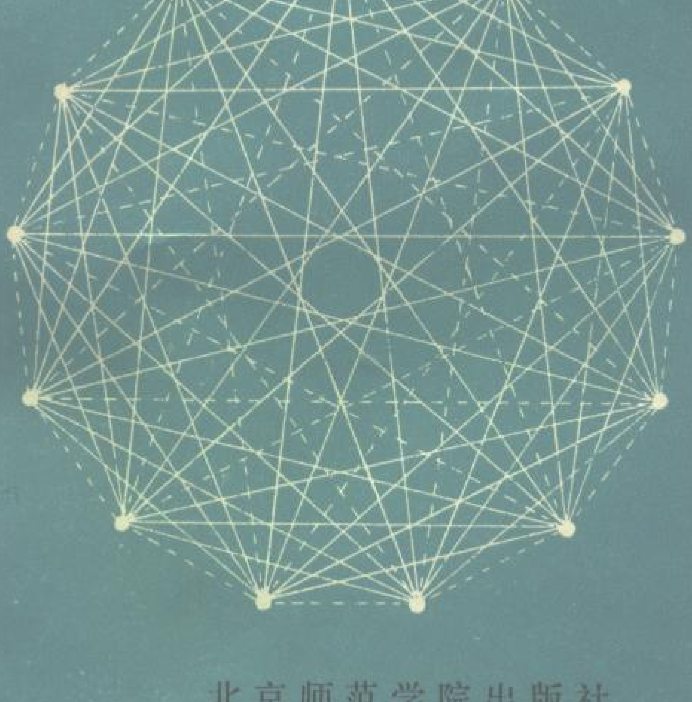
组合数学

李宇寰 编著

陶懋颀 审阅



北京师范学院出版社

组 合 数 学

李宇寰 编著

陶懋颀 审阅

北京师范学院出版社

1988年 · 北京

内容提要

组合数学是一门历史悠久的学科，近几十年来得到了迅速发展。由于组合方法在自然科学以及社会科学中的应用日益广泛，组合数学的思想、方法和理论日渐受到人们的重视。目前，不仅在很多大学开设了这门课程，就是在中学也有很多的老师和学生对它产生了浓厚的学习兴趣。本书正是为适应这一要求而编写的，内容包括：排列与组合，生成函数，递归方程，容斥原理，反演公式，波利亚计数定理，抽屉原理和瑞姆赛定理以及相异代表组。

组 合 数 学

李宇寰 编著

陶懋颀 审阅

*

北京师范学院出版社出版

（北京阜成門外花园村）

新华书店首都发行所发行

国防出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 1/32 印张：12 字数：261千

1988年11月北京第1版 1988年11月北京第1次印刷

印数：0,001－5,000册

ISBN 7-81014-101-5/G·99

定价：4.50 元

序

国内出版的为大学生或研究生用的中文组合数学书，除内容十分专一者外，据我们所知，主要有柯召、魏万迪教授的《组合论》上册（科学出版社，1981），卢开澄教授的《组合数学——算法与分析》上、下册（清华大学出版社，1983），徐利治等教授的《计算组合数学》（上海科技出版社，1983）。从外文翻译的，还有一批教材及参考书，其中应特别指出的有 R·Brualdi 的《组合学导引》（华中工学院出版社，1982），H·J·Ryser 的《组合数学》（科学出版社，1983），I·Tomescu 的《组合学引论》高等教育出版社，1985），C·Berge 的《组合学原理》（上海科技出版社，1986）及 C·L·Liu（刘炯明）的《组合数学引论》（四川大学出版社，1987）。

虽然有了这些大学（或大学以上）教材水平的组合数学书，李宇寰同志的这本书仍然有它出版的意义。这主要是因为，一方面，书的取材比较好，它几乎囊括了大学组合数学的一切应讲的内容；另一方面，在内容的展开上能够切实考虑我国学生的情况，说理比较仔细，比较注意由浅入深，同时汇集了大量例题，因此，从一定意义上讲，本书便于我国大多数需讲组合数学的院校使用，也便于需要自学组合数学的科技人员选学。另外有志于改善我国中学数学教学的广大中学教师，也会发现这是一本手头应备的参考书。

