

ZIDONG
KONGZHI
LILUNJICHU

自动控制理论基础

谢锡祺 杨位钦 编著

下册

北京理工大学出版社

720.02
908

自动控制理论基础(下册)

谢锡祺 杨位钦 编著

北京理工大学出版社

(京)新登字149号

内 容 简 介

本书系大学本科教材,下册10章,适于60~80学时使用。内容包括离散控制系统的分析与设计和现代控制理论的状态空间方法(系统的状态空间模型、系统的实现、状态可控性和可观测性、状态反馈和状态观测器、李亚普诺夫稳定性理论、组合系统及等价变换)。本书总结多年的教学经验,选萃于一些常用的和最新的国内外教材和专著,结合控制工程实例,注意基本理论、概念的阐述和物理意义的解释,精选适量的自学题和习题(附有答案),便于读者自学。与本书配套的有习题解集和计算机辅助教学软件。

自动控制理论基础(下册)

谢锡祺 杨位钦 编著

*

北京理工大学出版社出版
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
国防科工委印刷厂印刷

*

787×1092毫米 16开本 27印张 668千字
1992年4月第一版 1992年4月第一次印刷
ISBN 7-81013-465-5/TP·40
印数: 1—5500册 定价: 7.30元

前 言

自动控制理论及其应用在许多工程技术基础教学中占有愈来愈重要的地位,随着科学技术的不断进步,传统的和现代的自动控制理论在内容上也有很大的扩展和更新。我们编写《自动控制理论基础》一书的目的是:(1)能更好地满足工科控制专业学生对传统的和现代的控制理论基本知识的要求,为后续课程(包括有关的选修课和研究生课)扩大和加深某些领域的学习打好基础;(2)根据多年来在本课程教学和科研实践中的经验和体会,参考国内外常用的和近期出版的教材和专著。广采精选反映到这本教材之中,以便教与学。

本书的编写得到北京理工大学自动控制系《控制理论与应用》教研室主任——张兆华教授和有关教师的热情关怀,他们根据多年从事教学的经验和本课程教学大纲的要求,在使用了本书初稿后提出了许多有益的修改意见。

本书经王子平教授审阅,他对编写的内容和文稿都提出了许多宝贵的意见和建议。

作者在此向他们表示由衷的感谢。

全书共二十一章,分上、下两册出版,一至十一章为上册,十二至二十一章为下册。其中第一至第十章由杨位钦教授执笔,第十一至第二十一章由谢锡祺副教授执笔。书中有关控制方面的名词术语参照并采用我国《自动化名词审定委员会》所认定的规范词。

囿于作者的学识水平,不当或疏漏之处,热忱欢迎读者不吝指正。

作者

一九九一年六月

下 册 目 录

第十二章 线性定常离散数据控制系统(Z 变换法)

12.1 引言	1
12.2 信号的采样	2
12.3 采样定理和信号的复现	3
12.4 信号的保持	6
12.5 z 变换	8
12.6 z 反变换	14
12.7 差分方程及其 z 变换法求解	17
12.8 离散数据控制系统的脉冲传递函数(z 传递函数)	20
12.9 修正 z 变换	28
12.10 离散数据控制系统的稳定性	40
12.11 离散数据控制系统的稳态精度	52
12.12* 离散数据控制系统动态性能指标的估算	57
习题	64

第十三章 离散数据控制系统的设计

13.1 引言	66
13.2 采样周期 T 的确定	68
13.3 串联相位滞后控制器的设计	69
13.4 串联相位超前控制器的设计	78
13.5 数字PID控制器	86
13.6 Z 域根轨迹法设计	92
习题	97

第十四章 线性连续系统的状态空间模型

14.1 引言	99
14.2 状态、状态变量	100
14.3 系统的状态空间方程	102
14.4 系统状态空间方程的线性化	103
14.5 状态变量的非唯一性	105
14.6 选取物理变量为状态变量建立系统的状态空间方程	106
14.7 选取相变量为状态变量建立系统的状态空间方程	113
14.8 选取规范型变量为状态变量建立系统的状态空间方程	122
14.9 状态变量图	128
14.10 由系统的状态空间方程确定系统的传递函数(阵)	130
14.11 线性定常系统齐次状态方程的解	135
14.12 线性定常系统非齐次状态方程的解	137

14.13 线性定常系统状态转移矩阵的计算	139
14.14 线性时变系统状态方程的解	146
14.15 线性时变系统的状态转移矩阵	148
习题	151

第十五章 线性定常连续系统的实现

15.1 引言	155
15.2 单变量线性定常连续系统的四种规范型实现	156
15.3 系统传递函数的分解	167
15.4 向量正则有理传递函数阵的实现	175
习题	180

