工科大学数学教程（Ⅱ）

下　册　（计算方法概率统计）

许承德　张池平　主编
关　忠　匡　正　王　勇　副主编

哈尔滨工业大学出版社

工科大学数学教程（Ⅱ）

（下册）

许承德　张池平　主　编
关忠　匡正　王勇　副主编

哈尔滨工业大学出版社

D2 67 524

内容简介

本书是以国家教委1995年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求为纲，针对培养21世纪工程技术人才的需要，吸取我校多年教学经验而编写的系列课程教材。

工科大学数学教程包括：微积分，空间解析几何与线性代数，常微分方程，计算方法，概率与统计。

工科大学数学教程（Ⅱ）（下册）共十三章，主要内容有：误差与插值、数值积分、非线性方程求根的迭代法、常微分方程初值问题的数值解法、线性代数方程组的解法、随机事件与概率、条件概率与独立性、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征与极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验。每章后均配有一定数量的习题。本书最后附有各章的习题答案、附表1～6及英汉词汇索引。

本书可作为工科大学本科生数学课教材，也可作为准备考工科硕士研究生的人员和工程技术人员的参考书。

工科大学数学教程（Ⅱ）（下册）

Gongke Daxue Shuxue Jiaocheng

许承德　张池平　主编

*

哈尔滨工业大学出版社出版发行

黑龙江大学印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 18　字数 412 千字

1997 年 2 月第 1 版　1999 年 7 月第 3 次印刷

印数　7 501—10 500

ISBN　7-5603-1190-3/O・81　定价 20.00 元

前　　言

本教程是参照国家教委1995年颁布的高等工业学校本科各门数学课程教学基本要求和1997年研究生入学考试大纲而编写的。在编写过程中，充分考虑了培养21世纪工程技术人才对数学的要求和国家教委关于系列课程改革的精神，并吸取了我校多年来数学教学改革的经验，编写成了这套系列数学教材——《工科大学数学教程》。

本教程的编写力求做到具有以下特色：

1. 把过去的几门课程内容融汇在一起，有机地结合，但又保持一定的独立性，构成一个系列课程教材。这样，既保证了提高教学质量，又压缩了教学时数。

2. 重视对学生能力的培养，注意提高学生基本素质。对基本概念、理论、思想方法的阐述准确简洁、透彻深入。取材上，精选内容，突出重点，强调应用。

3. 以附录形式开了一些新知识窗口，以开阔学生视野，为进一步学习提供初步基础。

4. 例题与习题都很丰富，若干章节之后还有综合性的例题，有利于学生掌握所学内容，提高分析问题、解决问题的能力。

本教程分为Ⅰ、Ⅱ两个系列，每个系列分上、下两册。教程Ⅰ、Ⅱ可在大学一年级同时并行讲授，计280学时左右，其中Ⅰ上册76学时，Ⅱ上册64学时；Ⅰ下册70学时，Ⅱ下册70学时。教程中带*号的部分可供不同专业选学，教师可选讲一部分例题，留一部分例题供学生自学，一些章节后的附录仅供学生参考。

哈尔滨工业大学数学系的富景隆、金永洙、杨克劭、曹彬、崔明根五位教授分别审阅了全教程的各部分内容，提出了许多宝贵的意见，在此表示衷心地感谢。由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

哈尔滨工业大学《工科大学数学教程》编委会

1996年6月

目　录

第十章　误差与插值

对数学问题进行数值求解，求得的结果一般都包含有误差。因此，数值计算绝大多数情况是近似计算，这往往会造成数值分析不具有数学的严密科学性的错觉，可以随意地近似。误差分析和估计正是数值分析严密科学性的具体体现。

而插值法是应用十分广泛的一种方法。例如，在查对数表时，要查的数据在表中找不到，于是就先找出它相邻的数，再从表的旁边找出其修正值，按一定关系把此相邻的数加以修正，就可求出要找的数。这个修正关系如何得到的呢？实际上就是一种插值。

本章的目的是详细介绍误差和插值方法。

10.1　误差来源与误差

10.1.1　误差来源

数值结果中的误差通常来自固有误差与计算误差，如下面所示

$$\text{误差来源}\begin{cases}\text{固有误差}\\ \text{计算误差}\begin{cases}\text{截断误差}\\ \text{舍入误差}\end{cases}\end{cases}$$

