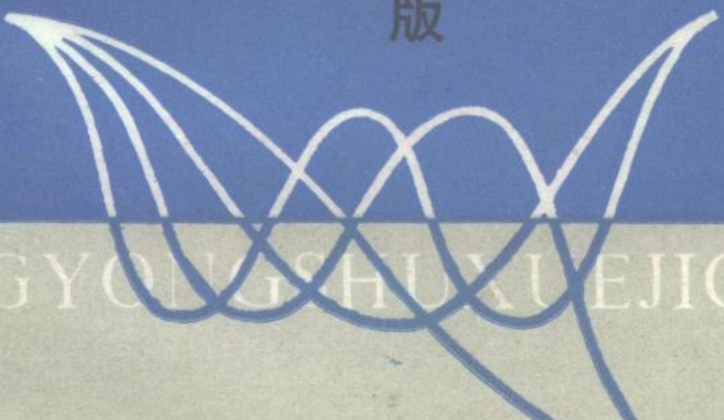
工科硕士研究生数学用书

应用数学基础

熊洪允　曾绍标　毛云英　编著

修订版



YINGYONGSHUXUEJICHU

下

天津大学出版社

工科硕士研究生数学用书

应用数学基础

（修订版）

下册

熊洪允　曾绍标　毛云英　编著

天津大学出版社

（津）新登字 012 号

应用数学基础

上下册

修订版

熊洪允　曾绍标　毛云英　编著

天津大学出版社出版
（天津大学内）
邮编：300072
河北省永清第一胶印印刷厂印刷
新华书店天津发行所发行
*
开本：850×1168 毫米 1/32 印张：19⅞ 字数：516 千字
1994 年 9 月第一版　　1994 年 9 月第一次印刷
印数：1—6000
ISBN 7-5618-0684-1
O·70　定价：16.00 元（上下册）

目　录

第七章　插值法

在生产或科研中,有时需要根据函数 $f(x)$ 在某些已知点的值去构造一个函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式. 本书第六章介绍的最小二乘法是解决这类问题的一种方法. 本章将介绍解决这类问题的另一种方法——插值法. 插值法与最小二乘法的区别在于插值法要求构造出来的函数 $F(x)$ 在已知点与函数 $f(x)$ 有相等的函数值,或者还要求有相等的导数值.

§7.1　Lagrange 插值

一、插值问题

设已知函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一系列互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的函数值

$$y_i = f(x_i), \quad i = 0,1,\cdots,n,$$

而 $f(x)$ 的解析表达式是未知的. 例如,只是通过实验测得上述诸点的函数值. 构造一个函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式,并要求

$$F(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\cdots,n. \tag{7.1}$$

有时 $f(x)$ 的解析表达式虽然是已知的,但由于较为复杂而不便于直接使用,也需要构造一个较简单的函数 $F(x)$ 作为 $f(x)$ 的近似表达式,并要求其满足(7.1)式. 这类问题称为**插值问题**,$f(x)$ 称为**被插值函数**,$F(x)$ 称为**插值函数**,$[a,b]$ 称为插值区间,$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为**插值节点**或简称为节点,(7.1)式称为**插值条件**.

用插值函数 $F(x)$ 近似代替被插值函数 $f(x)$,得近似等式

$$f(x) \approx F(x), \quad x \in [a,b]$$

此式称为**插值公式**. 误差

$$R(x)=f(x)-F(x)$$

称为插值函数 $F(x)$的**余项**或截断误差.

以后几章将看到,插值函数 $F(x)$是对函数 $f(x)$进行其它数值计算(例如,求导数,求积分,解微分方程等)的有力工具.

如果要求插值函数 $F(x)$是多项式函数,则称插值问题是代数插值问题.我们将主要考虑代数插值问题.显然满足(7.1)的多项式有无限多个.