第十六章 系统状态空间方程的等价变换

16.1* 坐标、坐标变换和等价变换	183
16.2* 系统的特征值和特征向量	188
16.3* 系统的振荡振型和振型分解	197
16.4 系统矩阵 A 等价变换为对角型矩阵 Λ	204
16.5 系统矩阵 A 等价变换为约当型矩阵 J	208
16.6 系统矩阵 A 等价变换为模式矩阵 M	217
16.7 状态可控的任一型状态空间方程等价变换为可控规范型	222
16.8 状态可观测的任一型状态空间方程等价变换为可观测规范型	225
16.9 应用等价变换计算矩阵指数 e^{At}	228
习题	233

第十七章 线性连续系统的可控性和可观测性

17.1 引言	236
17.2 线性定常连续系统的状态可控性	236
17.3 线性定常系统的输出可控性	244
17.4 线性时变系统的状态可控性	245
17.5 状态可控系统控制向量 $u(t)$ 的确定	248
17.6 线性定常系统的状态可观测性	252
17.7 线性时变系统的状态可观测性	258
17.8 状态可观测的线性定常系统, 初始状态 $x(0)$ 的确定	260
17.9 对偶性原理	262
17.10 状态可控性、可观测性与系统传递函数(阵)的关系	263
17.11* 线性定常系统实现的规范分解	270
17.12 系统的传递函数模型与状态空间模型等价的条件	280
习题	281

第十八章 状态反馈和状态观测器

18.1 状态反馈	285
18.2 输出反馈	295

18.3*	镇定问题	298
18.4*	渐近跟踪问题	299
18.5	状态观测器	303
18.6	状态反馈控制器与状态观测器的连接	309
习题		311

第十九章 线性定常离散数据控制系统(状态空间方法)

19.1	线性定常离散数据控制系统的状态空间方程	316
19.2	线性定常离散系统状态空间方程的解	324
19.3	线性定常连续时间系统状态空间方程的离散化	332
19.4	线性定常离散系统的实现问题	337
19.5	离散系统的状态可控性和状态可观测性	338
19.6	离散系统的状态反馈和状态观测器	345
习题		346

第二十章 李亚普诺夫稳定性理论

20.1	引言	348
20.2	系统运动稳定性的概念及其实际意义	348
20.3	系统运动的稳定性	349
20.4	李亚普诺夫稳定性定理	354
20.5	李亚普诺夫函数的构造	363
20.6	李亚普诺夫第一近似理论	370
习题		373

第二十一章 组合系统

21.1	引言	374
21.2*	组合系统的状态空间方程和传递函数阵	374
21.3	系统的适定性	378
21.4*	组合系统的完全表征	383
21.5*	组合系统的可控性和可观测性	386
21.6	组合系统的稳定性	386
21.7	单变量单位反馈系统控制器的丢番图(Diophantus)方程设计	391
21.8	解耦问题	398
习题		401

习 题 答 案

参 考 文 献

第十二章 线性定常离散数据控制系统 (z变换法)

12.1 引言

前几章研究的线性定常控制系统, 其中所有的信号都是模拟信号, 即都是时间变量 t 的连续函数, 通常我们把这类系统称为连续数据控制系统或连续时间系统, 简称为连续系统。

在工程实际中, 还有另一类线性定常控制系统, 这类系统包括:

(1) 受控对象是连续的, 控制器是数字式的“混合系统”, 通常称之为采样数据控制系统;

(2) 受控对象与控制器均是数字式的“纯种的数字系统”, 通常称之为数字控制系统; 我们把这两种系统总称为离散数据控制系统或离散时间系统, 简称为离散系统。

离散系统与连续系统的主要区别是, 在离散系统中的一处或多处的信号, 或者呈脉冲序列的形式, 或者呈数码的形式, 并且均具有以数字计算机为核心的控制器。

在采样数据控制系统中, 采样器只在特定的离散时刻上对连续信号进行采样, 获取的数据是脉冲序列。例如雷达跟踪系统, 它的任务是搜索和跟踪空中的运动目标; 由于雷达处于扫描工作状态, 发送和接收的信号均是脉冲序列形式, 得到的目标方位角、高低角、目标距离及其速度等信息都是离散数据, 经过计算机系统去控制雷达天线, 使它始终指向目标。雷达天线方位角或高低角跟踪系统,

其简单的方框图如图12.1所示。

采样数据控制适合于远距离传输数据的控制系统, 因为脉冲序列传输具有抗干扰性强、畸变小、精度高等优点。

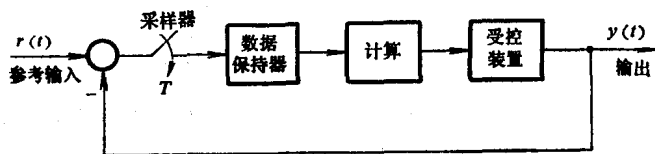


图12.1 雷达天线方位角控制系统

从60年代中期出现小型计算机、70年代初期出现微型计算机以来, 数字计算机技术有了飞速的发展。由于数字计算机具有运算速度快、精度高、集成化、容量大、功能多、体积小以及使用上的通用性和灵活性等优点, 加上有日臻完善的“软件系统”的支持, 使得数字计算机控制技术的应用的领域越来越广泛, 在工程上应用越来越普遍。典型的离散数据控制系统, 有工业过程数字控制系统, 飞机或导弹自动驾驶仪数字控制系统, 核动力设备数字控制系统, 以及更复杂的大系统数字控制系统等。导弹自动驾驶仪数字控制系统的方框图如图12.2所示。