固有误差一般是由求解问题的数学模型本身所固有的，它包括对实际物理过程进行近似的数学描述时所引起的误差。例如在经典力学问题中，我们常常忽略相对论效应。但是，如果这种误差不可忽略，说明数学模型选择的不好。固有误差的另一来源是物理数据的不精确性，这些数据往往是由实验观测而得到的，从而带有观测误差，例如在重力公式 $f=mg$ 中的 g。由于固有误差的产生往往涉及各专业知识及实验手段。所以，它不是计算方法所研究的内容。

计算误差主要有两个来源。一个是由于在求解某一个已公式化的数学问题时，不是对其本身求解而是对它的某一近似问题求解而造成的，常称为截断误差或方法误差。这类误差往往是由有限过程逼近一个无限过程的时候产生的。比如，函数 e^x 可展开为幂级数形式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \tag{10.1}$$

如果用式(10.1)右端前 $n+1$ 项

$$S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{x!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \tag{10.2}$$

来近似 e^x 的无穷多项的和，所产生的误差就是这一问题的截断误差，为

$$e^x - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \qquad 0 < \theta < 1 \tag{10.3}$$

再比如序列

$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + \dfrac{7}{x_n}) \qquad n = 0,1,2,\cdots \end{cases} \tag{10.4}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{7}$。所以，可以用无限迭代过程式(10.4)的有限次结果来得到 $\sqrt{7}$ 的近似值，而产生的误差也是截断误差。

通常这类误差的精确值是不能求得的(当然，若能知道误差的确切值，便能将其消除)。所以，人们一般只对这类误差的某一估计值或它的某一个界感兴趣。

产生计算误差的另一重要来源是:算术运算几乎不可能在计算机上完全精确地进行。首先，由于计算机所能表示的数字的位数有限(即字长有限)，在进行计算时，对超过计算机所能表达的位数时，数字就要进行舍入;其次，尽管有些数据可以精确地由计算机表达，但是，当进行乘除运算时，常常也要对其运算的结果进行舍入，例如计算 $\frac{1}{3}$。通过对某一个数进行舍入而产生的误差称为舍入误差。

一般情况，每一步的舍入误差是微不足道的，但是经过计算过程的传播和积累，舍入误差可能会对真解产生很大的影响。甚至在一些情况中，一次的舍入就会大大改变计算结果。

10.1.2 误差的概念与有效数字

定义 10.1 设 $\tilde{x}$ 代表准确值 x 的一个近似值，称

$$E(\tilde{x}) = x - \tilde{x} \tag{10.5}$$

为近似值 $\tilde{x}$ 的**绝对误差**。

显然，绝对误差依赖于量纲。通常无法准确地算出绝对误差的真值，只能根据具体测量或计算的情况估计它的绝对值的范围，也就是去估计 $|E(\tilde{x})|$ 的上界，设

$$|E(\tilde{x})| = |x - \tilde{x}| \leqslant \varepsilon \tag{10.6}$$

称 ε 为 $\tilde{x}$ 的绝对误差限。

在工程技术上，常将不等式(10.6)表示成

$$x = \tilde{x} \pm \varepsilon$$

绝对误差的大小，在许多情况下还不能完全刻画一个近似值的精确程度。如有两个数

$$x = 10 \pm 0.1, \qquad y = 10^{15} \pm 10^6$$

这里 y 的绝对误差是 x 的 10^7 倍，但是不能就此断定近似值 $\tilde{x}$ 一定比 $\tilde{y}$ 精确程度高。若考虑到数本身的大小，在 10^{15} 内差 10^6 显然比在 10 内差 0.1 更精确些，这说明一个近似值的精确程度，除了与绝对误差有关，还与精确值本身有关，为此引入相对误差概念。