定理7.1 存在唯一的 $p\in P_n[a,b]$满足插值条件(7.1),即满足

$$p(x_i)=y_i,\quad i=0,1,\cdots,n. \tag{7.2}$$

证明 设

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n. \tag{7.3}$$

代入条件(7.2)得

$$\begin{cases}a_0+a_1x_0+\cdots+a_nx_0^n=y_0\\ a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx_1^n=y_1\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_0+a_1x_n+\cdots+a_nx_n^n=y_n\end{cases}. \tag{7.4}$$

这是关于 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 的线性方程组,其系数行列式

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\det\begin{bmatrix}1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n\\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n\end{bmatrix}$$

为 Vandermonde 行列式.利用行列式的性质可求得

$$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j).$$

由于当 $i\neq j$ 时 $x_i\neq x_j$,所以上式右端各因式都不等于零.因此,$V_n(x_0,x_1,\cdots,x_n)\neq 0$,方程组(7.4)存在唯一解 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,即可以唯一地确定一组系数,使所得的多项式(7.3)满足条件(7.2).

证毕.

根据定理 7.1,在 $P_n[a,b]$中存在唯一的多项式 $p(x)$满足插值条件(7.2),称之为 n 次插值多项式,或简称为**插值多项式**. 因此,无论用什么方法求出的满足插值条件(7.2)的插值多项式,也无论所求出的插值多项式的表达形式如何,它们都是同一个多项式.

现在,插值问题的关键是如何具体求出插值多项式. 求插值多项式的方法称为**插值法**. 值得指出的是,解方程组(7.4),求出插值多项式的系数来确定插值多项式,一般计算量较大,有时还会对精度有严重影响,因而是不可取的.

二、Lagrange 插值多项式

令

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) y_k, \tag{7.5}$$

其中 $l_k(x)$是满足条件

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{当 } i = k \\ 0 & \text{当 } i \neq k \end{cases}$$

的 n 次多项式,$k=0,1,\cdots,n$. 显然,由(7.5)表示的多项式 $L_n \in P_n[a,b]$,并且满足插值条件(7.1). 由于 $x_0, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ 是 $l_k(x)$的 n 个零点,所以

$$l_k(x) = A \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i).$$

又由 $l_k(x_k)=1$ 可知

$$A = 1 / \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i).$$

因此

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \qquad k = 0,1,\cdots,n. \tag{7.6}$$

代入(7.5)得

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)y_k. \tag{7.7}$$

形如(7.7)的插值多项式称为 **Lagrange 插值多项式**. 由(7.6)式所表示的 $n+1$ 个 n 次代数多项式 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 称为以 x_0, $x_1,\cdots,x_n$ 为节点的 **Lagrange 插值基函数**. Lagrange 插值多项式是基函数的线性组合. 这种构造插值多项式的方法称为基函数法.

设

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i),$$

则

$$\omega'_{n+1}(x_k) = \prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i).$$

于是,Lagrange 插值多项式又可写成

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}y_k. \tag{7.8}$$

当 $n=1$ 时,由(7.7)式得

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1,$$

即

$$L_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

这是一个线性函数,通常称为 $f(x)$ 的线性插值函数,相应的插值法称为**线性插值**. 用 $L_1(x)$ 近似代替 $f(x)$,在几何上是用通过两点 (x_0,y_0) 与 (x_1,y_1) 的直线 $y=L_1(x)$ 近似代替曲线 $y=f(x)$,如图 7-1 所示.

当 $n=2$ 时,由(7.7)式得 $f(x)$ 的二次插值函数

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

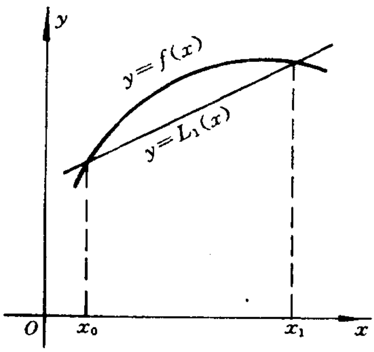


图 7-1

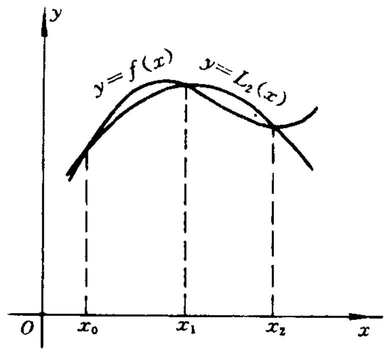


图 7-2

用 $L_2(x)$ 近似代替 $f(x)$，在几何上就是用通过点 (x_0,y_0)，(x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的抛物线 $y=L_2(x)$ 近似代替曲线 $y=f(x)$，如图 7-2 所示. 因此，二次插值又称为抛物线插值.