对于“混合系统”, 其受控对象的控制量是模拟量, 而数字计算机只能接受和处理数字量, 因此, “混合系统”必须具备模/数(A/D)和数/模(D/A)转换器。数字计算机的输入接口是A/D转换器, 它把模拟信号转换为计算机能够处理的二进制等数字信号; 计算机的输出接口是D/A转换器, 它把数字信号转换为驱动装置所需的模拟信号。

不论采样数据控制系统还是数字控制系统, 都具有采样器(通常为等周期采样, 采样周期为 T 秒), 其采样时间 τ 与采样周期 T 相比, 一般很小, 在每个采样周期内可以巡回采集多条通

路的数据, 可对多条控制通路实施分时控制, 共享高精度的数字控制器, 这是离散数据控制系统的另一个显著的优点。

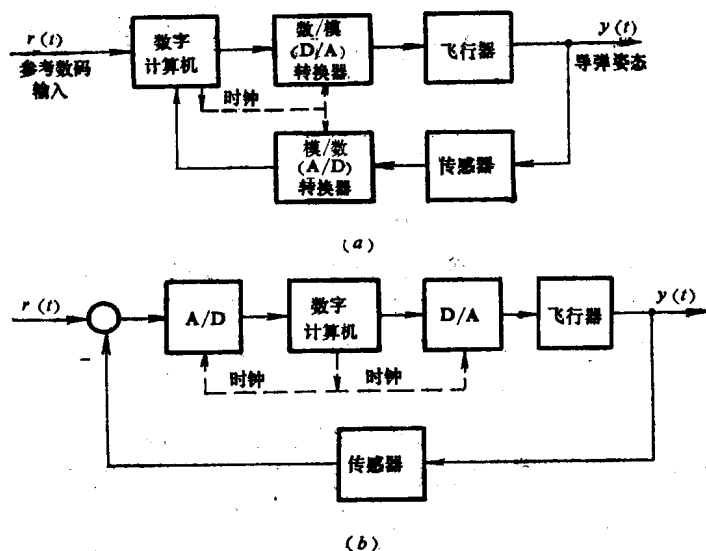


图12.2 导弹自动驾驶仪数字控制系统

本章介绍用 z 变换法分析离散数据控制系统, 下一章介绍离散数据控制系统的设计。第十九章采用状态空间方法研究离散数据控制系统。

12.2 信号的采样

受控对象(或过程)的物理量, 诸如温度、压力、流量、转速、转角、位移、成分等的数学描述都是模拟信号, 在实现离散数据控制时, 需要对模拟信号 $x(t)$ 进行采样, 转换为离散的模拟信号 $x^*(t)$ 。对于数字控制系统, 还必须有一个量化过程, 用一组数码(例如二进制数码)去逼近离散的模拟信号, 转换为数字信号。

模拟信号是在时间上连续和幅值上连续的信号; 离散的模拟信号是在时间上离散而幅值上连续的信号; 数字信号是时间上离散和幅值上离散的信号。

模拟信号通常又称为连续信号, 离散的模拟信号和数字信号通常又总称为离散时间信号, 简称为离散信号。

采样器是离散数据控制系统的一个基本元件。当采样的形式为等周期采样时, 采样器的理想模型相当于每隔 T 秒闭合一次的开关。采样时间即采样持续的时间 τ 很短, 一般 $\tau \leq 0.1T$, 在采样时间 τ 内有信号传递, 而在一个采样周期 T 中的其余 $T - \tau$ 时间内则无信号传递。在采样时间 τ 内, 假设模拟信号的变化很小, 因此模拟信号 $x(t)$ 经过采样变成离散的模拟信号 $x^*(t)$, 它是发生在各个采样时刻 kT ($k=0, 1, 2, \dots$) 的加权窄脉冲串, 如图 12.3(a) 所示。

采样的形式除了等周期采样外, 还有多阶采样、多速采样、随机采样等。这里我们只讨论等周期采样, 其采样周期 $T_s = T[s] = \text{常数}$ 。

$$\text{采样频率为 } f_s = \frac{1}{T} [\text{Hz}]$$

采样角频率为 $\omega_s = \frac{2\pi}{T} [\text{rad/s}]$

我们引入 δ 函数（单位脉冲函数），把它看成强度为1的窄脉冲的理想模型。这不仅可使数学处理简便，而且这样抽象也比较准确地符合工程实际，并且通常认为， $t < 0$ 时控制系统中的信号均为零。于是，可以把采样器的输出信号（即采样信号） $x^*(t)$ 看成是加权脉冲串，或是一个脉冲时间序列，它与输入信号 $x(t)$ 之间的关系可以表示为

