21}$$

上式是正确的,但论证方法可以改进. 后来,E. B. Wilson 在其"Vector Analysis"(1901年)一书中,对 ∇ 与矢量的点积、叉积作了系统的论述和规定.

近年来,专家们再次对矢量分析中的定义与符号问题作了研究,目的是更严谨地进行数学处理. 例如,美籍华人戴振铎(C. T. Tai)于1988年指出,可以引入新的符号$\triangledown$,它也是矢量;另外,可以引入新的定义$T(\triangledown)$,它相当于过去的∇. $\triangledown$与任何矢量一样,可进行矢量代数运算而不发生问题. 这位研究并矢 Green 函数的专家重新定义了梯度算子、散度算子和旋度算子:

$$\nabla u = \mathrm{grad}u$$

$$\overset{\cdot}{\nabla}\mathbf{A} = \mathrm{div}\mathbf{A}$$

$$\overset{\times}{\nabla}\mathbf{A} = \mathrm{curl}\mathbf{A}$$

这些算子在他的“Generalized Vector and Dyadic Analysis”(IEEE Press,1991)专著中都有详细论述.

不过,戴振铎教授建议的符号,目前尚未被普遍了解和接受.以下是经典理论中的运算公式,读者仍应掌握:

$$\nabla(u+v) = \nabla u + \nabla v \tag{1.1.22}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B} \tag{1.1.23}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B} \tag{1.1.24}$$

$$\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u \tag{1.1.25}$$

$$\nabla\cdot(u\mathbf{A}) = \mathbf{A}\cdot\nabla u + u\nabla\cdot\mathbf{A} \tag{1.1.26}$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\nabla\times B \tag{1.1.27}$$

$$\nabla\times(u\mathbf{A}) = \nabla u\times\mathbf{A} + u\nabla\times\mathbf{A} \tag{1.1.28}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = {} & \mathbf{A}\nabla\cdot\mathbf{B} - \mathbf{B}\nabla\cdot\mathbf{A} \\ & + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}\end{aligned} \tag{1.1.29}$$

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{A} = 0 \tag{1.1.30}$$

$$\nabla\times\nabla u = 0 \tag{1.1.31}$$

现在我们转而讨论二阶微分算子.数学家 P. S. Laplace(1749—1827)给出以下的符号:

$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla \tag{1.1.32}$$

称 ∇^2 为二阶微分算子 Laplacian;对于直角坐标系,有

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.33}$$

而对于圆柱坐标系,有

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.34}$$

因此,标量函数 u 的 Laplacian 仍为标量函数:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

而矢量函数 $\mathbf{A}$ 的 Laplacian 仍为矢量函数:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$$

过去，人们习惯以下式作为定义：

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{1.1.35}$$

对此，戴振铎在他的书中作了澄清，指出它不是定义，而是可证明的恒等式.

最后我们指出，在直角坐标系中，规定二维 Laplacian 为

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{1.1.36}$$

式中 t 代表横向. 故有

$$\nabla^2 = \nabla_t^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.1.37}$$

以上所述是研究传输线问题所必须的矢量分析知识.

1.2 Dirac-δ 函数与 Green 函数[3]

我们现在从公式(1.1.1)及(1.1.2)出发，对空间矢量作微分算子运算，有

$$\nabla r = \frac{\partial r}{\partial x}\mathbf{i}_x + \frac{\partial r}{\partial y}\mathbf{i}_y + \frac{\partial r}{\partial z}\mathbf{i}_z \tag{1.2.1}$$

然而，可以证明

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

等等，因而有

$$\nabla r = \frac{x}{r}\mathbf{i}_x + \frac{y}{r}\mathbf{i}_y + \frac{z}{r}\mathbf{i}_z$$

亦即

$$\nabla r = \frac{1}{r}\mathbf{r} \tag{1.2.2}$$

然而，由于梯度运算与微分运算的相似性，有

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\nabla r \tag{1.2.3}$$

联立以上两式，可得

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\mathbf{r} \tag{1.2.4}$$

我们现在计算下面的体积分：

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dv = \frac{1}{4\pi}\iiint_V \nabla \cdot \left[\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right] dv$$

根据 Остроградский-Gauss 定理，体积分可转为包围总体积 V 的面积 S 上的面积分：

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) dv = \frac{1}{4\pi}\oiint_S \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot d\mathbf{S}$$

把式(1.2.4)代入上式，得

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)dv = \frac{-1}{4\pi}\oiint_S \frac{1}{r^3}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{S} \tag{1.2.5}$$

设有一立体角 $d\Omega$，它所对的由球面截出的面元为 dS_0，球半径为 r，则 $d\Omega$ 定义为

$$d\Omega = \frac{dS_0}{r^2}$$

设任意面元 dS 与 dS_0 的夹角为 α，则有

$$dS_0 = (dS)\cos\alpha = \frac{1}{r}d\mathbf{S}\cdot\mathbf{r}$$

故有

$$d\Omega = \frac{1}{r^3}d\mathbf{S}\cdot\mathbf{r} \tag{1.2.6}$$

把此式代入式(1.2.5)，得

$$\frac{1}{4\pi}\iiint_V \nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)dv = \frac{-1}{4\pi}\oiint d\Omega = -1 \tag{1.2.7}$$

这个关系式是很有用的.

所谓 Dirac-δ 函数，不是一个分析函数，而是一个符号函数. 在物理学中，体积与密度的乘积为质量. 如在减小体积的同时增大密度，则质量不变. 若体积 → 0，势必要求密度 → ∞.

所谓单位点源(a unit point source)，是指体积极小、密度极大、乘积为1的源. 定义单位点源的密度函数为 δ，则有

$$\iiint_V \delta dv = 1 \tag{1.2.8}$$

在静电学中，点电荷就是一种极限情况(体积极小而体电荷密度极大). 单位点电荷的总电荷为1. 这时，δ 函数即单位点电荷的体密度函数.

根据以上讨论，我们有

$$\delta = \frac{-1}{4\pi}\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) \tag{1.2.9a}$$

也可写作

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta(r) \tag{1.2.9b}$$

这些是表述 Dirac-δ 函数性质的基本公式.

图1.3是图形化的数学解释. 定义一个函数：

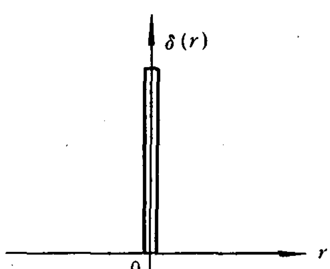

图1.3 δ函数图示