三、插值余项的表达式

定理 7.2　设 $f\in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}(x)$ 在 (a,b) 内存在，$L_n(x)$ 是 $f(x)$ 在节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的 n 次插值多项式，则对任意 $x\in[a,b]$，插值余项为

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i), \tag{7.9}$$

其中 $\xi\in(a,b)$ 且依赖于 x.

证明　当 x 是节点时，(7.9)式显然成立. 下面假设 x 是 $[a,b]$ 上的任一非节点. 由于在节点 x_i 处有

$$R_n(x_i)=f(x_i)-L_n(x_i)=0,\quad i=0,1,\cdots,n,$$

故可设

$$R_n(x)=K(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i). \tag{7.10}$$

作辅助函数

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - K(x)\omega_{n+1}(t),$$

其中

$$\omega_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i).$$

不难看出，$\varphi(t)$满足

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \cdots = \varphi(x_n) = 0,\text{即}$$

$\varphi(t)$在$[a,b]$上有 $n+2$ 个互异的零点. 反复应用 Rolle 定理可知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$使得 $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$，即

$$f^{(n+1)}(\xi) - L_n^{(n+1)}(\xi) - K(x)\omega_{n+1}^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

而 $L_n^{(n+1)}(t) = 0, \omega_{n+1}^{(n+1)}(t) = (n+1)!$. 因此，由上式得

$$K(x) = f^{(n+1)}(\xi)/(n+1)!.$$

代入(7.10)式即得(7.9)式. 证毕.

由于定理 7.2 中的 $\xi\in(a,b)$很难具体确定. 因此用(7.9)式也就很难计算出误差 $R_n(x)$. 对某些函数 $f(x)$，如果在$[a,b]$上有 $|f^{(n+1)}(x)|\leqslant M_{n+1}$，则有余项估计式

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\omega_{n+1}(x)|.$$

由插值余项的表达式(7.9)可以看出，$|\omega_{n+1}(x)|$是$|R_n(x)|$的一个因子，因而越小越好. 当插值多项式的次数 n 确定后，对于给定的 x，$|\omega_{n+1}(x)|$的大小就取决于 $n+1$ 个插值节点的选取. 为了使$|\omega_{n+1}(x)|$尽可能小一些，这 $n+1$ 个插值节点的选取原则是：使 x 尽可能位于区间 I_x 的中部. 此处 I_x 是包含 x 以及这 $n+1$ 个节点的最小闭区间.

例 7.1 已知函数 $y=\ln x$ 的数值如下表.

x	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4
y	1.098612	1.131402	1.163151	1.193922	1.223775

用线性插值和抛物线插值分别计算 ln3.27 的近似值，并估计它们

的误差.

解 根据插值节点的选取原则,用线性插值近似计算 ln3.27 时,取节点 $x_0=3.2$, $x_1=3.3$. 于是得到线性插值函数

$$L_1(x)=\frac{x-3.3}{3.2-3.3}\times 1.163151+\frac{x-3.2}{3.3-3.2}\times 1.193922$$
$$=0.307710x+0.178479.$$

因此

$$\ln 3.27\approx L_1(3.27)=1.184691.$$

用抛物线插值近似计算 ln3.27 时,取节点为 $x_0=3.2$, $x_1=3.3$, $x_2=3.4$. 于是得到二次插值函数

$$L_2(x)=-0.045900x^2+0.606060x-0.306225.$$

因此

$$\ln 3.27\approx L_2(3.27)=1.184787.$$

设 $f(x)=\ln x$,则

$$f'(x)=\frac{1}{x},\ f''(x)=-\frac{1}{x^2},\ f'''(x)=\frac{2}{x^3}.$$

在区间[3.2,3.3]上 ,$|f''(x)|\leqslant\frac{1}{3.2^2}$. 因此,用线性插值计算 ln3.27时的误差

$$|R_1(3.27)|\leqslant\frac{1}{2!3.2^2}|(3.27-3.20)(3.27-3.30)|$$
$$=0.000103\ .$$

在区间[3.2,3.4]上,$|f'''(x)|\leqslant\frac{2}{3.2^3}$. 因此,用抛物线插值计算 ln3.27时的误差

$$|R_2(3.27)|\leqslant\frac{2}{3!\,3.2^3}|(3.27-3.20)(3.27-3.30)(3.27-3.40)|$$
$$=0.000009.$$

由此可见,抛物线插值的精确度较高.