定义 10.2 设 $\tilde{x}$ 是精确值 x 的一个近似值，称

$$RE(\tilde{x}) = \frac{E(\tilde{x})}{x} = \frac{x - \tilde{x}}{x} \tag{10.7}$$

为近似值 $\tilde{x}$ 的**相对误差**。

相对误差是无量纲的，通常用百分数表示。与绝对误差类似，只能估计相对误差绝对值的某一个上界。当

$$|RE(\tilde{x})| \leqslant \varepsilon_r \tag{10.8}$$

则称 ε_r 为近似值 $\tilde{x}$ 的相对误差限。

由于

$$\frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}} - \frac{x-\tilde{x}}{x} = \frac{(x-\tilde{x})^2}{\tilde{x}x} = \left(\frac{E(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right)^2 \left[\frac{1}{1+\frac{E(\tilde{x})}{\tilde{x}}}\right]$$

当

$$\left|\frac{E(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right| \leqslant \frac{1}{2}$$

有

$$\left|1+\frac{E(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right| \geqslant 1 - \left|\frac{E(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right| \geqslant \frac{1}{2}$$

从而

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}} - \frac{x-\tilde{x}}{x}\right| \leqslant 2\left(\frac{E(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right)^2$$

当 $\left|\frac{E(\tilde{x})}{\tilde{x}}\right|$ 很小时，$\frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}$ 与 $\frac{x-\tilde{x}}{x}$ 的差是 $\frac{E(\tilde{x})}{\tilde{x}}$ 的平方量级，可以忽略不计，因此，在实际计算中，常取

$$RE(\tilde{x}) = \frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}} \tag{10.9}$$

表示一个近似数时，为了同时反映它的准确程度，常常用到“有效数字”的概念。

定义 10.3 若 x 的某一近似值 $\tilde{x}$ 的绝对误差限是某一位的半个单位，则从这一位起直到左边第一个非零数字为止的所有数字都称为 $\tilde{x}$ 的有效数字。具体地说，对于数 x，经四舍五入之后，得到它的近似值 $\tilde{x}$

$$\tilde{x} = \pm\,(x_1 \cdot 10^{-1} + x_2 \cdot 10^{-2} + \cdots + x_n \cdot 10^{-n}) \cdot 10^m \tag{10.10}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是 0,1,2,…,9 这十个数字之一，$x_1 \neq 0$，n 是正整数，m 是整数。如果 $\tilde{x}$ 的绝对误差满足

$$|x-\tilde{x}| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \tag{10.11}$$

这时，可以说 $\tilde{x}$ 作为 x 的近似值，具有 n 位**有效数字**。其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是 $\tilde{x}$ 的有效数字。$\tilde{x}$ 称为具有 n 位有效数字的有效数，也可以说它准确到第 n 位。

例如 按舍入原则分别写出下列各数具有五位有效数字的近似数

$$0.03785551,\qquad e=2.718281828\cdots,\qquad 0.002030002$$

按定义，上述各数具有五位有效数字的近似数分别是

$$0.037856,\qquad 2.7183,\qquad 0.0020300$$

需要注意的是，有效数 0.00203 与 0.0020300 是不同的，前者具三位有效数字，其绝对误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$，而后者具五位有效数字，其绝对误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-7}$。

根据式(10.11)，n 越大，绝对误差限越小。即有效位数越多，数字越准确。

下面再来讨论有效数字与相对误差的关系。一个具有 n 位有效数字的近似值 $\tilde{x}$ 的相对误差可如下估计。由式(10.10)知

$$x_1\cdot10^{m-1}\leqslant|\tilde{x}|\leqslant(x_1+1)\cdot10^{m-1}$$

所以

$$|RE(\tilde{x})|=\left|\frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}\right|\leqslant\frac{\frac{1}{2}\times10^{m-n}}{x_1\cdot10^{m-1}}=\frac{1}{2x_1}\cdot10^{-(n-1)}\tag{10.12}$$

这个结果说明，有效数字越多，相对误差也越小。因此，在计算过程中，要尽量保留多的有效数字。

下面考察两数之差与两数之商的相对误差。

设 x,y 的近似值为 $\tilde{x},\tilde{y}$

差的相对误差为

$$RE(\tilde{x}-\tilde{y})=\frac{x-\tilde{x}}{\tilde{x}}\cdot\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}-\tilde{y}}-\frac{y-\tilde{y}}{\tilde{y}}\cdot\frac{\tilde{y}}{\tilde{x}-\tilde{y}}\tag{10.13}$$