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = x(t) \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) \quad (12.2-1)$$

式中， $\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT)$ 是周期为 T 的单位脉冲串， $x(kT)$ 是在采样时刻 $t = kT$ 时的实际采样值，它表示 $x^*(t)$ 在 kT 采样时刻的脉冲强度或脉冲的“权”。

采样器的输入信号 $x(t)$ 和输出信号 $x^*(t)$ 如图12.3(b)所示，图中各采样时刻处带箭头的线段代表各采样时刻的脉冲，各线段的长度代表各采样时刻脉冲的强度。

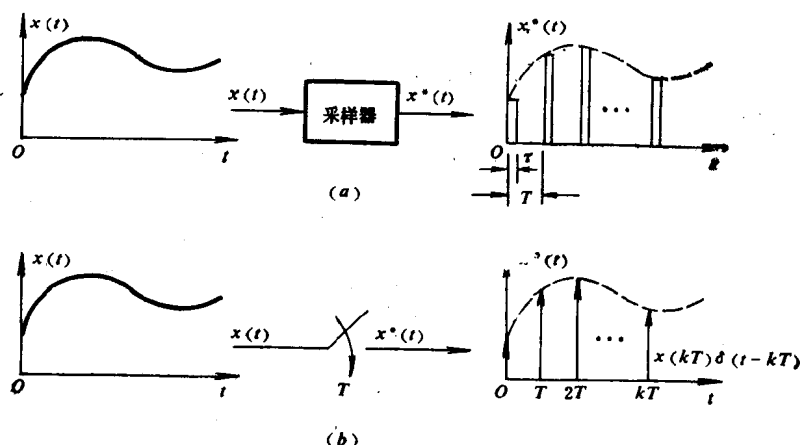


图12.3 (a)等周期采样器；(b)采样器的理想模型

12.3 采样定理和信号的复现

在上一节中，已经假设离散数据控制系统的采样形式为等周期采样，采样器的理想模型为一个采样开关。在一个采样周期内，信号只在极短的采样时间 τ 内传递，而在其余的 $(T - \tau)$ 时间内无信号通过，在这段时间内控制系统处于断开状态。如果采样角频率 ω_s 太低或采样周期 T 太长，信号经过采样以后将过多地丢失输入信号中的某些信息，如果采样角频率 ω_s 太高或采样周期 T 太短，对于数字控制系统来说， T 是计算步长，如果计算步长太短，将导致过多的数据存贮和运算，加重计算机的负担，因此有一个如何合理选择采样角频率 ω_s 的问题，采样定理将给出一个合理选择 ω_s 的原则。

采样定理是1928年首先由乃奎斯特(H. Nyquist)提出来的，到1948年申农(C. E. Shannon)从信息论的观点作了证明。

一般连续信号 $x(t)$ 的频谱 $|X(j\omega)|$ 是一个孤立的连续频谱，其最高角频率为 $\omega_{\max}$ ，带宽为 $2\omega_{\max}$ ，如图12.4所示。

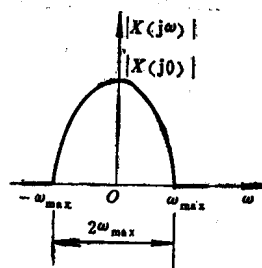


图12.4 连续信号 $x(t)$ 的频谱

连续信号 $x(t)$ 经过等周期采样,采样信号是离散信号 $x^*(t)$,其表达式为式(12.2-1),即

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT)$$

由于 $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$ 是周期函数,可以展开成复数形式的傅氏级数

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \quad (12.3-1)$$

式中 $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ 为采样角频率,

C_n 为傅氏系数,即

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta_T(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_0^+ \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} e^{-jn\omega_s t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (12.3-2)$$

将(12.3-2)代入(12.3-1)得到

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} \quad (12.3-3)$$

$$\text{于是 } x^*(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = x(t) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_s t} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jn\omega_s t} \quad (12.3-4)$$

上式两边取拉氏变换并应用复域位移定理,同时考虑到求和的对称性,可得到

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L} \left[\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jn\omega_s t} \right] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s - jn\omega_s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(s + jn\omega_s) \end{aligned} \quad (12.3-5)$$

若 $X^*(s)$ 的极点都位于 s 左半平面内,用 $j\omega$ 代替(12.3-5)中的 s ,便得到离散信号 $x^*(t)$ 的傅氏变换

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + n\omega_s)]$$

于是采样信号 $x^*(t)$ 的频谱为

$$|X^*(j\omega)| = \frac{1}{T} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + n\omega_s)] \right| \quad (12.3-6)$$