若 $f\in P_n[a,b]$,由(7.9)式可知,$R_n(x)\equiv 0$,因此 $f(x)$的 n 次

插值多项式就是 $f(x)$ 本身. 特别地，若取 $f(x)\equiv 1$，则由(7.7)式得到 Lagrange 插值基函数的一个重要性质

$$\sum_{k=0}^{n} l_k(x) = 1.$$

§ 7.2 Newton 插值

前一节介绍的 Lagrange 插值多项式，其形式具有对称性，便于编程序计算. 但是，如果在计算过程中需要在原有基础上增加一些节点以求得较高次的插值多项式时，必须全部重新计算. 本节将介绍另一种形式的插值多项式. 利用这种形式的插值多项式，当增加节点时只需在原来求得的插值多项式的基础上再增加一些项，这将为实际应用带来方便. 在构造此种插值多项式之前，先介绍差商概念及有关性质.

一、差商的定义及其性质

定义 7.1 已知函数 $f(x)$ 在互异节点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 的值分别为 $f(x_0), f(x_1), \cdots, f(x_n)$. 记

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

称 $f[x_i, x_{i+1}]$ 为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_{i+1} 的一阶**差商**. 记

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i},$$

并称为 $f(x)$ 关于节点 x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 的二阶差商. 一般地，称

$$\begin{aligned} &f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] \\ &= \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} \end{aligned}$$

为 $f(x)$ 关于节点 $x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}$ 的 k 阶差商. 特别地，$f(x_i)$ 称为 $f(x)$ 关于节点 x_i 的零阶差商，并记为 $f[x_i]$. 差商又称为均差.

定理 7.3 差商具有如下基本性质：

(1) $f(x)$的 k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$可表示为 $f(x_0)$，$f(x_1),\cdots,f(x_k)$的线性组合

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\omega_{k+1}'(x_i)}\ ,$$

其中

$$\omega_{k+1}(x)=\prod_{j=0}^{k}(x-x_j).$$

(2) 差商与其所含节点的排列次序无关，即对任意 x_l 与 x_j $(l\neq j)$都有

$$\begin{aligned}&f[x_0,\cdots,x_{l-1},x_l,x_{l+1},\cdots,x_{j-1},x_j,x_{j+1},\cdots,x_k]\\=&f[x_0,\cdots,x_{l-1},x_j,x_{l+1},\cdots,x_{j-1},x_l,x_{j+1},\cdots,x_k].\end{aligned}$$

(3) $f[x_0,x_1,\cdots,x_k,x_m]$

$$=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_m]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]}{x_m-x_k}.$$

(4) 如果 $f(x)$是 n 次多项式，则其 k 阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots x_{k-1},x]$，当 $k\leqslant n$ 时是 x 的 $n-k$ 次多项式，当 $k>n$ 时对一切 x 恒等于零.

证明 性质(1)可用数学归纳法证明(留给读者). 性质(2)是性质(1)的直接推论. 由性质(2)及差商定义得

$$\begin{aligned}f[x_0,x_1,\cdots,x_k,x_m]&=f[x_k,x_0,\cdots,x_{k-1},x_m]\\&=\frac{f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_m]-f[x_0,x_1,\cdots,x_{k-1},x_k]}{x_m-x_k},\end{aligned}$$

性质(3)得证. 性质(4)可用数学归纳法和性质(3)证明(留给读者).

二、Newton 插值公式

由差商的性质(3)有

$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x]$，

$f[x_0,x]=f[x_0,x_1]+(x-x_1)f[x_0,x_1,x]$，

$f[x_0,x_1,x]=f[x_0,x_1,x_2]+(x-x_2)f[x_0,x_1,x_2,x]$，