当 $\tilde{x}$ 与 $\tilde{y}$ 相差不多时 由式(10.13)可知，$\tilde{x}-\tilde{y}$ 的相对误差可能很大。这就是所谓两个值相近的数相减时的精度耗失现象。在选择计算方案时应尽量避免两个值相近的数相减。有时这可以通过变换计算公式来达到。如果实在避免不了，可以多保留几位数字，例如采用双精度进行计算。

商的绝对误差为

$$E\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{y}}\right)=\frac{\tilde{y}E(\tilde{x})-\tilde{x}E(\tilde{y})}{\tilde{y}}\tag{10.14}$$

式(10.14)说明，当$|\tilde{y}|$很小时，商的绝对误差就会很大，在计算中也要避免这种情况。

10.2 n 次插值

在数学分析中，用 $y=f(x)$来描述一条平面曲线，但在实际问题中，函数$y=f(x)$往往是用通过实验观测得到的一组数据来给出的，即在某个区间$[a,b]$上给出一系列点的函数值

$$y_i=f(x_i),\quad i=0,1,\cdots,n\tag{10.15}$$

或者给出一张函数表：

表 1

x	x_0	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_0	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

如何通过这些对应关系去找出函数 $f(x)$的一个近似表达式呢?可以利用插值。简单地说,插值的目的,就是根据给定的数据表,寻找一个解析形式的函数 $\varphi(x)$,近似地代替 $f(x)$。

函数 $\varphi(x)$的类型可以有各种不同的选择,但最常用的类型是代数多项式,这是因为代数多项式具有一些很好的特性,如它具有各阶导数,计算多项式的值比较方便,等等。

用代数多项式作为研究插值的工具,就是所谓的代数插值。

对代数插值来说,问题的提法是这样的,当给出了 $n+1$ 个点上的一张函数表 1 以后,要构造一个多项式 $\varphi(x)$,满足下面两个条件:

(1)$\varphi(x)$是一个不超过 n 次的多项式;

(2)在给定的点 $x_i(i=0,1,\cdots,n)$上与 $f(x_i)$ (10.16)

取相同值,即 $\varphi(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots,n)$。

称 $\varphi(x)$为 $f(x)$的插值函数,点 x_i 为插值节点。

下面从最简单的情形着手,介绍如何构造这种插值函数,并在一定的条件下,讨论插值得到的函数与被插函数的误差。

10.2.1 线性插值

给出函数表

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

如何构造一个插值函数 $\varphi_1(x)$,使 $\varphi_1(x)$满足式(10.16)的要求?最简单的就是过两点(x_0,y_0),(x_1,y_1)作一条直线。把直线方程表示为

$$\varphi_1(x)=ax+b \tag{10.17}$$

为确定 a、b,把两点代入方程(10.17),得

$$\begin{cases}ax_0+b=y_0\\ax_1+b=y_1\end{cases}$$

只要 x_0 不等于 x_1,即可解出 a、b。从图 10.1 看出,就是用直线 $\varphi_1(x)$近似地代替 $f(x)$。显然这样的 $\varphi_1(x)$是满足式(10.16)的。由于是用直线近似地代替函数 $f(x)$,所以称这种插值为线性插值。

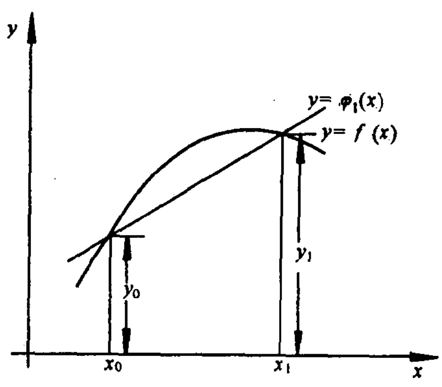

图 10.1

若把直线方程用两点式来表示,则有

$$\varphi_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0} \tag{10.18}$$

式(10.18)是两个线性函数$\frac{x-x_1}{x_0-x_1}$和$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$的线性组合，把这两个函数分别记为