它是采样角频率 ω_s 的周期函数。

当 $\omega_s > 2\omega_{max}$ 时,式(12.3-6)中和的模等于模的和,此时采样信号 $x^*(t)$ 的频谱 $|X^*(j\omega)|$ 可表示为

$$\begin{aligned} |X^*(j\omega)| &= \frac{1}{T} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + n\omega_s)] \right| = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |X[j(\omega + n\omega_s)]| \\ &= \dots + \frac{1}{T} |X[j(\omega - \omega_s)]| + \frac{1}{T} |X(j\omega)| \\ &\quad + \frac{1}{T} |X[j(\omega + \omega_s)]| + \dots \end{aligned} \quad (12.3-7)$$

其中 $n=0$ 时的频谱 $(1/T)|X(j\omega)|$ 是采样前连续信号 $x(t)$ 频谱 $|X(j\omega)|$ 的 $1/T$ 倍;其余 $n=\pm 1, \pm 2, \dots$ 时的各个频谱都是由于采样而产生的高频频谱,它们起一个相当于扰动信号的不利作用。 $\omega > 2\omega_{\max}$ 时 $x^*(t)$ 的频谱如图12.5(a)所示。

当 $\omega_s < 2\omega_{\max}$ 时,采样信号 $x^*(t)$ 的频谱出现重叠,称为“混叠现象”,如图12.5(b)所示。

从图12.5(a)和(b)可以看出,只要 $\omega_s \geq 2\omega_{\max}$,在采样信号频谱 $|X^*(j\omega)|$ 中保持着原信号频谱 $|X(j\omega)|$ 的形式,它即是(12.3-7)式中 $n=0$ 时的频谱。采样信号经过理想低通滤波器(其幅频特性为图12.5(a)中的虚线矩形或为图12.7),滤去高频部分以后,得到 $1/T$ 倍的原信号频谱 $(1/T)|X(j\omega)|$,再经过增益为 T 的放大器,便获得原信号的频谱 $|X(j\omega)|$,不失真地复现采样器输入端的原信号。信号复现的方框图如图12.6所示。

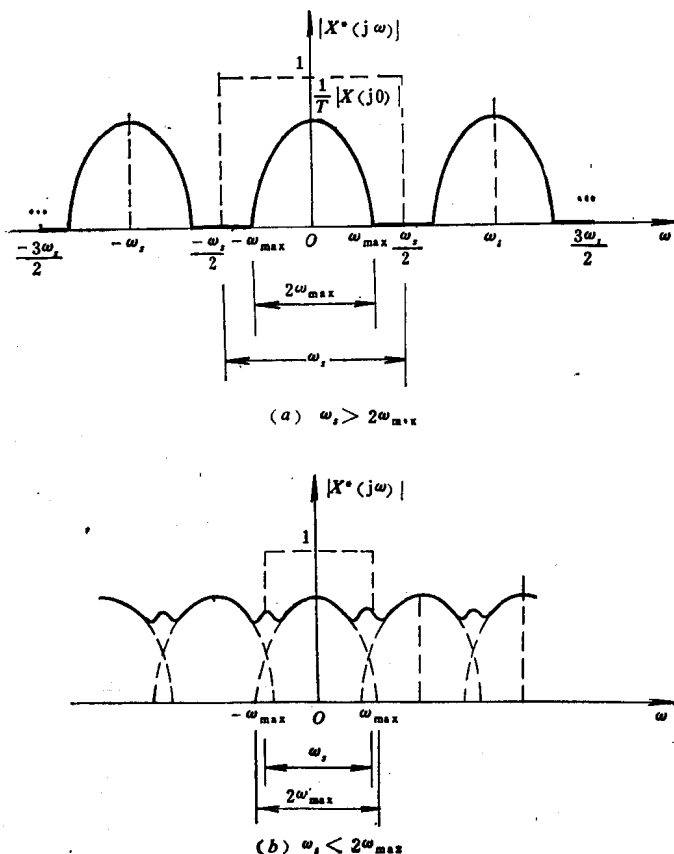


图12.5 离散信号的频谱
(a)采样周期满足采样定理; (b)采样周期不满足采样定理。

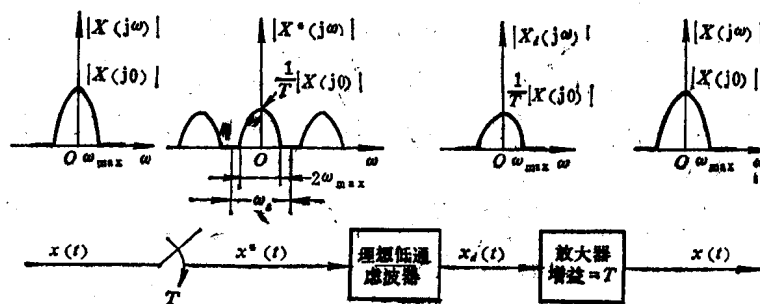


图12.6 信号的复现

申农(Shannon)采样定理: 如果选择的采样角频率 ω_s 是信号频谱中最高频率 $\omega_{\max}$ 的二倍以上,即

$$\omega_s \geq 2\omega_{\max}$$

或

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_{\max}} \quad (12.3-8)$$

经过等周期采样, 采样信号中将包含原信号的全部信息。

在离散数据控制系统中, 为了不失真地复现采样器输入端的原信号, 应满足两个主要条件:

- (1) 采样角频率 ω_s 的选择, 应满足申农采样定理;
- (2) 采样信号应通过理想低通滤波器, 它只允许角频率低于 $(1/2)\omega_s$ 的信号通过, 而角频率高于 $(1/2)\omega_s$ 的信号均被滤掉。

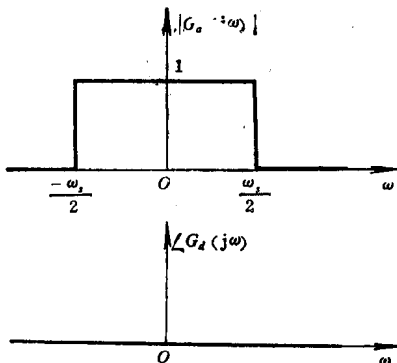


图12.7 理想低通滤波器的频率特性

理想低通滤波器的频率响应特性为

$$|G_d(j\omega)| = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \frac{1}{2}\omega_s \\ 0 & |\omega| > \frac{1}{2}\omega_s \end{cases} \quad (12.3-9a)$$

$$\angle G_d(j\omega) \equiv 0^\circ \quad (12.3-9b)$$

理想低通滤波器的幅、相频率特性如图12.7所示。实际上理想低通滤波器是不存在的, 只能用近似于理想低通滤波器特性的实际低通滤波器来代替, 最常用的实际低通滤波器是下一节要介绍的零阶保持器。

12.4 信号的保持

保持器是离散数据控制系统的另一个基本元件, 它的功能是将离散信号(离散的模拟信号或数字信号) $x^*(t)$ 转换成模拟信号 $x_h(t)$, 实质上它是一个低通滤波器, 是一种在时域内, 根据过去时刻和现在时刻的采样值进行外推的装置。对于数字控制系统, 保持器是一个数字滤波器, 即D/A转换器, 从数学上说, 它的任务是解决两相邻采样时刻间的插值问题。

两相邻采样时刻间 $kT \leq t < (k+1)T$ 的信号, 可以用一个 m 阶的多项式来近似, 这是一个 m 阶保持器, 它的外推公式为

$$x_h(t) \Big|_{kT \leq t < (k+1)T} = x(kT + \Delta t) = a_0 + a_1 \Delta t + \dots + a_m t^m \quad 0 \leq \Delta t < T \quad (12.4-1)$$

最简单的并且是最常用的保持器是零阶保持器(ZOH), 它按常值规律外推。考虑到采样时刻 kT 的模拟信号 $x(kT)$ 与离散的模拟信号 $x^*(t)$ 在 $t=kT$ 时的取值 $x^*(kT)$ 是相同的, 则零阶保持器的外推公式为

$$x_h(t) \Big|_{kT \leq t < (k+1)T} = x(kT + \Delta t) = a_0 \quad 0 \leq \Delta t < T \quad (12.4-2)$$

显然, 当 $\Delta t=0$ 时, 式(12.4-2)也成立, 得到

$$a_0 \equiv x(kT) \quad (12.4-3)$$

于是零阶保持器的输出信号 $x_h(t)$ 可以表示为

$$x_h(t) = x(kT + \Delta t) = a_0 = x(kT) \quad kT \leq t < (k+1)T \quad (12.4-4)$$

如果零阶保持器的输入信号为加权脉冲串 $x^*(t) = x(t)\delta_T(t)$, 则零阶保持器的输出信号 $x_h(t)$ 将是一个阶梯形的矩形脉冲序列, 如图12.8所示。

零阶保持器的单位脉冲响应 $g_h(t)$ 是幅值为1、宽度为 T 的矩形, 它可以分解为两个单位阶跃函数的叠加, 如图12.9所示。

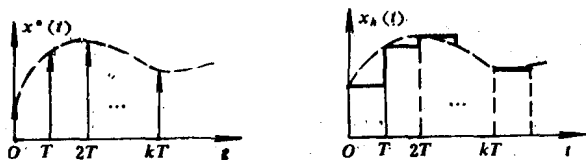


图12.8 零阶保持器(ZOH)

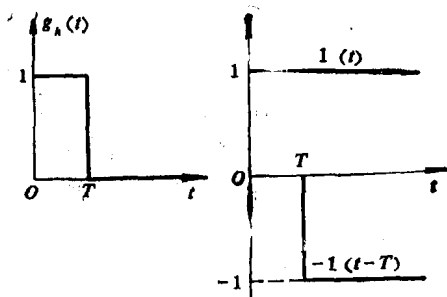


图12.9 ZOH的单位脉冲响应

$$g_h(t) = 1(t) - 1(t-T)$$

取拉普拉斯变换, 得到零阶保持器的传递函数

$$G_h(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-Ts} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (12.4-5)$$