以上便是我愿不揣冒昧用写这篇短序来向读者推荐本书的原因。

陶懋颀

1987 年国庆节

编者的话

随着电子计算机科学、计算数学、统计学、规划论以及许多应用科学的发展，组合数学这门历史悠久的学科在近几十年来相应的得到了迅速发展。由于组合方法在自然科学以及在社会科学中应用日益广泛，因此组合数学的思想、方法和理论日渐受到人们的重视。

组合数学的特点是内容上丰富多采，方法上巧妙多变，它对培养学生的思维才智和解决实际问题的能力起到了良好作用。目前，不仅很多大学开设了这门课，就是在中学也有很多的老师和学生对它产生了浓厚的学习兴趣。因此，尽快普及发展组合数学的方法和理论，使学生得到这方面的系统知识和正规训练是十分有益和必要的。基于这一思想，并适应教学的需要，我把我在北京师范学院数学系及北京计算机学院软件系进行教学的讲义，重新做了整理，编写出版了这本书。我希望能够遵从由浅入深、从具体到一般、先应用后理论的原则并结合大量有趣的应用例题，使学生比较容易的接受组合数学的思想、方法和理论。书中对一些重要的定理，在证明之前首先举例分析，初学者或者非数学专业的学生对于其中定理较难的证明（例如 de Bruijn 定理，Ramsey 定理等）可以略去不读而直接通过例题掌握方法，这并不妨碍对其它内容的学习和应用。

北京计算机学院陶懋颀教授和美国加州大学孙述寰教授曾对这本书的手稿进行了仔细的审阅，并提出了许多宝贵意

见，在此我表示衷心的感谢。并对给予我指导和帮助的林有浩教授、卢开澄教授以及范振民副教授等表示衷心的感谢。对于书中存在的错误和不足，恳请读者批评指正。

李宇寰

1987.10

目　　录

第一章　排列与组合

排列、组合的计数是组合计数的基础，读者在中学已学过一些初步的排列、组合知识。本章在此基础上扩展其内容。

§1　两个基本计数法则

加法法则　如果完成一件事有两个方案，而第一个方案中有m种方法，第二个方案中有n种方法，只要选择其中任何一个方案中的一种方法这件事就可以完成，并且所有这些方法中，任何两种方法都不相同，则完成这件事的方法共有$m+n$种。

这一法则可用集合的语言叙述为：

设A是一个具有m个元素的集合，B是一个具有n个元素的集合，如果A与B没有公共元素即$A\cap B=\phi$（ϕ表示空集），则$A\cup B$是一个具有$m+n$个元素的集合。

乘法法则　如果完成一件事分两个步骤，在第一步骤中有m种方法，在第二步骤中有n种方法，必须经过两个步骤而每个步骤可任选一种方法这件事才能完成，则完成这件事的方法共有$m\cdot n$种。

这一法则用集合的语言可叙述为：

设A是一个具有m个元素的集合，B是一个具有n个元素的集合，记$(a,\ b)$为一有序对，其中$a\in A$，$b\in B$。

所有这种有序对构成的集合称为 A 和 B 的积集，记作 $A\times B$。

用符号 $|A|$ 表示有限集 A 所含元素的个数，同样用 $|B|$ 表示有限集 B 所含元素的个数，当 $|A|=m,|B|=n$ 时，$A\times B$ 是一个具有 $|A|\cdot|B|=m\cdot n$ 个有序对的集合。

例 1 某班有男生 22 人，女生 18 人，问该班共有学生多少人？

解 用集合 A 表示男生，集合 B 表示女生，该班中的学生或是属于集 A 或是属于集 B，根据加法法则，全班学生的总数应为 $22+18=40$ 人。

例 2 某变量的名字由两位有效字符组成，第一位必须是英文大写字母 $A\sim Z$ 中的一个，第二位可以不写或是 $0\sim 9$ 中的一个数字。问该变量可以有多少种不同的名字？

解 第一位字符的集合有 26 个元素，第二位字符的集合有 11 个元素，根据乘法法则该变量不同的名字可有 $26\times 11=286$ 个。

以上两个法则均可推广到有限多个集的情况。它们是从生活实践中总结出的规律，应用很广，最直接的应用就是排列组合问题。但需要注意的是两个法则条件的区别：若完成一件事所用的几个方案彼此之间是独立的，是“或”的关系，即选择每个方案中的每个方法都可单独完成这件事，则应使用加法法则；若完成一件事要分若干步骤，每个步骤都不可缺少，是“与”的关系，即各步骤之间是相互联系着的，则应使用乘法法则。在很多情况下需要混合使用，但在解题、推导公式、证明定理中用的较多的是乘法法则。