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

并把$l_0(x)$叫做点x_0的一次插值基函数，把$l_1(x)$叫做点x_1的一次插值基函数，这两个插值基函数有什么性质呢？

首先，它们在对应的插值点上取值1，而在另外的插值点上取值0，如表2。

表 2

函数值 节点 函数	x_0	x_1
$l_0(x)$	1	0
$l_1(x)$	0	1

其次，它们的图形如图10.2所示。

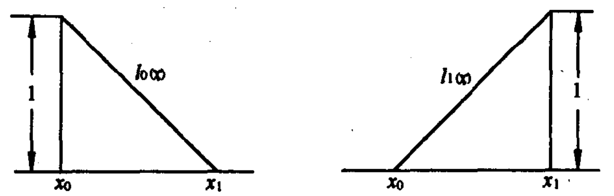

图 10.2

插值函数$\varphi_1(x)$是这两个插值基函数的线性组合，其组合系数就是对应点上的函数值，这种形式的插值称之谓拉格朗日(Lagrange)插值。

再把直线方程用点斜式表示：

$$\begin{aligned}\varphi_1(x)&=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)\\&=y_0+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)\end{aligned}\tag{10.19}$$

由于函数$f(x)$在x_i,x_j处一阶均差的定义是

$$f(x_i,x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$

因此式(10.19)中的$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$是$f(x)$在$x_1,x_0$处的一阶均差$f(x_1,x_0)$，利用均差的对称性，式(10.19)可以表示为

$$\varphi_1(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)$$

这种形式的插值叫做牛顿(Newton)插值。

直线方程还可以用行列式的形式来表示：

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{x_0-x_1}\begin{vmatrix}f(x_0) & x-x_0\\ f(x_1) & x-x_1\end{vmatrix}\tag{10.20}$$

方程的表示形式尽管可以不同，但实质是一样的，都代表同一条直线。下面来讨论这样得到的插值函数$\varphi_1(x)$与被插函数$f(x)$的误差。

要讨论$\varphi_1(x)$与函数$f(x)$的误差，需要有一定的条件，其条件就是：

函数$f(x)\in C_{[a,b]}$，$f''(x)$在$[a,b]$上存在，其中$[a,b]$是包含点(x_0,x_1)的任一区间，对

于任意的 $x\in[a,b]$，令

$$R(x)=f(x)-\varphi_1(x) \tag{10.21}$$

为估计 $R(x)$ 先来分析 $R(x)$ 的特点。首先，$R(x)$ 在 $x=x_0, x=x_1$ 这两个点上取零值，另外，$R(x)$ 的大小一般是随 x 所在的位置而变化的。为此，对任一固定点 x，引进辅助函数 $\psi(t)$，要求 $\psi(t)$ 除了在 x_0,x_1 这两个点取零值以外，在 x 处也取零值。因此，不妨将辅助函数表示为

$$\psi(t)=f(t)-\varphi_1(t)-K(t-x_0)(t-x_1)$$

其中 K 是一常数。在 x_0,x_1 两点 $\psi(x_0)=\psi(x_1)=0$，为了使在 x_0,x_1 两点以外的 x 处 $\psi(t)$ 也取零值，可取

$$K=\frac{R(x)}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

这样就有

$$\psi(t)=f(t)-\varphi_1(t)-\frac{R(x)}{(x-x_0)(x-x_1)}(t-x_0)(t-x_1) \tag{10.22}$$

$\psi(t)$ 具有三个零点 x_0,x_1 和 x。在三个零点 x_0,x_1,x 构成的二个子区间上分别应用洛尔(Rolle)定理，可知 $\psi'(t)$ 在每个子区间上至少存在一个零点，从而在区间 $[a,b]$ 内至少有 $\psi'(t)$ 的二个零点，设为 ξ_1 和 ξ_2。同样理由，$\psi''(t)$ 在 (ξ_1,ξ_2) 内至少有一个零点，设为 ξ，显然，$\xi\in(a,b)$，而且 $\psi''(\xi)=0$。现在对 $\psi(t)$ 求二次微商，因为 $\varphi_1(t)$ 是 t 的一次多项式，所以 $\varphi''(t)=0$，于是得到

$$\psi''(t)=f''(t)-2!\frac{R(x)}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