零阶保持器的频率响应特性为

$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-jT\omega}}{j\omega} = \frac{2e^{-j\frac{T\omega}{2}} (e^{j\frac{T\omega}{2}} - e^{-j\frac{T\omega}{2}})}{2j\omega} = T \frac{\sin\left(\frac{T\omega}{2}\right)}{\frac{T\omega}{2}} e^{-j\frac{T\omega}{2}} \quad (12.4-6a)$$

考虑到采样角频率 $\omega_s = 2\pi/T$, 则

$$\frac{T\omega}{2} = \frac{\omega}{2} \frac{2\pi}{\omega_s} = \frac{\pi\omega}{\omega_s}$$

于是零阶保持器的频率响应特性可以表示为

$$G_h(j\omega) = T \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\omega_s} \omega\right)}{\frac{\pi}{\omega_s} \omega} e^{-j\frac{\pi}{\omega_s} \omega} \quad (12.4-6b)$$

考虑到 $\sin\left(\frac{\pi}{\omega_s} \omega\right)$ 符号的正负, 上式可改写为

$$|G_h(j\omega)| = T \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\omega_s} \omega\right)}{\frac{\pi}{\omega_s} \omega} \right| \quad (12.4-7)$$

$$\angle G_h(j\omega) = -\frac{\pi}{\omega_s} \omega + \theta \quad (12.4-8)$$

式中

$$\theta = \begin{cases} 0 & \sin\left(\frac{\pi}{\omega_s} \omega\right) > 0 \\ \pi & \sin\left(\frac{\pi}{\omega_s} \omega\right) < 0 \end{cases}$$

当 $\omega \rightarrow 0$ 时, 应用罗比塔法则求 $|G_h(j\omega)|$ 的值

$$|G_h(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = T \frac{d\left(\sin\frac{\pi}{\omega_s} \omega\right)}{d\omega} \bigg/ \frac{d\left(\frac{\pi}{\omega_s} \omega\right)}{d\omega}$$

$$= T \frac{\pi}{\omega_s} \cos \frac{\pi}{\omega_s} \omega \bigg/ \frac{\pi}{\omega_s} \bigg|_{\omega \rightarrow 0} = T \quad (12.4-9)$$

零阶保持器的幅、相频率特性如图12.10所示，与图12.7理想低通滤波器的频率响应特性相比较，可以看出，零阶保持器的幅频具有高频衰减的特性，它近似为一个理想低通滤波器；但是零阶保持器的相频特性为负的相角。一阶以上的保持器的幅频也具有高频衰减特性，但相频特性的相角滞后比零阶保持器的更大。

因此，在离散数据控制系统中引入保持器以后，将对系统的稳定性不利。正是由于这个原因，如果采样数据系统中的受控对象 $G_p(s)$ 具有较好的滤波性能，则可不引入保持器。采样数据控制系统中有无保持器对系统的影响及其差别，参见12.9节中的例12.24。

零阶保持器的实现如下。

零阶保持器的传递函数为

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{e^{Ts}} \right)$$

由于 $e^{Ts} = 1 + TS + \frac{1}{2!} (TS)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \cdot (TS)^n + \dots$

当 T 很小时，取幂级数展开式中的前两项来近似表示指数函数 e^{Ts} ，于是零阶保持器的传递函数近似表示为

$$\begin{aligned} G_h(s) &= \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{e^{Ts}} \right) \approx \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{1 + TS} \right) \\ &= \frac{1}{s} \frac{TS}{TS + 1} = \frac{T}{TS + 1} \end{aligned} \quad (12.4-10)$$

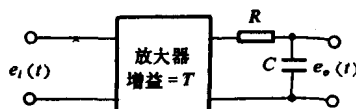
由一个放大环节和一个惯性环节组成，可采用放大器和 RC 网络或有源网络来实现，如图12.11所示。它们的传递函数分别为

$$G_h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = T \frac{1}{TS + 1} \quad (12.4-11)$$

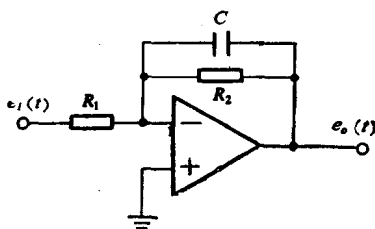
式中 $T = RC$

$$G_h(s) = \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -K_p \frac{1}{TS + 1} \quad (12.4-12)$$

式中 $K_p = \frac{R_2}{R_1}$, $T = R_2 C$ 。



(a)



(b)