§2 排列与组合

1. 排列

集合S有n个元素，从中选取r个元素作有序排列，且在排列中不允许任何元素重复出现，则称这种排列为S的r-无重排列。

S的所有r-无重排列的个数用$P(n, r)$或P_n^r表示。并规定当$r>n$时，$P(n, r)=0$。

定理 1 n个元素的r-无重排列的个数为

$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$,

$P(n, n)=n!$。

〔**证法 1**〕 在从n个不同的元素中顺序取出r个元素时，第一个元素有n种不同的选取，当第一个元素选定后，第二个元素可以从剩下的（$n-1$）个元素中任选一个，计有（$n-1$）种不同的选取，……，第r个元素这时剩下（$n-r+1$）个元素可供选取，故第r个元素有（$n-r+1$）种不同的选取。因此根据乘法法则，顺序选取r个元素共有不同的选取方法数应为

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

这个公式比较容易记忆：乘积共有r个因子，从n开始后边每个因子比前一因子小1，读作"n的降r阶乘"，记作$[n]_r$。

〔**证法 2**〕 我们采取将排列按起始元素来分类的方法计算。

先选取任一元素a_1作为排列的第一位元素，这样的排列数应为$P(n-1, r-1)$，因为这等于在把a_1除外的

$(n-1)$ 个元素中选取 $(r-1)$ 个元素的排列数。又由于 n 个元素中的任意一个元素都可选作起始元素，从而有

$$P(n, r)=nP(n-1, r-1)。$$

同样道理，可知

$$P(n-1, r-1)=(n-1)P(n-2, r-2)。$$

依此类推最终可得

$$\begin{aligned}P(n-r+2, 2)&=(n-r+2)P(n-r+1, 1)\\&=(n-r+2)(n-r+1),\end{aligned}$$

故有

$$P(n, r)=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)。$$

我们经常把 r-无重排列问题用下面模型来描述。

模型 P：将 n 个不同的球放入到 r 个不同的盒里，每盒放一个，则共有 $P(n, r)$ 种不同的放法。

上面的这种排列元素是排在一条直线上的，故也叫做“线形排列”。

如果从具有 n 个元素的集合 S 中，选取 r 个元素排列成圆圈，则这种排列叫做 S 的 r-圆形排列。

下面先通过例子看一下圆形排列与线形排列的相互关系，从而找出计算公式来。

例 从1，2，3，4，5这五个数字中，每次取出四个不同的数字组成圆形排列。问共有多少个不同的圆形排列？

解 首先，我们取出一个圆形排列进行分析，例如取1，2，3，4按顺时针组成圆形排列，它可以排成以下四种形状，见图1-1，每个排列只是元素位置改变，元素之间的相对顺序未变，我们规定，它们是同一个圆形排列。

如果我们把下面的圆形排列在圆周的左上角断开拉成直线，便会得到四个不同的线形排列：1234，4123，3412，

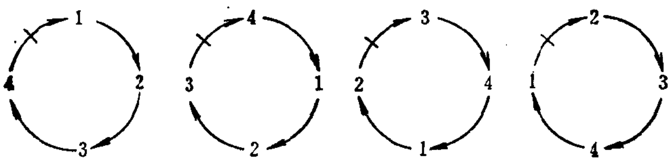


图 1-1

2341。

由此看出一个圆形排列对应了四个线形排列，其原因在于圆形排列没有首尾之分，而线形排列则首尾分明。假定圆形排列数为N，其线形排列为$P(5,4)$，因此$4N=P(5,4)$，所以

$$N=\frac{P(5,4)}{4}=\frac{5\times4\times3\times2}{4}=30。$$

把以上分析推广到一般情形便有：

定理 2 n个元素的集合S，它的所有r-圆形排列数N为

$$N=\frac{P(n,r)}{r}，当 r<n 时；$$

$$N=(n-1)!，当 r=n 时。$$

〔**证明**〕 一个r-圆形排列，分别从r个不同位置断开，可以得到r个不同的r-无重排列，即恰好有r个线形的r-无重排列，它们分别头尾接成圆形后是同一个r-圆形排列，因此所有r-圆形排列的数目是