把 ξ 代入，得

$$f''(\xi)-2!\frac{R(x)}{(x-x_0)(x-x_1)}=0$$

即

$$R(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),a<\xi<b \tag{10.23}$$

式(10.23)称为线性插值的余项。上面推导可归纳为下面定理：

定理 10.1 设给定

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

$\varphi_1(x)$ 是过 x_0,x_1 的线性插值函数，$[a,b]$ 是包含 (x_0,x_1) 的任一区间，并设 $f(x)\in C^1_{[a,b]}$，$f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在，则对任意给定的 $x\in[a,b]$ 总存在一点 $\xi\in(a,b)$(依赖于 x)使

$$R(x)=f(x)-\varphi_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1)$$

并可以进一步证明

$$|R(x)|\leqslant\frac{(x_1-x_0)^2}{8}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)| \tag{10.24}$$

10.2.2 二次插值

线性插值是用两个点(x_0,y_0)和(x_1,y_1)来构造$y=f(x)$的插值函数。下面用三个点(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)来构造$y=f(x)$过三点的插值函数。过三点可以作一条抛物线，假设其方程为

$$\varphi_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

为确定三个系数将三点代入方程得

$$\begin{cases} y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 \\ y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 \\ y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 \end{cases} \tag{10.25}$$

当x_0,x_1,x_2互异时，方程组(10.25)的解存在而且唯一。解方程组(10.25)即可求得系数a_0,a_1,a_2。另外，也可以像前面线性插值那样，给出二次插值函数的几种常用的表达形式。

对拉格朗日(Lagrange)型插值，首先在节点上构造出二次插值基函数，它们都是不超过二次的多项式。在对应的插值节点上取1，其余的插值节点上取零，插值节点上的数值表为：

表3

函数值 节点 / 函数	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0
$l_1(x)$	0	1	0
$l_2(x)$	0	0	1

先构造过x_0点的二次插值基函数$l_0(x)$。由于$l_0(x)$有x_1和x_2二个零点，因此有因子$(x-x_1)(x-x_2)$，又因$l_0(x)$是一个次数不高于二次的多项式，所以，还可能相差一个常数因子，于是可以把$l_0(x)$写成

$$l_0(x) = A(x-x_1)(x-x_2)$$

利用条件$l_0(x_0)=1$，可求得

$$A = \frac{1}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

这样就得到了x_0点的二次插值基函数

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}$$

用同样的办法，可以构造x_1点和x_2点的二次插值基函数，它们分别为

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

这三个二次插值基函数的图形如图10.3所示。

有了这三个二次插值基函数，过(x_0,y_0),(x_1,y_1)和(x_2,y_2)的插值函数就容易写出来了。

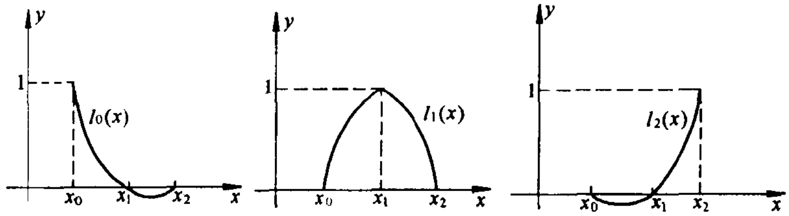

图 10.3

$$\varphi_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) \tag{10.26}$$

式(10.26)就是二次拉格朗日(Lagrange)插值多项式。

若应用二阶均差的概念,不难得出牛顿(Newton)二次插值多项式。

假设过(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)的二次插值多项式具有下面形式:

$$\varphi_2(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)(x - x_1) \tag{10.27}$$

如何确定系数A、B、C呢? 利用条件$\varphi_2(x_0)=y_0$,有

$$A = \varphi_2(x_0) = y_0 = f(x_0)$$

再利用条件$\varphi_2(x_1)=y_1$,得

$$B = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f(x_1,x_0)$$

最后用$\varphi(x_2)=y_2$确定C:

$$\begin{aligned} C &= \frac{f(x_2) - f(x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} - \frac{(x_2 - x_0)f(x_1,x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \\ &= \frac{f(x_2,x_0) - f(x_0,x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