图12.11 零阶保持器的实现

12.5 Z 变换

经典控制理论研究线性定常连续系统，应用的数学工具主要是拉普拉斯变换；相应地研究线性定常离散系统，应用的数学工具主要是 z 变换。

设连续信号 $x(t)$ 满足拉普拉斯变换的三个存在条件，则它的拉普拉斯变换定义为

$$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

连续信号 $x(t)$ 经过满足采样定理的等周期采样, 成为离散信号 $x^*(t)$, 即(12.2-1)式

$$x^*(t) = x(t) \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT)$$

并且当 $k < 0$ 时, $x(kT) = 0$ 。

对离散信号 $x^*(t)$ 取拉普拉斯变换

$$\begin{aligned} X^*(s) &= \mathcal{L}[x^*(t)] = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_0^{\infty} \delta(t-kT) e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \int_{kT^-}^{kT^+} \delta(t-kT) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \end{aligned} \quad (12.5-1)$$

式中 e^{-kTs} 是超越函数, 为了便于运算, 定义一个新的变量 $z \stackrel{\text{def}}{=} e^{-Ts}$ (12.5-2a)

$$S = \frac{1}{T} \ln z \quad (12.5-2b)$$

其中 S 为拉普拉斯变换的复变量, T 为采样周期, z 为 S 的超越函数, 它也是复变量。

考虑(12.5-2)式, 由(12.5-1)式得到以复变量 z 为变量的函数 $X(z)$

$$X(z) = X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \Big|_{s = -\frac{1}{T} \ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \quad (12.5-3)$$

如果(12.5-3)式的级数收敛, 则 $X(z)$ 称为离散信号 $x^*(t)$ 的 z 变换, 并且记为

$$X(z) = \mathcal{Z}[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

由于 z 变换考虑的是连续信号 $x(t)$ 在各采样时刻的采样值 $x(kT)$, 即式(12.5-3)只适用于离散信号, 或者它仅仅表示连续信号在各采样时刻的特性, 因此连续信号 $x(t)$ 与相应的满足采样定理的离散信号 $x^*(t)$ 具有相同的 z 变换式, 记为

$$\begin{aligned} X(z) &= X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = \mathcal{Z}[x^*(t)] \\ &= \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \end{aligned} \quad (12.5-4)$$

从 z 变换的推导过程可以看出, z 变换是采样拉普拉斯变换或离散拉普拉斯变换, 实质上是拉普拉斯变换的推广。

下面介绍求离散信号 z 变换的方法。

求离散信号 $x^*(t)$ 的 z 变换 $X(z)$, 常用的方法有三种。

1. 级数求和法

已知连续信号 $x(t)$ 或采样信号 $x^*(t)$, 按 z 变换的定义(12.5-4)计算 $X(z)$ 。

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t-kT)$$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = x(0) + x(T)z^{-1} + x(2T)z^{-2} + \dots \quad (12.5-5)$$

式(12.5-5)是离散信号 $x^*(t)$ 的 z 变换 $X(z)$ 的级数展开式,该无穷级数为 $X(z)$ 的开放形式,当无穷级数收敛时,才能获得 $X(z)$ 的闭合形式。

例12.1 求 $x(t)=1(t)$ 的 z 变换

单位阶跃函数 $1(t)$ 在各采样时刻的采样值 $1(kT)$ 均为1。按 z 变换的定义得到

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] = \mathcal{Z}[1(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \quad (12.5-6)$$

考虑到 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \quad (|x| < 1)$

如果式(12.5-6)中 $|z^{-1}| < 1$, 则可以将无穷级数写为闭合形式

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (12.5-7)$$

例12.2 求 $x^*(t) = \delta_T(t)$ 的 z 变换

单位脉冲序列 $\delta_T(t)$ 在各采样时刻的强度均为1, 它可以改写为

$$x^*(t) = \delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)\delta(t-kT)$$

按式(12.5-4)计算, 得到

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[x^*(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} 1(kT)z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad (|z^{-1}| < 1) \end{aligned} \quad (12.5-8)$$

比较式(12.5-7)与(12.5-8)可知, 单位阶跃函数 $1(t)$ (连续信号)与相应的满足采样定理的单位脉冲序列 $\delta_T(t)$ (离散信号)具有相同的 z 变换式。

例12.3 $x(t) = e^{-at}$, a 为实常数, $t \geq 0$, 求 $x(t)$ 的 z 变换。

按(12.5-4)计算, 可得到

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[e^{-at}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k} = 1 + e^{-aT}z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2} + \dots \\ &= \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}} \quad (|e^{-aT}z^{-1}| < 1) \end{aligned} \quad (12.5-9)$$

例12.4

$$x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{求 } x(t) \text{ 的 } z \text{ 变换。}$$

$$x(t) = \sin \omega t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) \quad t \geq 0$$

应用(12.5-9)的结果, 可求出上述正弦函数的 z 变换

$$\begin{aligned} X(z) &= \mathcal{Z}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j} \left[\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega T}} \right] \\ &= \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T})z}{z^2 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T})z + 1} = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \end{aligned} \quad (12.5-10)$$