$$\frac{P(n,r)}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}$$

2. 组合

集合S有n个元素，从中选取r个元素，不考虑它们的

排列顺序，且在选取中不允许任何元素重复出现，叫做S的r-无重组合。

S的所有r-无重组合的个数记作$C(n, r)$，C_n^r或$\binom{n}{r}$。并规定

$$\binom{0}{0}=1,\ \binom{n}{0}=1,\ \binom{0}{r}=0 \text{ 和}$$

$$\binom{n}{r}=0 \text{ 当 } r>n \text{ 时。}$$

定理3 当$r \leqslant n$时，有

$$C(n, r)=\frac{P(n, r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

〔**证明**〕 由定义可知r-无重组合与r-无重排列之区别就在于前者不计元素的先后顺序，集合S的一个r-无重组合就是S的一个r元子集，而任意一个r元子集都可以作出$r!$个r-无重排列，于是若有$C(n, r)$种r-无重组合，则

$$C(n, r)\cdot r!=P(n, r)$$

为n元集合S的全部r-无重排列，由此得到

$$C(n, r)=\frac{P(n, r)}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

r-无重组合也可以用下面两种形式的模型来描述。

模型C：从n个不同的球中，每次抽出r个，不计它们的次序。则所有的不同组合数为$C(n, r)$。

模型C'：把n个不同的球分成两组，一组r个，另一组$n-r$个，则所有的不同组合数为$C(n, r)$。

§3 重集的排列与组合

一个重集定义为一些对象的总体，但这些对象有些是相同的（或说是重复的）。例如$S=\{a, a, a, b, b, c\}$。

在重集里，一个元素的重数是它在该集里出现的次数，如上面S中a的重数为3，b的重数为2，c的重数为1。因此又可记作$S=\{3\cdot a,\ 2\cdot b,\ c\}$。

如果某一元素无限次重复，它的重数为∞。

在上一节的排列、组合定义中，从n元集S里选取r元进行排列或组合时，均要求任何元不重复出现。若允许元素在每次排列、组合中重复出现，我们叫这样的排列与组合为r-可重排列和r-可重组合。例如取$S=\{a, b, c\}$，则S的2-无重排列共6个，它们是：

$$ab,\ ac,\ ba,\ bc,\ ca,\ cb.$$

S的2-无重组合共3个，它们是：

$$ab,\ ac,\ bc.$$

若S中的元素允许重复，即a，b，c在该集里出现的次数没有限制，这时有$S=\{\infty\cdot a,\ \infty\cdot b,\ \infty\cdot c\}$，则$S$的2-可重排列共9个，它们是：

$$aa,\ ab,\ ac,\ ba,\ bb,\ bc,\ ca,\ cb,\ cc.$$

S的2-可重组合共6个，它们是：

$$aa,\ bb,\ cc,\ ab,\ ac,\ bc.$$

1. 重集的排列

定理4 设$S=\{\infty e_1,\ \infty e_2,\ \cdots,\ \infty e_n\}$，则$S$的$r$-可重排列的总个数是

$$U(n, r)=n^r.$$

〔证明〕 从S中每次取r个元素作排列，但在选取过程中任何一个元素均允许重复出现。第一个位置有n种取法，第二个位置仍有n种取法，……，第r个位置也有n种取法。根据乘法原则即可得到$U(n, r)=n^r$。

这个定理可用下面模型来描述。

模型U：有n个不同颜色的球，每种颜色的球有足够多，从中取出r个（r可以大于n）排成一排，则所有不同的排法数目为

$$U(n, r)=n^r.$$

定理5 设$S=\{n_1e_1, n_2e_2, \cdots, n_ke_k\}$，且$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，则$S$的$n$-可重排列数目是

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

〔证明〕 假设S的n-可重排列数目为N，现在若把其中每一个排列里的n_1个e_1换成n_1个彼此不同的元素，这n个新元素可以按$n_1!$种方法在原来都是e_1的位置上排列，故这时每个排列都产生出$n_1!$个新排列。在如此产生的新排列的集合中，同理可把每个排列中的n_2个e_2换成n_2个彼此不同的元素，这时每个排列又产生出$n_2!$个新排列。如此继续替换，最后得到n个元素的$n!$个排列，即

$$N\cdot n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!=n!$$

所以

$$N=\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_k!}.$$

这个重复次数有限的排列问题也可以转化为下面的组合问题。即把$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$个位置看做元素，分成k个组：第一组有n_1个元素（即e_1所在的位置），第二组有n^2