这是一阶均差的均差,称为二阶均差,人们知道$f(x)$在任意三个互异点x_i,x_j,x_k处的二阶均差为

$$\frac{f(x_i,x_j) - f(x_j,x_k)}{x_i - x_k} = f(x_i,x_j,x_k)$$

二阶均差与一阶均差一样,与节点的排列无关。因此,C是x_0,x_1,x_2上的二阶均差。

于是可以得到二次牛顿(Newton)插值多项式

$$\varphi_2(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0,x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0,x_1,x_2) \tag{10.28}$$

把式(10.20)的形式再引伸一步,给出一种逐次线性插值的办法,要通过点(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)作二次插值多项式,先通过点(x_0,y_0)和(x_1,y_1)作线性插值多项式

$$\varphi_{01}(x) = \frac{1}{x_0 - x_1}\begin{vmatrix} f(x_0) & x - x_0 \\ f(x_1) & x - x_1 \end{vmatrix}$$

若在插值多项式$\varphi(x)$的下面加了下标“$_{01}$”表示该插值多项式经过(x_0,y_0)和(x_1,y_1)两个点。再作过(x_0,y_0)和(x_2,y_2)的线性插值多项式,把它记为

$$\varphi_{02}(x) = \frac{1}{x_0 - x_2}\begin{vmatrix} f(x_0) & x - x_0 \\ f(x_2) & x - x_2 \end{vmatrix}$$

然后将$(x_1,\varphi_{01}(x))$和$(x_2,\varphi_{02}(x))$也看作两个“点”,作线性插值多项式,并记为

$$\varphi_{012}(x)=\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}\varphi_{01}(x) & x-x_1\\ \varphi_{02}(x) & x-x_2\end{vmatrix} \tag{10.29}$$

这儿的下标“$_{012}$”是表示这个多项式与 x_0,x_1,x_2 有关。容易看出 $\varphi_{012}(x)$是一个次数不高于 2 的多项式,并且有

$$\varphi_{012}(x_j)=f(x_j),\quad j=0,1,2$$

因此 $\varphi_{012}(x)$是过(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)的二次插值多项式,由于它是用前面两个线性插值函数再进行一次线性插值得到的,所以称它为逐次线性插值。逐次线性插值的特点是在计算时,高一级的插值多项式利用前一次插值的结果,所以,便于在计算机上实现。

例 1 取节点 $x_0=0,x_1=1$ 和 $x_0=0,x_1=1,x_2=\frac{1}{2}$对函数 $y=e^{-x}$分别建立线性插值多项式和二次插值多项式。

解 先构造过 $x_0=0,x_1=1$ 两点的线性插值多项式。因为

x	0	1
y	1	e^{-1}

(1)拉格朗日型插值多项式

先造过(0,1)和$(1,e^{-1})$的一次插值基函数

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}=-(x-1),l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=x$$

这样就容易得到

$$\varphi_1(x)=l_0(x)y_0+l_1(x)y_1=xe^{-1}-(x-1)$$

(2)牛顿型插值多项式

因 $f(x_0,x_1)=e^{-1}-1$,所以

$$\varphi_1(x)=f(x_0)+(x-x_0)f(x_0,x_1)=1+x(e^{-1}-1)$$

(3)线性插值

$$\varphi_1(x)=\frac{1}{x_0-x_1}\begin{vmatrix}f(x_0) & x-x_0\\ f(x_1) & x-x_1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1 & x\\ e^{-1} & x-1\end{vmatrix}$$
$$=-(x-1)+xe^{-1}$$

构造过 $x_0=0,x_1=1,x_2=\frac{1}{2}$的二次插值函数,这时因为

x	0	1	$\frac{1}{2}$
y	1	e^{-1}	$e^{-\frac{1}{2}}$

(1)拉格朗日型二次插值函数

先造过 x_0,x_1,x_2 的二次插值基函数

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=2(x-1)(x-\frac{1}{2})$$
$$l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=2x(x-\frac{1}{2})$$
$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}=-4x(x-1)$$